3. Балакирев В. А.— Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 7, с. 841.
4. Кондратенко А Н. Плазменные волноводы.— М: Атомиздат, 1976

Поступила в редакцию
21 августа 1980 г.,
после доработки
15 апреля 1981 г.

УДК 538.56 : 519 25

МАРКОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН, ОТРАЖЕННЫХ В НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СРЕДАХ

А. И. Саичев

1. При статистическом анализе волн, отраженных в случайно-неоднородных средах, возникает проблема представления отраженной волны в виде комбинации волн, распространяющихся в одну сторону. Если это удается сделать, то отраженная волна удовлетворяет условию причинности и при ее статистическом описании применимо марковское приближение. В работах [1, 2] с помощью теоремы взаимности волна, отраженная в консервативной случайно-неоднородной среде, представлена в причинной форме. В данной работе в причинной форме выражена волна, отраженная во флуктуирующей диссипативной (активной) среде. В качестве иллюстрации применения марковского приближения при статистическом анализе волн в подобных средах рассмотрены их простейшие статистические характеристики.

2. Пусть распространение волны по направлению оси x описывается уравнением

$$2ik\frac{\partial u}{\partial x}+\Delta_\perp u=\gamma(x,\rho)\,u,\qquad u(0,\rho)=u_0(\rho),\tag{1}$$

где x — продольная, ρ — поперечные координаты, $\gamma(x,\rho)$ — комплексная функция, мнимая часть которой описывает диссипативные (активные) свойства среды. Пусть, кроме того, в плоскости $x=L$ помещен отражатель. Отраженная волна удовлетворяет уравнению

$$2ik\frac{\partial v}{\partial x}-\Delta_\perp v=-\gamma(x,\rho)\,v,\qquad v(L,\rho)=\hat f u(L,\rho).\tag{2}$$

Здесь оператор $\hat f$ описывает закон отражения. Введем еще функцию Грина уравнения (1) $G(\nu, q, x, \rho)$:

$$2ik\frac{\partial G}{\partial x}+\Delta_\perp G=\gamma(x,\rho)\,G,\qquad G(y,q;y,\rho)=\delta(q-\rho).\tag{3}$$

Из уравнений (2), (3) следует, что

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(y,q;x,\rho)\,v(x,\rho)\,d\rho=0.$$

С учетом граничных условий уравнений (2), (3) отсюда получаем

$$v(x,\rho)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\rho;L,p)\hat f u(L,p)\,dp.$$

Выразив здесь $u(L,\rho)$ через функцию Грина, получим окончательно

$$v(x,\rho)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\rho;L,p)\hat f\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_0(q)\,G(0,q;L,p)\,dq\,dp.\tag{4}$$

Это равенство аналогично приведенным в [1, 2] и выражает отраженную в неконсервативной среде волну через функцию Грина волн, распространяющихся в одном направлении. Поэтому при статистическом анализе (4) применимо марковское приближение.

3. Рассмотрим несколько частных следствий равенства (4). Будем в дальнейшем для простоты полагать $x = 0$, т. е. будем интересоваться отраженной волной в плоскости излучения падающей. Если отражатель представляет собой зеркало ограниченных размеров, то можно положить

$$\hat{f} \equiv f(\rho) \quad \text{и} \quad v(0, \rho) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(q) f(p) G(0, q; L, p) G(0, \rho; L, p)\, dq dp. \tag{5}$$

Если отражателем служит зеркало, обращающее волновой фронт (зеркало ОВФ), конечных размеров $f(\rho)$, то

$$v(0, \rho) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u_0^*(q) f(p) G^*(0, q; L, p) G(0, \rho; L, p)\, dq\, dp. \tag{6}$$

4. В качестве первого примера статистического анализа отраженных волн в случайно-неоднородной неконсервативной среде рассмотрим среднее поле пучка, отраженного от зеркала ОВФ в среде со случайно-неоднородным показателем преломления и поглощением: $\gamma(x, \rho) = k^2\varepsilon(x, \rho) - ik\alpha + ik\beta(x, \rho)$, где действительные случайные функции $\varepsilon(x, \rho)$ и $\beta(x, \rho)$ описывают соответственно флуктуации показателя преломления и поглощения в среде. Согласно марковскому приближению будем считать их гауссовыми с функциями корреляции

$$\langle \varepsilon(x, \rho)\, \varepsilon(x + \tau, \rho + s) \rangle = A_1(s)\, \delta(\tau),$$

$$\langle \beta(x, \rho)\, \beta(x + \tau, \rho + s) \rangle = A_2(s)\, \delta(\tau),$$

$$\langle \varepsilon\beta \rangle \equiv 0.$$

При этом среднее отраженное поле в марковском приближении равно

$$\langle v(0, \rho) \rangle = e^{-\tilde{\alpha} L} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u_0^*(q) f(p)\, \Gamma(L, 0, p; q, \rho)\, dp dq, \tag{7}$$

где $\tilde{\alpha} = \alpha - A_2(0)/2$, а функция $\Gamma(x, s, p; q, \rho)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \frac{i}{k} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s\, \partial p} + \frac{1}{4} \tilde{D}(s)\, \Gamma = 0, \\ \Gamma(0, s, p; q, \rho) = \delta\left(q - p + \frac{s}{2}\right) \delta\left(\rho - p - \frac{s}{2}\right), \end{gathered} \tag{8}$$

$$\tilde{D}(s) = k^2 D_1(s) + D_2(s), \qquad D_{1,2}(s) = A_{1,2}(0) - A_{1,2}(s).$$

Подставляя решение уравнения (8) в (7), будем иметь

$$\begin{gathered} \langle v(0, \rho) \rangle = e^{-\tilde{\alpha} L} \frac{k^2}{4\pi^2 L^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0^*(\rho - \varkappa)\, F\left(\frac{k}{L}\varkappa\right) \exp\left[\frac{ik}{2L}(\varkappa - 2\rho)\varkappa - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} L \int\limits_0^1 \tilde{D}(\varkappa z)\, dz\right] d\varkappa, \\ F(\Omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\rho) \exp\left[-i(\Omega\rho)\right] d\rho. \end{gathered} \tag{9}$$

Отсюда следует, в частности, что при безграничном зеркале ОВФ

$$\langle v(0, \rho) \rangle = e^{-\tilde{\alpha} L} u_0^*(\rho)$$

— среднее отраженное поле совпадает по форме с $u_0(\rho)$, причем на значение $\langle v(0, \rho) \rangle$ влияют только флуктуации поглощения, приводящие к тому, что среднее отраженное поле в среде с флуктуациями поглощения в $\exp[A_2(0)L/2]$ больше, чем в среде с однородным поглощением ($\beta \equiv 0$). Анализ выражения (9) при произвольных размерах пучка и зеркала с точностью до отмеченного выше параметрического усиления среднего поля аналогичен приведенному в [3] в случае турбулентной консервативной среды.

5. Пусть теперь поглощение в среде детерминировано и достаточно плавно меняется по поперечным координатам, так что можно положить $\gamma(x, \rho) = k^2\varepsilon(x, \rho) - ik(\alpha\rho)$. Тогда входящая в (7) $\Gamma(x, s, p; q, \rho)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x} - \frac{i}{k}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial s\,\partial p} + \frac{k^2}{4}D_1(s)\Gamma + (\alpha p)\Gamma = 0 \tag{10}$$

и граничному условию (8). Решая уравнение (10), положив для простоты $D(s) = Ds^2$ и считая зеркало ОВФ безграничным ($f \equiv 1$), получим

$$\langle v(0, \rho)\rangle = u_0^*\left(\rho - \frac{i}{2k}\alpha L\right)\exp\left[-(\alpha\rho) + \frac{i}{4k}\alpha^2 L^2 + \frac{1}{48}D\alpha^2 L^3\right].$$

Здесь случайные неоднородности ε в среднем увеличивают отраженное поле, так как за счет них в область усиления $(\alpha\rho) < 0$ попадает в среднем больше излучения, чем в детерминированной ($\varepsilon \equiv 0$) среде.

Автор благодарен А. Н. Малахову за полезные обсуждения и А. А. Бетину за совет написать это сообщение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфгат В. И. — Акуст. журн., 1976, 22, № 1, с. 123.
2. Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 9, с. 1290.
3. Половинкин А. В., Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 4, с. 433.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 3 июля 1980 г.

УДК 538.574.4

ОТРАЖЕНИЕ ОТ ЗЕРКАЛА, ОБРАЩАЮЩЕГО ВОЛНОВОЙ ФРОНТ, С УЧЕТОМ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. И. Саичев

В данном сообщении показано, что даже при многократном обратном рассеянии от неоднородностей среды перед идеальным зеркалом, обращающим волновой фронт (ОВФ), зеркало ОВФ полностью компенсирует влияние неоднородностей на отраженную волну. Обсуждаются возможности статистического анализа волн, отраженных от зеркала ОВФ, с учетом многократного обратного рассеяния в случайно-неоднородной среде.

Пусть на неоднородный слой $x \subset [0, L]$ падает волна, при $x = 0$ равная $\mathscr{E}(\rho)$, а в плоскости $x = L$ помещено зеркало ОВФ. Будем описывать поведение волны уравнением Гельмгольца

$$\Delta E + k^2 E = k^2\varepsilon(x, \rho)E.$$

Следуя работе [1], представим $E(x, \rho) = T(x, \rho) + R(x, \rho)$, где $T(x, \rho)$ — волна, в однородной среде ($\varepsilon \equiv 0$) распространяющаяся вдоль оси x, а $R(x, \rho)$ — волна в обратном направлении. Волны T и R удовлетворяют уравнениям [1]

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \hat{M}T + \frac{1}{2}k^2\hat{N}\varepsilon T + \frac{1}{2}k^2\hat{N}\varepsilon R,$$

$$-\frac{\partial R}{\partial x} = \hat{M}R + \frac{1}{2}k^2\hat{N}\varepsilon R + \frac{1}{2}k^2\hat{N}\varepsilon T, \tag{1}$$

$$\hat{M} = i\sqrt{k^2 + \Delta_\rho}, \qquad \hat{N} = 1/\hat{M}$$

и граничным условиям

$$T(0, \rho) = \mathscr{E}(\rho), \qquad R(L, \rho) = QT^*(L, \rho), \tag{2}$$