ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 9 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 538.56 : 519.25

К ВОПРОСУ О СПЕКТРЕ ЧАСТОТНО-МАНИПУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА

А. А. Дубков, А. А. Мальцев

Выводится точная формула для спектра колебания, модулированного по частоте обобщенным телеграфным процессом, случайные значения которого в интервалах между скачками статистически независимы и одинаково распределены, а моменты перескоков образуют стационарный поток восстановления. Рассматриваются конкретные примеры вероятностных распределений принимаемых значений и интервалов переключений модулирующего процесса.

В [1] авторами была найдена спектральная плотность колебания, модулированного по частоте марковским стационарным телеграфным процессом. В настоящей работе проводится обобщение ранее полученных результатов на случай частотной манипуляции процессом, моменты перескоков которого образуют стационарный поток восстановления.

1. Как известно (см., например, [1, 2]), спектральная плотность ЧМ сигнала вида

$$x(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \int\limits_0^t \xi(u)\,du + \varphi\right),$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с $\langle \xi \rangle = 0$, φ — равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$ начальная фаза колебания, равна*

$$G_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int\limits_0^\infty e^{-j\Omega\tau} \left\langle \exp\left(j \int\limits_0^\tau \xi(u)\,du \right) \right\rangle d\tau \right\}. \tag{1}$$

В соответствии с (1) задача определения формы спектра $G_x(\Omega)$ при заданных флуктуациях $\xi(t)$ сводится к отысканию изображения по Лапласу $\tilde{I}(p)$ функционального среднего

$$I(\tau) = \left\langle \exp\left(j \int\limits_0^\tau \xi(u)\,du \right) \right\rangle. \tag{2}$$

2. Возьмем в качестве модулирующего сигнала $\xi(t)$ случайный телеграфный процесс, все значения ξ_k которого статистически независимы и одинаково распределены с плотностью вероятности $W(\xi)$, а моменты перескоков образуют стационарный поток восстановления. У такого потока, как известно [3], интервалы времени τ_k $(\tau_k \geqslant 0)$ между соседними событиями также независимы и одинаково распределены с некоторой плотностью $w(\tau)$.

Как легко показать, спектральная плотность подобного стационарного модулирующего процесса $\xi(t)$ равна $(\langle \xi \rangle = 0)$

---

* Здесь, как обычно, рассматривается спектральная плотность ЧМ сигнала, у которой частота Ω отсчитывается от несущей частоты ω_0 $(\Omega = \omega - \omega_0)$.

$$S_\xi(\omega) = (\langle \xi^2 \rangle / \pi \langle \tau \rangle \omega^2)\,[1 - \langle \cos \omega\tau \rangle]\,. \quad (3)$$

Здесь средние значения величин, содержащих τ, вычисляются с помощью распределения $w(\tau)$, а содержащих ξ, — с помощью распределения $W(\xi)$. Из (3) следует, что всегда

$$S_\xi(\omega) \sim \omega^{-2} \quad \text{при} \quad \omega \to \infty,$$

а время корреляции $\xi(t)$ —

$$\tau_{\text{кор}} \equiv \pi S_\xi(0) / \langle \xi^2 \rangle = \langle \tau^2 \rangle / 2 \langle \tau \rangle\,. \quad (4)$$

3. Перейдем к вычислению интересующего нас среднего (2). Считая для определенности, что телеграфный процесс $\xi(t)$ в случайном промежутке τ_k между перескоками (переключениями) принимает значение ξ_k, и переходя к усреднению по ξ_k и τ_k, запишем среднее (2) в виде

$$I(\tau) = \langle e^{j\xi_0\tau}\, 1(\tau^+ - \tau) \rangle_{\tau^+,\,\xi_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \langle 1(\tau - \tau^+ - \tau_1 - \cdots - \tau_n) \times$$
$$\times 1(\tau^+ + \tau_1 + \cdots + \tau_n + \tau_{n+1} - \tau) \exp\{j\xi_0\tau^+ + j\xi_1\tau_1 + \cdots + j\xi_n\tau_n + \quad (5)$$
$$+ j\xi_{n+1}(\tau - \tau^+ - \tau_1 - \cdots - \tau_n)\} \rangle_{\xi_k,\,\tau_k}\,.$$

Здесь $1(\tau)$ — единичная функция, $\tau^+ \equiv \tau_0$ — случайный отрезок времени от начала отсчета до первого скачка, называемый обычно прямым временем возвращения и описываемый в случае стационарности потока восстановления вероятностным распределением [3]

$$w_+(\tau') = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \int_{\tau'}^{\infty} w(u)\,du = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \langle 1(\tau - \tau') \rangle. \quad (6)$$

Воспользуемся возможностью раздельного усреднения по ξ_k и τ_k и проведем в (5) сначала усреднение по независимым интервалам τ_k. Тогда с учетом (6) имеем

$$I(\tau) = \left\langle e^{j\xi_0\tau} \int_{\tau}^{\infty} w_+(\tau_0)\,d\tau_0 \right\rangle_{\xi_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \int_0^{\tau} e^{j\xi_0\tau_0} w_+(\tau_0)\,d\tau_0 \times \right.$$
$$\times \int_0^{\tau-\tau_0} e^{j\xi_1\tau_1} w(\tau_1)\,d\tau_1 \times \ldots \times \int_0^{\tau-\tau_0-\tau_1-\cdots-\tau_{n-1}} e^{j\xi_n\tau_n} w(\tau_n) \times$$
$$\left. \times \exp[j\xi_{n+1}(\tau - \tau_0 - \tau_1 - \cdots - \tau_n)] \langle \tau \rangle w_+(\tau - \tau_0 - \tau_1 - \cdots - \tau_n)\,d\tau_n \right\rangle_{\xi_k}.$$

Домножая обе части данного соотношения на $e^{-p\tau}$, интегрируя по τ от 0 до ∞ и опираясь на теорему о свертке [4], придем к

$$\tilde{I}(p) = \left\langle \frac{1 - \tilde{w}_+(p - j\xi_0)}{p - j\xi_0} \right\rangle_{\xi_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \langle \tau \rangle \langle \tilde{w}_+(p - j\xi_0)\, \tilde{w}(p - j\xi_1) \times \cdots \times$$
$$\times \tilde{w}(p - j\xi_n)\, \tilde{w}_+(p - j\xi_{n+1}) \rangle_{\xi_k}, \quad (7)$$

где $\tilde{w}_+(p)$ и $\tilde{w}(p)$ — соответственно изображения по Лапласу распределений $w_+(\tau)$ и $w(\tau)$.

Для окончательного определения искомой функции $\tilde{I}(p)$ остается воспользоваться при усреднении в (7) независимостью и одинаковой распределенностью значений ξ_k телеграфного процесса $\xi(t)$ и просуммировать ряд. В результате получим

$$\tilde{I}(p) = \left\langle \frac{1-\tilde{w}_+(p-j\xi)}{p-j\xi} \right\rangle + \langle \tau \rangle \frac{\langle \tilde{w}_+(p-j\xi) \rangle^2}{1-\langle \tilde{w}(p-j\xi) \rangle}.$$

Полагая здесь, в соответствии с (1), (2), $p = j\Omega$, находим спектральную плотность колебания со случайной частотной манипуляцией

$$G_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \left\langle \frac{\Phi_+(\xi-\Omega)-1}{j(\xi-\Omega)} \right\rangle + \langle \tau \rangle \frac{\langle \Phi_+(\xi-\Omega) \rangle^2}{1-\langle \Phi(\xi-\Omega) \rangle} \right\}, \quad (8)$$

где $\Phi_+(u) = \langle e^{ju\tau^+} \rangle$ и $\Phi(u) = \langle e^{ju\tau} \rangle$ — характеристические функции, отвечающие плотностям вероятности $w_+(\tau)$ и $w(\tau)$.

Формула (8) при заданных распределениях $w(\tau)$ и $W(\xi)$ является точным решением поставленной задачи.

4. Рассмотрим предельные случаи выведенного соотношения (8). Как видно из (4), (6), при неограниченном увеличении времени корреляции модулирующего сигнала, $\tau_{кор} \to \infty$, $\langle \tau^+ \rangle = \tau_{кор}$ также стремится к бесконечности, и, следовательно, $\Phi_+(u) \to 0$ для любых u. В результате формула (8) принимает простой вид:

$$G_x(\Omega) = (A_0^2/2\pi) \operatorname{Re} \{ j \langle 1/(\xi-\Omega) \rangle \}. \quad (9)$$

Для корректного определения среднего $\langle 1/(\xi-\Omega) \rangle$ необходимо вспомнить об условии сходимости интеграла в (1), требующем наличия у параметра Ω небольшой отрицательной мнимой части: $\Omega = \Omega' - j\gamma$ $(\gamma > 0,\ \gamma \to 0)$ [4]. В силу этого входящее в (9) среднее следует понимать в смысле

$$\langle 1/(\xi-\Omega) \rangle = \lim_{\gamma \to 0} \langle 1/(\xi - \Omega + j\gamma) \rangle$$

и вычислять, как и в [1], по формуле Сохоцкого. Проделав данную процедуру, получим известное [5] выражение для спектральной плотности колебания со сколь угодно медленными флуктуациями частоты:

$$G_x(\Omega) = (A_0^2/2)\, W(\Omega). \quad (10)$$

Рассмотрим теперь противоположный случай предельно быстрой (δ-коррелированной) частотной манипуляции $\xi(t)$, когда $\langle \xi^2 \rangle \to \infty$, $\tau_{кор} = \langle \tau^+ \rangle \to 0$, а их произведение $D = 2\langle \xi^2 \rangle_{в} \tau_{кор}$ остается постоянным ($\gamma_n \equiv \langle \xi^n \rangle / \langle \xi^2 \rangle^{n/2} = \text{const}$). Из условий $\tau_{кор} \to 0$, $\langle \tau^2 \rangle \geqslant \langle \tau \rangle^2$ и формулы (4) следует, что $\langle \tau \rangle$, $\langle \tau^2 \rangle \to 0$ и, следовательно,

$$\Phi_+(u) \approx 1 + ju\tau_{кор}, \quad \Phi(u) \approx 1 + ju \langle \tau \rangle - u^2 \tau_{кор} \langle \tau \rangle.$$

Подставляя эти приближенные представления характеристических функций $\Phi_+(u)$ и $\Phi(u)$ в (8) и осуществляя предельный переход к белому шуму, получаем известную лоренцеву форму спектральной линии ЧМ колебания (см. [5])

$$G_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \frac{D/2}{(D/2)^2 + \Omega^2}.$$

Для определения закона спадания «крыльев» [5] спектра $G_x(\Omega)$ $(\Omega \to \infty)$ рассматриваемого ЧМ сигнала удобно воспользоваться одной из теорем [4], устанавливающих соответствие между функцией-оригиналом $f(t)$ и ее изображением по Лапласу $\tilde{f}(p)$,

$$\tilde{f}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}}. \tag{11}$$

В силу (6), (11) первые члены разложения входящих в (8) характеристических функций $\Phi_+(u)$ и $\Phi(u)$ при больших u имеют вид ($w(0)$, $w'(0) < \infty$)

$$\Phi_+(u) = \frac{1}{\langle \tau \rangle}\left[\frac{j}{u} + \frac{w(0)}{u^2} + \frac{jw'(0)}{u^3} + \dots\right], \quad \Phi(u) = \frac{jw(0)}{u} - \frac{w'(0)}{u^2} + \dots \tag{12}$$

Подставляя (12) в (8), находим закон изменения $G_x(\Omega)$ при $\Omega \to \infty$*:

$$G_x(\Omega) \approx A_0^2 \langle \xi^2 \rangle / 2\pi \langle \tau \rangle \Omega^4. \tag{13}$$

Из (13) следует, что независимо от формы распределения $w(\tau)$ случайных интервалов переключений τ_k модулирующего процесса $\xi(t)$ с $\langle \xi^2 \rangle$, $\tau_{\text{кор}} < \infty$ «крылья» спектра частотно-манипулированного колебания спадают, как Ω^{-4}. Полученный результат является одним из характерных признаков рассматриваемого типа модуляции и может быть использован для диагностирования частотной манипуляции при спектральных измерениях. Сопоставляя (3) и (13), приходим к известной (см., например, [5]) формуле, связывающей спектры ЧМ сигнала $x(t)$ и флуктуаций $\xi(t)$ при $\Omega \to \infty$:

$$G_x(\Omega) \approx (A_0^2/2)\,[S_\xi(\Omega)/\Omega^2].$$

5. Проанализируем теперь, что дает формула (8) для некоторых распространенных распределений $w(\tau)$ и $W(\xi)$. В частном случае $w(\tau) = \nu e^{-\nu\tau}$ $(\tau \geqslant 0)$ стационарный поток восстановления, как известно [3], переходит в пуассоновский поток событий, а соответствующий телеграфный процесс $\xi(t)$ становится марковским. Легко убедиться, что формула (8) при этом превращается в формулу (5) работы [1].

Более интересной, с практической точки зрения [3], представляется ситуация, когда частотная манипуляция колебания осуществляется строго через заданный промежуток времени (такт) T: $w(\tau) = \delta(\tau - T)$. Для отыскания спектра $G_x(\Omega)$ в этом случае удобно сначала записать основную формулу (8) в несколько ином виде. Меняя местами в (8) операции усреднения по τ, τ^+ и ξ и вводя в рассмотрение характеристическую функцию $\theta_\xi(u) = \langle e^{ju\xi} \rangle$ модулирующего процесса $\xi(t)$, придем к

$$G_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\left\langle \int_0^{\tau^+} \theta_\xi(u)\, e^{-j\Omega u}\, du \right\rangle + \langle \tau \rangle \frac{\langle \theta_\xi(\tau^+)\, e^{-j\Omega\tau^+} \rangle^2}{1 - \langle \theta_\xi(\tau)\, e^{-j\Omega\tau} \rangle}\right\}. \tag{14}$$

Вычисляя входящие в (14) средние с помощью распределений $w(\tau) = \delta(\tau - T)$ и $w_+(\tau) = 1(T - \tau)/T$ (см. (6)), определяем спектр колебания с тактовой частотной манипуляцией:

$$G_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\int_0^T \theta_\xi(u)\left(1 - \frac{u}{T}\right) e^{-j\Omega u}\, du + \frac{\left(\int_0^T \theta_\xi(u) e^{-j\Omega u}\, du\right)^2}{T\,[1 - \theta_\xi(T)\, e^{-j\Omega T}]}\right\}. \tag{15}$$

Как видно из (15), зависимость спектральной плотности подобного ЧМ колебания от частоты Ω, так же как и спектра модулирующего процесса (см. (3)), имеет в общем случае осциллирующий характер.

---

* Заметим, что формула (13) справедлива лишь в том случае, когда одномоментная плотность вероятности $W(\xi)$ модулирующего процесса $\xi(t)$ спадает при $|\xi| \to \infty$ быстрее, чем $1/\xi^4$.

Путем несложных расчетов можно показать, что в частном случае симметричной двоичной модуляции

$$W(\xi)=(1/2)\,[\delta(\xi-\Omega_0)+\delta(\xi+\Omega_0)] \tag{16}$$

формула (15) переходит в ранее найденное в [6] (см. также [7]) выражение для спектра информационного сигнала, частота которого переключается на два равноотстоящих от несущей значения через случайные интервалы времени, кратные T:

$$G_x(\Omega)=\frac{A_0^2\,\Omega_0^2}{\pi T\,(\Omega^2-\Omega_0^2)^2}\;\frac{(\cos\Omega T-\cos\Omega_0 T)^2}{(\cos\Omega T-\cos\Omega_0 T)^2+\sin^2\Omega T}\,. \tag{17}$$

Таким образом, соотношение (15) является обобщением (17) на случай произвольно распределенных значений модулирующего процесса $\xi(t)$.

6. В том случае, когда $W(\xi)$ имеет вид распределения Коши:

$$W(\xi)=a/\pi(a^2+\xi^2),$$

подстановка в (14) $\theta_\xi(u)=e^{-a|u|}$ дает

$$G_x(\Omega)=\frac{A_0^2}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1-\tilde{w}_+(a+j\Omega)}{a+j\Omega}+\langle\tau\rangle\,\frac{\tilde{w}_+^2(a+j\Omega)}{1-\tilde{w}(a+j\Omega)}\right].$$

Учитывая формулу связи функций $\tilde{w}_+(p)$ и $\tilde{w}(p)$:

$$\tilde{w}_+(p)=(1-\tilde{w}(p))/p\,\langle\tau\rangle,$$

вытекающую из (6), легко убедиться, что спектральная плотность анализируемого ЧМ сигнала

$$G_x(\Omega)=A_0^2 a/2\pi(a^2+\Omega^2)$$

не зависит от $w(\tau)$ и совпадает с (10). Подобная аналогия с результатом предельно медленной частотной манипуляции объясняется следующим. Как известно [5], эффективное влияние на форму спектра ЧМ колебания оказывает не весь спектр модулирующего процесса $\xi(t)$, а лишь его индекс модуляции $m\equiv\langle\xi^2\rangle\,\tau_{\text{кор}}^2$. Для распределения Коши $\langle\xi^2\rangle=\infty$, и поэтому рассматриваемый случай, как и случай предельно медленной манипуляции ($\tau_{\text{кор}}\to\infty$), соответствует бесконечно большому значению индекса m.

Приведем в заключение выражение для спектра колебания с двоичной частотной манипуляцией и произвольной статистикой интервалов переключений. Подставляя в (14), согласно (16), $\theta_\xi(u)=\cos\Omega_0 u$, учитывая (6) и проводя несложные вычисления, найдем

$$G_x(\Omega)=\frac{A_0^2\Omega_0^2}{\pi\langle\tau\rangle(\Omega^2-\Omega_0^2)^2}\times \tag{18}$$

$$\times\frac{[\Phi_1^2(\Omega-\Omega_0)+\Phi_2^2(\Omega-\Omega_0)]\,\Phi_1(\Omega+\Omega_0)+[\Phi_1^2(\Omega+\Omega_0)+\Phi_2^2(\Omega+\Omega_0)]\,\Phi_1(\Omega-\Omega_0)}{[\Phi_1(\Omega-\Omega_0)+\Phi_1(\Omega+\Omega_0)]^2+[\Phi_2(\Omega-\Omega_0)+\Phi_2(\Omega+\Omega_0)]^2},$$

где $\Phi_1(u)=1-\mathrm{Re}\,\Phi(u)=1-\langle\cos u\tau\rangle$, $\Phi_2(u)=\mathrm{Im}\,\Phi(u)=\langle\sin u\tau\rangle$. В частных случаях $w(\tau)=\nu e^{-\nu\tau}$ и $w(\tau)=\delta(\tau-T)$ соотношение (18), как и должно быть, переходит соответственно в формулу (11) работы [1] и (17).

Полученная в настоящей работе основная формула (8) позволяет точным образом определять форму спектров частотно-манипулированных сигналов для широкого класса вероятностных распределений значений ξ_k и интервалов переключений τ_k модулирующего процесса $\xi(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубков А. А., Мальцев А. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 6, с. 767.
2. Wittke P. H.—IRE Trans. Inform. Theory, 1964, **IT-10**, № 1, p. 67.
3. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1979.
5. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.
6. Прабху, Хьюн. — ТИИЭР, 1975, **63**, № 2, с. 93.
7. Lampard D. G., Redman S. J.— IEEE Trans. Circuit Theory, 1963, **CT-10**, № 9, p. 413.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 7 июля 1980 г.

TO THE PROBLEM OF SPECTRUM OF FREQUENCY-MANIPULATED SIGNAL

A A Dubkov, A A Mal'tsev

The accurate formula is derived for the oscillation spectrum frequency modulated by the generalized telegraph process random values of which in intervals between jumps are statistically independent and uniformly distributed and moments of overjumps form a stationary flux of restoration. Concrete examples are considered for probable distributions of values accepted and switching intervals of the modulating process.

ИНСТРУКЦИЯ ПО СОСТАВЛЕНИЮ РЕФЕРАТОВ

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 1,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 *см* с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, илл. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются *черными чернилами во второй экземпляр.* Вписывание формул и буквенных обозначений, а также исправление замеченных опечаток в *первом экземпляре не делается.*

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в котором автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.