ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 9 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 519.216

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ВЫБРОСОВ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ТЕЛЕГРАФНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. А. Дубков, А. В. Якимов

Рассматривается задача определения вероятностного распределения (либо характеристической функции) длительности выбросов случайного телеграфного процесса, моменты перескоков которого образуют стационарный поток восстановления. В случае стационарного процесса (имеющего произвольное распределение по оси x) данная задача решена полностью. При рассмотрении диффузионных процессов (имеющих стационарные приращения с произвольным распределением) задачу удалось свести к решению интегрального уравнения типа Винера — Хопфа. Приведены результаты для некоторых конкретных процессов и исследована асимптотика распределения длительности выбросов при малых и больших значениях аргумента.

В различных приложениях теории случайных функций (в теории обнаружения сигналов на фоне помех, в теории надежности и т. д.) возникает необходимость отыскания в явном виде вероятностного распределения длительности выбросов случайного процесса за данный уровень [1, 2]. Задачи подобного рода, связанные с «переводом статистики $x(t)$ в статистику $t(x)$», являются чрезвычайно сложными и трудноразрешимыми. Как показано в [1, 2], для гладких (дифференцируемых) процессов распределение длительности выбросов выражается через совместный вероятностный функционал случайного процесса и его производной. В результате этого даже в простейшем случае стационарного гауссова процесса указанная функция точно не находится.

В настоящей работе определяется плотность вероятности длительности выбросов другого важного класса — скачкообразных (телеграфных) случайных процессов. С сигналами подобного типа приходится сталкиваться в ряде задач статистической радиотехники, теории информации и теории автоматического регулирования [3–6] (хаотические импульсные помехи, частотно- и фазоманипулированные сигналы, клиппированные сигналы, дискретизированные кодированные сообщения и т. д.), а также в теории фликкерных шумов [7].

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

1) Рассмотрим случайный телеграфный процесс $x(t)$, который в интервалах времени случайной длительности τ_k между двумя последовательными перескоками принимает постоянные значения x_k (см. рис. 1). Будем полагать далее, что моменты перескоков такого сигнала не зависят от значений x_k и образуют стационарный поток восстановления. У такого потока, как известно [3], промежутки времени τ_k между соседними событиями статистически независимы и одинаково распределены с некоторой плотностью $w(\tau)$.

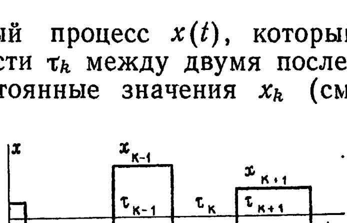

Рис. 1.

Описанный случайный телеграфный процесс $x(t)$ может преодолевать фиксированный уровень $x = a$ лишь скачком, и поэтому момент начала выброса всегда совпадает с одним из моментов перескока. Опираясь на это обстоятельство и сделанные выше предположения, определим среднюю частоту (интенсивность) выбросов такого сигнала:

$$\nu_{в}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle n_{в}(t, t + \Delta t) \rangle}{\Delta t}.$$

Здесь $n_{в}(t, t + \Delta t)$ — случайное число выбросов в промежутке $[t, t + \Delta t]$. Очевидно, что $\nu_{в}(t)$ не должно превышать среднюю частоту скачков [3] $\nu = 1/\langle \tau \rangle$, где $\langle \tau \rangle = \int\limits_0^\infty \tau w(\tau)\, d\tau$.

Как известно [3], поток восстановления обладает свойством ординарности. Иначе говоря, у такого потока вероятности осуществления двух, трех и более событий на малом отрезке времени Δt являются величинами более высокого порядка малости по сравнению с Δt. Исходя из этого, выражение для $\nu_{в}(t)$ можно переписать в виде

$$\nu_{в}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} P_{в}(t, t + \Delta t)/\Delta t. \tag{1}$$

Входящая в (1) вероятность $P_{в}(t, t + \Delta t)$ появления одного выброса во временном интервале $[t, t + \Delta t]$ представляет собой совместную вероятность двух событий — наличия скачка в $[t, t + \Delta t]$ и пересечения им уровня $x = a$ снизу вверх — и поэтому равна

$$\begin{gathered} P_{в}(t, t + \Delta t) = P_{c}(t, t + \Delta t)\, \mathrm{P}\,\{x(t + \varepsilon \Delta t - 0) < \\ < a,\ x(t + \varepsilon \Delta t + 0) > a\}. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $P_{c}(t, t + \Delta t) = \nu \Delta t + O(\Delta t)$ — вероятность скачка в $[t, t + \Delta t]$, $\mathrm{P}\{...\}$ — вероятность перехода через уровень a снизу вверх, при условии, что в некоторый момент $t + \varepsilon \Delta t$ $(\varepsilon < 1)$ внутри промежутка $[t, t + \Delta t]$ происходит скачок. Подставляя (2) в (1), приходим к следующему выражению для средней частоты выбросов случайного телеграфного процесса за уровень a:

$$\nu_{в}(t) = \nu\, \mathrm{P}\,\{x(t - 0) < a,\ x(t + 0) > a\}. \tag{3}$$

Согласно (3), если всегда $x(t) < a$ или, наоборот, $x(t) > a$, то, как и должно быть, $\nu_{в}(t) = 0$.

2) Перейдем к отысканию вероятностного распределения длительности выбросов. Предположим, что у телеграфного процесса $x(t)$, принимающего внутри интервалов τ_k между соседними скачками постоянные случайные значения x_k, в некоторый момент времени t_0 происходит выброс за уровень $x = a$. Считая момент t_0 новым началом отсчета и опираясь на простые вероятностные рассуждения, запишем выражение для плотности вероятности $w_{в}(\theta)$ времени пребывания процесса $x(t)$ над уровнем $x = a$:

$$\begin{gathered} w_{в}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{\tau 1 + \ldots + \tau n}(\theta)\, \mathrm{P}\{x_2 > a, \ldots, x_n > a, \\ x_{n+1} < a \,|\, x(t_0 - 0) = x_0;\ x(t_0 + 0) = x_1\}. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $w_{\tau 1 + \ldots + \tau n}(\theta)$ — плотность вероятности суперпозиции случайных интервалов $\tau_1, \ldots, \tau_n$ $(\theta \geqslant 0)$; x_0 и x_1 — значения процесса до и после выброса $(x_0 < a,\ x_1 > a)$. В дальнейшем удобнее находить не $w_{в}(\theta)$, а характеристическую функцию длительности выбросов

$$\Phi_{\text{в}}(u) = \langle \exp(ju\theta)\rangle = \int_0^\infty \exp(ju\theta) w_{\text{в}}(\theta)\, d\theta \tag{5}$$

и лишь затем переходить (там, где это возможно) к $w_{\text{в}}(\theta)$.

Введем

$$\Phi(u) = \int_0^\infty \exp(ju\tau)\, w(\tau)\, d\tau$$

— характеристическую функцию случайного промежутка времени между перескоками телеграфного процесса. Подставляя (4) в (5) и учитывая, что, в силу независимости и одинаковой распределенности интервалов τ_k,

$$\langle \exp[ju(\tau_1 + \ldots + \tau_n)]\rangle = \prod_{k=1}^{n} \langle \exp(ju\tau_k)\rangle = \Phi^n(u),$$

получим окончательно

$$\Phi_{\text{в}}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^n(u)\, \mathrm{P}\{x_2 > a, \ldots, x_n > a,\ x_{n+1} < a \mid x(t_0 - 0) = x_0;\ \ x(t_0 + 0) = x_1\}. \tag{6}$$

Соотношения (3), (6) являются основными для дальнейшего анализа.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1) Рассмотрим случайный телеграфный процесс $x(t)$, у которого все значения x_k статистически независимы и одинаково распределены с плотностью вероятности $W(x)$ [3]. В соответствии с (3) средняя частота выбросов такого стационарного процесса равномерна по всей временной оси и равна

$$\nu_{\text{в}} = \nu pq. \tag{7}$$

Здесь $p = \int_{-\infty}^{a} W(x)dx$ и $q = 1 - p$ — вероятности пребывания $x(t)$ под уровнем a и над ним соответственно. Как видно из (7), $\nu_{\text{в}}$ не превышает $\nu/4$ и достигает своего предельного значения лишь при $p = q = 1/2$, когда уровень a совпадает с медианой распределения $W(x)$.

2) В силу независимости значений x_k входящая в (6) условная вероятность распадается на произведение отдельных безусловных вероятностей и соотношение (6) с учетом ранее введенных обозначений принимает вид

$$\Phi_{\text{в}}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^n(u)\, pq^{n-1}. \tag{8}$$

Производя в (8) суммирование бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q\Phi(u)$, приходим к следующему выражению для характеристической функции длительности выбросов стационарного телеграфного процесса:

$$\Phi_{\text{в}}(u) = p\Phi(u)/[1 - q\Phi(u)]. \tag{9}$$

Найденная функция удовлетворяет условию $\Phi_{\text{в}}(0) = 1$.

3) Хотя для произвольного распределения $w(\tau)$ соотношение (9) не обращается по Фурье, из него, тем не менее, можно извлечь информацию о простейших статистических характеристиках длительности выбросов, таких, например, как моменты $\langle \theta^n \rangle$. Опираясь на определение

$$\langle\theta\rangle = \frac{d}{du}\Phi_{\text{в}}(u)\Big|_{u=0},$$

легко установить с помощью (9) связь средней длительности выброса со средним интервалом $\langle\tau\rangle = 1/\nu$ между перескоками телеграфного процесса

$$\langle\theta\rangle = \langle\tau\rangle/p. \tag{10}$$

Как следует из (10), $\langle\theta\rangle$ всегда превосходит $\langle\tau\rangle$.

Аналогичным образом можно показать, что произвольный момент $\langle\theta^n\rangle$ является комбинацией моментов $\langle\tau^k\rangle$ с номерами $k = \overline{1, n}$.

4) В частном случае экспоненциального распределения интервалов τ_k, т. е. при

$$w(\tau) = \nu \exp(-\nu\tau) \quad (\tau \geqslant 0), \tag{11}$$

стационарный поток восстановления, как известно [3], переходит в пуассоновский поток событий, а соответствующий телеграфный процесс становится марковским. Вычисляя соответствующую (11) характеристическую функцию

$$\Phi(u) = \nu/(\nu - ju), \tag{12}$$

подставляя (12) в (9) и осуществляя обратное фурье-преобразование, находим плотность вероятности длительности выбросов марковского телеграфного процесса

$$w_{\text{в}}(\theta) = p\nu \exp(-p\nu\theta).$$

Отметим, что при $\theta \to \infty$ данное распределение убывает экспоненциально, точнее, как $\exp(-p\nu\theta)$.

5) В качестве другого примера рассмотрим телеграфный процесс, перескоки которого происходят строго через заданный промежуток времени (такт) τ_0. Функции $w(\tau)$ и $\Phi(u)$ в этом случае равны

$$w(\tau) = \delta(\tau - \tau_0), \quad \Phi(u) = \exp(ju\tau_0) \tag{13}$$

и распределение длительности выбросов имеет вид

$$w_{\text{в}}(\theta) = p\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}\delta(\theta - n\tau_0).$$

Разумеется, длительность θ является теперь дискретной величиной, однако вероятность значения $\theta = n\tau_0$ при $n \to \infty$ опять убывает по показательному закону, что считается характерным для всех стационарных случайных процессов [8].

3. ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

1) Обратимся теперь к телеграфному процессу с накоплением, принимающему в промежутке длительностью τ_k значение $x_k = x_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_k$, где все ξ_i $(i = \overline{1, k})$ статистически независимы и имеют одинаковое распределение $W_\xi(\xi)$ (x_0 — начальное значение)*.

Как следует из (3), интенсивность выбросов рассматриваемого нестационарного процесса зависит от времени и равна

$$\nu_{\text{в}}(t) = \nu\int_0^{\infty} W_x(a - x, t)\,dx \int_x^{\infty} W_\xi(y)\,dy,$$

* В частном случае пуассоновской статистики перескоков (11) таким процессом, с точки зрения совпадения спектрально-корреляционных характеристик [3], хорошо моделируется непрерывный винеровский процесс (интеграл от белого шума).

где $W_x(x, t)$ — одномоментная плотность вероятности диффузионного процесса.

2) Определим характеристическую функцию длительности выбросов. Для этого преобразуем входящую в (6) условную вероятность

$$P = P\{x_1 + \xi_2 > a, \dots, x_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n > a,$$
$$x_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} < a\}.$$

Воспользовавшись независимостью и одинаковой распределенностью ξ_k и вводя обозначение $a_0 = x_1 - a$ $(a_0 > 0)$, получим

$$P = \int_{-a_0}^{\infty} W_\xi(z_2)\,dz_2 \int_{-a_0-z_2}^{\infty} W_\xi(z_3)\,dz_3 \dots \int_{-a_0-z_2-\dots-z_{n-1}}^{\infty} W_\xi(z_n)\,dz_n \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{-a_0-z_2-\dots-z_n} W_\xi(z_{n+1})\,dz_{n+1}.$$

Производя последовательно замену подынтегральных переменных

$$\left(-a_0 - z_2 = z_2',\ \ z_2' - z_3 = z_3',\ \dots,\ \ z_n' - z_{n+1} = z_{n+1}'\right),$$

получим

$$P = \int_{-\infty}^{0} W_\xi(-a_0 - z_2)\,dz_2 \int_{-\infty}^{0} W_\xi(z_2 - z_3)\,dz_3 \dots \int_{-\infty}^{0} W_\xi(z_{n-1} - z_n)\,dz_n \times$$
$$\times \int_{0}^{\infty} W_\xi(z_n - z_{n+1})\,dz_{n+1}.$$

Подставляя преобразованное выражение для вероятности в (6), имеем

$$\Phi_в(u; -a_0) = \Phi(u) \int_{0}^{\infty} W_\xi(-a_0 - z_1)\,dz_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \Phi^n(u) \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{0} W_\xi(-a_0 - z_2)\,dz_2 \dots \int_{-\infty}^{0} W_\xi(z_{n-1} - z_n)\,dz_n \int_{0}^{\infty} W_\xi(z_n - z_{n+1})\,dz_{n+1}. \tag{14}$$

Соотношение (14) представляет собой решение интегрального уравнения

$$R(x) = \Phi p(x) + \Phi \int_{-\infty}^{0} W_\xi(x - z) R(z)\,dz \tag{15}$$

для $x = -a_0$, записанное в виде итерационного ряда. Здесь для простоты введены следующие обозначения: $R(x) = \Phi_в(u; x)$, $\Phi = \Phi(u)$, $p(x) = \int_{-\infty}^{x} W_\xi(z)\,dz$.

Таким образом, задача отыскания характеристической функции длительности выбросов диффузионного процесса свелась к решению интегрального уравнения (15). Это уравнение относится к классу интегральных уравнений Винера — Хопфа и считается характерной особенностью задач с полубесконечными границами [9].

3) Существует общий метод решения интегральных уравнений типа (15), называемый методом факторизации, связанный с отыскани-

ем областей аналитичности фурье-изображения от функции-ядра $W_\xi(z)$ [9]. Однако для некоторых вероятностных распределений $W_\xi(z)$ удается найти $R(x)$ из (15) без применения указанного сложного метода.

Так, например, в тривиальном случае процесса-константы $W_\xi(z) = \delta(z)$ из (15) вытекает

$$R(-a_0) = \Phi_{\text{в}}(u;\ -a_0) = 0.$$

Полученный результат свидетельствует о том, что длительность выброса равна бесконечности $(\theta = \infty)$.

4) Рассмотрим диффузионный процесс с постоянным шагом b по оси x $(\xi_i = \pm b)$:

$$W_\xi(z) = (1/2)[\delta(z-b) + \delta(z+b)].$$

Учитывая, что величина $a_0 = x_1 - a$ начального превышения уровня a в данном случае не превосходит величины шага b: $0 \leqslant a_0 \leqslant b$, из (15) получаем следующую систему разностных уравнений для $y_k = R(-a_0 - kb)$ $(k = -1, 0, 1, 2, \ldots;\ y_{-1} \equiv 1)$:

$$y_{k+2} - (2/\Phi)y_{k+1} + y_k = 0. \tag{16}$$

Ограниченное (при $k \to \infty$) решение однородной системы (16) при условии $|\Phi| \leqslant 1$ имеет вид

$$y_k = \lambda^{k+1}, \tag{17}$$

где $\lambda = (1 - \sqrt{1-\Phi^2})/\Phi$. Полагая в (17) $k = 0$, определяем искомую характеристическую функцию длительности выбросов шагового диффузионного процесса:

$$\Phi_{\text{в}}(u) = [1 - \sqrt{1-\Phi^2(u)}]/\Phi(u). \tag{18}$$

5) Проанализируем соотношение (18) в частных случаях пуассоновской (11) и тактовой (13) статистики переключений.

а) Подставляя характеристическую функцию (12) в (18), находим плотность вероятности времени пребывания марковского диффузионного телеграфного процесса $x(t)$ над уровнем $x = a$:

$$w_{\text{в}}(\theta) = (1/\theta)\exp(-\nu\theta)I_1(\nu\theta).$$

Здесь и ниже $I_m(\ldots)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода m-го порядка. Учитывая асимптотическое поведение функции I_1 при больших значениях аргумента, легко показать, что распределение $w_{\text{в}}(\theta)$ при $\theta \to \infty$ убывает, как $\theta^{-3/2}$, и, следовательно, все его моменты $\langle\theta^n\rangle = \infty$ $(n = \overline{1, \infty})$.

б) Разлагая входящий в (18) радикал по степеням Φ и подставляя (13), получаем следующее выражение для вероятностного распределения длительности выбросов тактового диффузионного процесса:

$$w_{\text{в}}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\,\delta(\theta - (2n-1)\tau_0).$$

У такого процесса время пребывания над уровнем $x = a$ может составлять лишь нечетное число тактов, что, в общем, очевидно. Вероятность длительности выброса $\theta = (2n-1)\tau_0$ определяется выражением (см. также § 1.2 в [10])

$$P_{2n-1} = \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

С помощью формулы Стирлинга можно показать, что при $\theta\to\infty$ данная вероятность убывает, как $\theta^{-3/2}$.

6) Найдем решение интегрального уравнения (15) для экспоненциального распределения приращений диффузионного процесса:

$$W_\xi(z) = (\alpha/2)\exp(-\alpha|z|).$$

Дифференцируя обе части (15) дважды по x и учитывая, что

$$W_\xi''(z) = \alpha^2 W_\xi(z) - \alpha^2\delta(z),$$

приходим к однородному дифференциальному уравнению второго порядка для $R(x)$ $(x\leqslant 0)$:

$$R''(x) - \alpha^2(1-\Phi)R(x) = 0,$$

ограниченное решение которого при $|\Phi|\leqslant 1$ имеет вид

$$R(x) = R(0)\exp(-\alpha\sqrt{1-\Phi}\,x). \tag{19}$$

Подставляя (19) в (15) и полагая $x=0$, определяем неизвестное значение $R(0)$ и вместе с ним характеристическую функцию длительности выбросов:

$$\Phi_в(u;\ -a_0) = R(-a_0) = (1-\sqrt{1-\Phi(u)})\exp(-\alpha a_0\sqrt{1-\Phi(u)}). \tag{20}$$

Как следует из (20), вероятностное распределение $w_в(\theta)$ длительности выброса скачкообразного диффузионного процесса в общем случае зависит от величины a_0 начального превышения уровня $x=a$. Этим скачкообразный диффузионный процесс отличается от непрерывного.

При увеличении амплитуды начального выброса a_0 вероятность малых длительностей θ уменьшается, а больших, наоборот, возрастает. Из (20) можно показать, например, что в рассматриваемом случае с увеличением a_0 значение $w_в(0)$ уменьшается, как $\exp(-\alpha a_0)$, а величина $w_в(\theta)$ при $\theta\to\infty$ возрастает пропорционально a_0.

Поскольку непрерывный диффузионный процесс плавно пересекает уровень $x=a$, для его адекватного моделирования скачкообразным процессом необходимо положить в (20) $a_0=+0$ и исследовать функцию

$$\Phi_в(u) = 1-\sqrt{1-\Phi(u)}. \tag{21}$$

7) Подставляя (12) либо (13) в (21), находим плотности вероятности длительности выбросов диффузионных процессов с пуассоновской и тактовой статистикой переключений:

$$\begin{aligned} w_в(\theta)_п &= (\nu/2)\exp(-\nu\theta/2)[I_0(\nu\theta/2) - I_1(\nu\theta/2)],\\ w_в(\theta)_т &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\delta(\theta - n\tau_0). \end{aligned} \tag{22}$$

Из (22) по-прежнему следует, что в первом случае $w_в(\theta)$, а во втором вероятность значения $\theta = n\tau_0$ спадают при $\theta\to\infty$, как $\theta^{-3/2}$.

4. АСИМПТОТИКА МАЛЫХ И БОЛЬШИХ ДЛИТЕЛЬНОСТЕЙ ВЫБРОСОВ

В настоящем разделе определяется связь между законом изменения распределения длительности выбросов $w_в(\theta)$ при $\theta\to 0$ и $\theta\to\infty$ и статистическими характеристиками случайных интервалов переключений τ_k телеграфного процесса.

1) Для отыскания значения $w_в(0)$ воспользуемся известной предельной теоремой, связывающей функцию-оригинал с ее изображением по Лапласу:

$$w_в(0) = \lim_{s\to\infty} s\,\Phi_в(js). \tag{23}$$

Исходя из (23), общего соотношения (9) и интегрального уравнения (15), а также учитывая, что характеристические функции $\Phi(js)$ и $\Phi_в(js)$ стремятся к нулю при $s\to\infty$, найдем величину $w_в(0)$ для стационарных и диффузионных телеграфных процессов ($w(0)<\infty$):

$$\begin{aligned} w_в(0)_{ст} &= p w(0), \\ w_в(0)_{д} &= p(-a_0)\,w(0). \end{aligned} \tag{24}$$

Согласно (24), всегда $w_в(0)\leqslant w(0)$, причем у скачкообразного диффузионного процесса, как уже отмечалось ранее, значение плотности вероятности длительности выбросов $w_в(\theta)$ в точке $\theta=0$ зависит от величины a_0 начального превышения уровня $x=a$. В том случае, когда вероятностное распределение $w(\tau)$ интервалов τ_k имеет в нуле бесконечно большое значение, $w_в(0)$ также обращается в бесконечность.

2) Перейдем к исследованию особенностей поведения $w_в(\theta)$ при $\theta\to\infty$ у стационарных и диффузионных процессов.

Выясним условия, необходимые для того, чтобы распределение длительности выбросов $w_в(\theta)$ стационарного телеграфного процесса при больших θ изменялось по экспоненциальному закону:

$$w_в(\theta) \sim e^{-\lambda\theta} \quad \text{при} \quad \theta\to\infty. \tag{25}$$

Для этого обратимся к соотношению (9). Из него видно, что (25) выполняется только в том случае, когда уравнение

$$1 - q\,\Phi(u) = 0$$

имеет простой корень $u=-jv_0$ $(v_0>0)$, или, что то же самое, если выполняется равенство

$$\Phi(-jv_0) \equiv \int\limits_0^\infty w(\tau)\exp(v_0\tau)\,d\tau = q^{-1}. \tag{26}$$

Уравнение (26) имеет решение только для распределения $w(\tau)$, обладающего полным набором моментов

$$\langle\tau^n\rangle \equiv \int\limits_0^\infty \tau^n w(\tau)\,d\tau < \infty \tag{27}$$

при любом конечном n. В этом случае $w_в(\theta)\sim\exp(-v_0\theta)$ при $\theta\to\infty$.

Если условие (27) не выполняется, т. е., например, распределение интервалов τ_k имеет вид

$$w(\tau) \sim \tau^{-(1+\beta)} \quad \text{при} \quad \tau\to\infty, \tag{28}$$

где $\beta>0$, то асимптотика распределения длительности выбросов аналогична (28):

$$w_в(\theta) \sim \theta^{-(1+\beta)} \quad \text{при} \quad \theta\to\infty.$$

3) При рассмотрении диффузионных процессов воспользуемся тем обстоятельством, что о поведении функции $w_в(\theta)$ при $\theta\to\infty$ можно судить по поведению ее изображения по Лапласу $\Phi_в(js)$ при $s\to0$. Для телеграфного процесса, имеющего конечный средний интервал $\langle\tau\rangle$

между переключениями, преобразование по Лапласу $\Phi(js)$ от распределения $w(\tau)$ при $s \to 0$ ведет себя как

$$\Phi(js) = \langle \exp(-s\tau) \rangle \approx 1 - s\langle\tau\rangle.$$

Подставляя это выражение в (18) и (21), находим

$$\Phi_в(js) = 1 - \sqrt{As\langle\tau\rangle} \quad \text{при} \quad s \to 0, \tag{29}$$

где A — некоторая константа ($A = 2$ для шагового диффузионного процесса, $A = 1$ для диффузионного процесса с экспоненциально распределенными приращениями). Из (29) автоматически вытекает, что плотность вероятности длительности выбросов

$$w_в(\theta) \sim \theta^{-3/2} \quad \text{при} \quad \theta \to \infty.$$

В том случае, когда $\langle\tau\rangle = \infty$ и, следовательно, распределение интервалов $w(\tau)$ имеет вид

$$w(\tau) \sim \tau^{-(1+\gamma)} \quad \text{при} \quad \tau \to \infty \quad (0 < \gamma \leqslant 1),$$

аналогичным образом можно показать, что при $\theta \to \infty$

$$w_в(\theta) \sim \begin{cases} \theta^{-(1+\gamma/2)} & (0 < \gamma < 1) \\ \theta^{-3/2}\sqrt{\ln\theta} & (\gamma = 1) \end{cases}. \tag{30}$$

Как видно из (30), «хвосты» распределения $w_в(\theta)$ спадают при этом медленнее, чем $\theta^{-3/2}$.

Полученные выше результаты справедливы для диффузионных процессов как с дискретным, так и с непрерывным распределением значений ξ_k и поэтому могут считаться универсальными. Из них следует, что все моменты случайной длительности выброса $\langle\theta^n\rangle$ $(n = \overline{1, \infty})$, и, в частности, среднее значение $\langle\theta\rangle$ обращаются в бесконечность. Таким образом, диффузионные процессы в среднем на исходный уровень не возвращаются, а возвращаются лишь по вероятности. Это, на первый взгляд, странное обстоятельство можно объяснить, допустив у таких процессов наличие расходящихся реализаций.

В настоящей работе рассмотрена задача определения вероятностного распределения $w_в(\theta)$ (либо характеристической функции) длительности выбросов случайного телеграфного процесса, моменты перескоков которого образуют стационарный поток восстановления.

Для стационарного случайного процесса данная задача решена полностью. При рассмотрении диффузионных процессов задачу удалось свести к решению интегрального уравнения типа Винера — Хопфа. Приведены результаты для некоторых конкретных процессов.

Исследовано асимптотическое поведение распределения длительности выбросов при больших значениях аргумента. Показано, что известный экспоненциальный закон спадания $w_в(\theta)$ наблюдается, лишь когда все моменты распределения интервалов $w(\tau)$ имеют конечное значение, т. е. выполняется условие (27), а сам процесс является стационарным. Если же процесс имеет диффузионный характер и $\langle\tau\rangle < \infty$, то при $\theta \to \infty$ плотность вероятности $w_в(\theta)$ спадает, как $\theta^{-3/2}$.

Получены также результаты для распределений $w(\tau)$, не обладающих полным набором моментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. — М: Наука, 1970.
2. Фомин Я. А. Теория выбросов случайных процессов. — М.: Связь, 1980.
3. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М: Сов. радио, 1966. — Т. 1.
5. Лифшиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. — М.: Сов. радио, 1963
6. Казаков В. А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. — М.: Сов. радио, 1973.
7. Якимов А. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 2, с. 238.
8. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. — ЖТФ, 1954, **24**, вып. 1, с. 103.
9. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975.
10. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. / Перевод с англ. — М.: Мир, 1968.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 11 июня 1980 г.

EXCURSION TIME DISTRIBUTION OF SOME RANDOM TELEGRAPHIC PROCESSES

A. A. Dubkov, A. V. Yakimov

The problem of determining of the excursion time distribution (and / or characteristic function) of the random telegraphic process, switching moments of which represent the stationary restoration flux, is considered. For the stationary process having arbitrary distribution along x-axis this problem is solved completely. If the diffusion process (having stationary arbitrary distributed increments) is considered, the problem is led to the solution of the integral equation of Winer—Hopf kind. Results for some real processes are given and the excursion time distribution asymptotics for small and large arguments is investigated