ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 9 *РАДИОФИЗИКА* *1981*

УДК 621.373.826

ВЛИЯНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЫ НА КАЧЕСТВО ГОЛОГРАФИЧЕСКОГО ВИДЕНИЯ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ПОДСВЕТЕ ОБЪЕКТА

В. Т. Дымшиц

Введен показатель качества голографического видения и теоретически исследована его зависимость от характеристик сред с флуктуациями коэффициента преломления, описываемыми моделью Колмогорова — Обухова.

Результаты теоретического анализа качества голограмм, получаемых при импульсном подсвете через случайную оптически-неоднородную среду, приведены в [1]. Однако эти результаты относятся к средам, воздействие которых на прошедшие электромагнитные волны характеризуется гауссовой корреляционной функцией фазы волны. В настоящей работе получены оценки влияния на качество голографического видения, осуществляемого при указанных выше условиях, сред с локально-изотропными флуктуациями коэффициента преломления (типа турбулентной атмосферы Земли [2]).

Приступая к анализу качества голографического видения, будем исходить, следуя [1], из пространственных характеристик распределения интенсивности света в восстановленном изображении каждого элементарного (точечного) вторичного излучателя, которые, складываясь, образуют голографическое изображение всего объекта. При этом предполагается, что формирование голографического изображения производится с помощью линейной относительно комплексной амплитуды пространственно-инвариантной (изопланарной) системы. Поскольку рассматривается случай, когда длительность экспозиции при регистрации голограммы существенно меньше времени «замороженности» флуктуаций преломляющих свойств среды, то искажение пространственного распределения поля такого излучателя у поверхности голограммы, а в конечном итоге и ухудшение восстанавливаемого по голограмме изображения, можно считать зависящим только от пространственных характеристик указанных флуктуаций. В рассматриваемых условиях комплексную амплитуду поля вторичного точечного излучателя $U_г$ у голограммы можно представить в виде* [2]

$$U_г(\xi) = \exp[\Phi(\xi)] = \exp[\chi(\xi) + i\varphi(\xi)], \qquad (1)$$

где $\chi(\xi) = \ln A(\xi)$, $A(\xi)$ — действительная амплитуда, $\varphi(\xi)$ — фаза поля $U_г$ в точке ξ, принадлежащей голограмме. Для простоты полагаем, что в отсутствие турбулентности $A(\xi) = \mathrm{const} = 1$ (в выбранной системе единиц). Случайные двумерные поля $\chi(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ будем считать нормальными и изотропными [2].

---

* Использование скалярной модели основывается на предположении о малости эффектов деполяризации под действием турбулентности (см., например, [7]).

Распределение интенсивности света в плоскости восстановленного изображения указанного излучателя с точностью до несущественного постоянного коэффициента можно записать в виде

$$I_{\text{и}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda^2(r^2+F^2)} \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \exp\left[\Phi(\xi_1) + \Phi^*(\xi_2)\right] \times \\ \times \exp\left[\frac{ik}{F}\boldsymbol{r}(\xi_1 - \xi_2)\right] d\xi_1 d\xi_2, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки в плоскости изображения, Ω — область голограммы, просвечиваемая при восстановлении, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны (которая предполагается одной и той же и при записи, и при восстановлении), F — параметр, зависящий от конкретной схемы восстановления, символ * означает комплексное сопряжение.

Качество голографического видения будем оценивать с помощью показателя, определяемого выражением

$$M = 1/\pi r^2_{\text{эфф}} = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{\text{и}}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r} / I_{\text{и}}(\boldsymbol{r}_{\text{c}})\right]^{-1}, \tag{3}$$

где $r_{\text{эфф}}$ — эффективный радиус пятна изображения точечного объекта, а $\boldsymbol{r}_{\text{c}}$ — радиус-вектор центра тяжести распределения $I_{\text{и}}(\boldsymbol{r})$, т. е.

$$\boldsymbol{r}_{\text{c}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{\text{и}}(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{r} \Bigg/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{\text{и}}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}. \tag{4}$$

Поскольку при каждом наблюдении на голограмме будет регистрироваться только одна из реализаций случайного поля $U_{\text{г}}(\xi)$, то величина M будет случайным образом изменяться от наблюдения к наблюдению. Простейшей статистической характеристикой случайной величины M является ее среднее значение, получаемое путем усреднения M по ансамблю реализаций случайного поля $\Phi(\xi)$; в дальнейшем это усреднение обозначается чертой сверху.

Перейдем к вычислению $\overline{M}$. Прежде всего, рассматривая интеграл в числителе выражения (4), заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{\text{и}}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r} = \int\limits_{\Omega} |U_{\text{г}}(\xi)|^2\, d\xi. \tag{5}$$

Далее отметим, что усреднение, производимое в правой части выражения (3), может быть упрощено при определенных условиях, накладываемых на соотношение между характерным линейным размером l области Ω (т. е. апертуры голограммы) и радиусом корреляции пространственного распределения величины $|U_{\text{г}}(\xi)|^2\, r_{\text{к}}$.

Так, если выполняется условие

$$r_{\text{к}} \ll l, \tag{6}$$

то можно считать, что вследствие заметного эффекта усреднения по апертуре [2]

$$\int\limits_{\Omega} |U_{\text{г}}(\xi)|^2\, d\xi \approx S, \tag{7}$$

где S — площадь апертуры голограммы.

В результате усреднения выражения (3) с учетом (5) и (7) получим

$$\overline{M_1} = \overline{I_{\text{и}1}(\boldsymbol{r}_{\text{c}})}/S, \quad r_{\text{к}} \ll l. \tag{8}$$

При выводе выражения для $\overline{I_{и1}(\boldsymbol{r}_с)}$ учтем, что положение центра тяжести распределения $I_и(\boldsymbol{r})$ определяется в основном средним по апертуре голограммы наклоном волнового фронта как целого, причем в фазовом приближении (см., например, [2]) вектор $\boldsymbol{r}_с$ связан с фазой φ линейным преобразованием. Поэтому относительно статистических свойств случайного вектора $\boldsymbol{r}_с$ можно сделать, учитывая также нормальность и изотропность случайных полей $\chi(\xi)$ и $\varphi(\xi)$, следующие предположения (в некотором смысле аналогичные используемым в [3]). Во-первых, вектор $\boldsymbol{r}_с$ является гауссовым и изотропным. Во-вторых, случайные величины $[\varphi(\xi) - kF^{-1}\boldsymbol{r}_с\xi]$ и $\boldsymbol{r}_с\xi$ — статистически независимы. В-третьих, случайные величины $\{[\varphi(\xi_1) - kF^{-1}\boldsymbol{r}_с\xi_1] - [\varphi(\xi_2) - kF^{-1}\boldsymbol{r}_с\xi_2]\}$ и $[\chi(\xi_1) + \chi(\xi_2)]$ — также статистически независимы.

Усреднение выражения (2) при $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_с$ с учетом вышеперечисленных предположений и статистических свойств случайного поля $\Phi(\xi)$ дает

$$\overline{I_{и1}(\boldsymbol{r}_с)} = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[D_1(|\xi_1 - \xi_2|) - \frac{k^2}{2F^2}\overline{r_с^2}(\xi_1 - \xi_2)\right]\right\} d\xi_1\, d\xi_2, \tag{9}$$

где $D_1(|\xi_1 - \xi_2|) = \overline{[\Phi(\xi_1) + \Phi^*(\xi_2)]}$. При записи выражения (9) предполагалось также, что $\overline{r_с^2} \ll F^2$.

Если же выполняется условие

$$r_к \gg l, \tag{10}$$

то можно считать, что

$$\chi(\xi) \approx \mathrm{const}, \quad \xi \in \Omega. \tag{11}$$

В таком случае, усредняя выражение (3), получим

$$\overline{M}_2 = \overline{I_{и2}(\boldsymbol{r}_с)}/S, \qquad r_к \gg l, \tag{12}$$

Вычисление величины $\overline{I_{и2}(\boldsymbol{r}_с)}$ путем усреднения выражения (2) с учетом соотношения (11) и предположений, аналогичных сделанным при записи выражения (9), дает

$$\overline{I_{и2}(\boldsymbol{r}_с)} = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[D_2(|\xi_1 - \xi_2|) - \frac{k^2}{2F^2}\overline{r_с^2}(\xi_1 - \xi_2)^2\right]\right\} d\xi_1\, d\xi_2, \tag{13}$$

где $D_2(|\xi_1 - \xi_2|) = \overline{[\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)]}$.

Для расчета величины среднего квадрата флуктуаций (от наблюдения к наблюдению) центра тяжести изображения $\overline{r_с^2}$, входящей в выражения (9) и (13), можно очевидным образом воспользоваться результатами, приведенными в [2], поэтому мы на нем останавливаться не будем.

Применим полученные выше формулы к анализу качества голографического видения при импульсном подсвете объекта через турбулентную среду, флуктуации коэффициента преломления n которой описываются теорией Колмогорова — Обухова [2]. Сначала оценим величину $r_к$, задавая ее как значение величины $|\xi_1 - \xi_2|$, при котором ковариационная функция величины $|U_г(\xi)|^2$ первый раз обращается в нуль.

Из результатов, полученных в [4] для сферической волны, следует, что

$$r_{\text{к}} = 1{,}8\sqrt{\lambda L}, \qquad (14)$$

где L — расстояние между рассматриваемым вторичным источником и плоскостью голограммы, причем и источник, и голограмма предполагаются находящимися в случайно-неоднородной среде.

Выражения для структурных функций $D_1(\rho)$ и $D_2(\rho)$, соответствующие условиям (6) и (10), с учетом (15) можно записать в виде [3, 5]

$$D_1(\rho) = 6{,}88\,(\rho/r_0)^{5/3}, \quad L_0 \gg \rho \gg \sqrt{\lambda L}; \qquad (15)$$

$$D_2(\rho) = 3{,}44\,(\rho/r_0)^{5/3}, \quad l_0 \ll \rho \ll \sqrt{\lambda L}, \qquad (16)$$

где $\rho = |\xi_1 - \xi_2|$, а l_0 и L_0 — так называемые «внутренний» и «внешний» масштабы турбулентности соответственно [2]. Параметр r_0, входящий в выражения (15) и (16), часто используется при описании влияния атмосферной турбулентности на системы, чувствительные к искажениям волнового фронта (астрономические телескопы, лазерная связь и т. п.). Величина r_0 зависит от значений λ, L и от величины и распределения вдоль трассы структурной постоянной флуктуаций коэффициента преломления C_n^2 [5].

Теперь расчетная формула для величины $\overline{M}_{1,2}$ при круглой апертуре голограммы, диаметр которой равен B, будет иметь вид

$$\overline{M}_{1,2} = 4B^2\, W_{1,2}(B/r_0)/\lambda^2 F^2. \qquad (17)$$

Функция $W_{1,2}(B/r_0)$ задается выражением

$$W_{1,2}(B/r_0) = \int_0^1 [\arccos z - z\sqrt{1-z^2}] \times \exp[-\alpha_{1,2}(Bz/r_0)^{5/3}(1 - 0{,}97\,z^{1/3})]\,z\,dz, \qquad (18)$$

где $\alpha_1 = 3{,}44$, $\alpha_2 = 1{,}72$.

На рис. 1 показаны зависимости величины $M_{\theta_{1,2}} = \overline{M}_{1,2}F^2$ от величины $d = B/\lambda$ при различных значениях параметра $\Lambda = r_0/\lambda$, рассчитанные с помощью формул (17), (18). Для сравнения на этом же рисунке показана зависимость $M_{\theta_0}(d)$ в отсутствие турбулентной среды (т. е. при $\Lambda \to \infty$). Из рис. 1 видно, что при наличии турбулентной среды величина показателя качества $M_{\theta_{1,2}}$ (кривые 1 — $\lg M_{\theta_1}$, кривые 2 — $\lg M_{\theta_2}$) не может быть выше некоторого предельного значения $M_{\theta_{\text{пр}1,2}}$, которому соответствует «оптимальный» диаметр апертуры голограммы $B_{\text{опт}\,1,2}$. Значения $M_{\theta_{\text{пр}1,2}}$ и $B_{\text{опт}\,1,2}$ могут быть оценены с помощью следующих простых выражений:

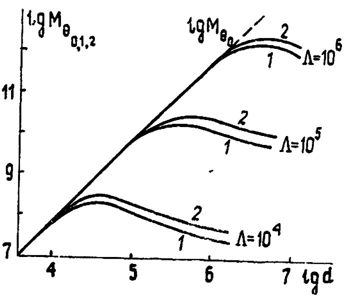

Рис. 1.

$$M_{\theta_{\text{пр}1,2}} \approx m_{1,2}\Lambda^2, \qquad (19)$$

где $m_1 = 2{,}32$, $m_2 = 5{,}52$;

$$B_{\text{опт}\,1,2} \approx g_{1,2}\lambda\Lambda, \qquad (20)$$

где $g_1 = 3{,}5$, $g_2 = 5$.

В качестве примера в табл. 1 приведены значения величин Λ, $B_{\text{опт}}$ и $M_{\theta_{\text{пр}}}$, рассчитанные с помощью формул (19), (20) для случая, когда трасса распространения рассеянного объектом излучения проходит горизонтально в атмосфере Земли, а объект находится на расстоянии $L_1 = 100$ *м* и $L_2 = 1000$ *м*. Величина C_n^2 взята равной $5 \cdot 10^{-15}$ $м^{-2/3}$, что соответствует средним ночным условиям для высоты в несколько метров над поверхностью Земли [6]. Расчеты проведены для длин волн $\lambda_1 = 0{,}6943$ *мкм* (излучение рубинового лазера) и $\lambda_2 = 0{,}8446$ *мкм* (излучение GaAs-лазера). Заметим, что если принять величину $r_{\text{эфф}} F^{-1}$ за меру угловой разрешающей способности голограмм, то величина $M_{\theta_{1,2}}$ может быть интерпретирована как отнесенное к телесному углу 1 *ср* среднее число элементов разрешения на объекте, которые могут быть разрешены по его голографическому изображению, а величина $\sqrt{\pi M_{\theta_{1,2}}}$ — как среднеквадратичное значение угловой разрешающей силы голограммы.

Таблица 1

L, *км*	Характеристика	λ, *мкм*	
		0,6943	0,8446
0,1	Λ	$4{,}61 \cdot 10^5$	$4{,}81 \cdot 10^5$
	$M_{\theta_{\text{пр}1}}$	$4{,}9 \cdot 10^{11}$	$5{,}4 \cdot 10^{11}$
	$B_{\text{опт}1}$, *м*	1,12	1,42
1	Λ	$1{,}18 \cdot 10^5$	$1{,}23 \cdot 10^5$
	$M_{\theta_{\text{пр}1}}$	$3{,}2 \cdot 10^{10}$	$3{,}5 \cdot 10^{10}$
	$B_{\text{опт}1}$, *м*	0,29	0,36

Полученные в настоящей работе результаты могут быть использованы при обосновании требований к голографическим устройствам, предназначенным для получения изображений объектов через турбулентную среду.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакут П. А., Свиридов К. Н., Троицкий И. Н. — В сб.: Проблемы голографии. — М.: 1975, вып. 5, с. 25.
2. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
3. Fried D. L. — J. Opt. Soc. Amer., 1966, 56, № 10, p. 1372.
4. Fried D. L. — J. Opt. Soc. Amer., 1967, 57, № 2, p. 175.
5. Фрид Д. — ТИИЭР, 1967, 55, № 1, с. 62.
6. Брукнер Е. — Зарубежная радиоэлектроника, 1971, № 9, с. 26.
7. Prade B. — Rev. CETHEDES, 1974, 11, № 40, p. 1.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию 21 марта 1980 г., после доработки 3 февраля 1981 г.

AN EFFECT OF THE TURBULENT MEDIUM ON THE QUALITY OF HOLOGRAPHIC VISION AT THE IMPULSE ILLUMINATION OF THE OBJECT

V. T. Dymshits

An index of the quality of the holographic vision is introduced and its dependence on the characteristics of media with fluctuations of the refraction coefficient described by Kolmogorov—Obukhov model is investigated.