

УДК 551.525.3 : 535.36

## УРАВНЕНИЕ ЛАЗЕРНОЙ ЛОКАЦИИ В МАЛОУГЛОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

*В. А. Коршунов*

Известное в теории переноса излучения малоугловое приближение используется для решения задачи об обратном рассеянии при импульсном зондировании оптически неоднородной вдоль трассы зондирования среды. Проанализирована зависимость вклада многократного рассеяния от характерных параметров задачи. Получены простые соотношения, описывающие предельные случаи очень малых углов приема и сильно вытянутых индикатрис рассеяния.

Для модели облака С-1 проведены численные расчеты, результаты которых сравниваются с аналогичными данными, полученными в приближении двукратного рассеяния и методом Монте-Карло. Сделан вывод о том, что методика, основанная на малоугловом приближении, применима для количественной оценки сигналов обратного рассеяния.

При расчете сигналов обратного рассеяния от оптически плотных аэрозольных сред необходимо учитывать эффекты многократного рассеяния. В настоящее время для этой цели чаще всего используется численное моделирование процесса переноса излучения методом Монте-Карло. Наряду с известными преимуществами данный метод имеет и недостатки, среди которых следует отметить возможное смещение оценок, возникающее при уменьшении угла поля зрения приемника и увеличении степени вытянутости индикатрисы рассеяния [1]. В этих случаях целесообразно применение приближенных аналитических методов расчета многократного рассеяния. Достоинством таких методов является также возможность более полного исследования роли различных факторов, влияющих на формирование обратного рассеяния.

Одним из возможных аналитических путей решения задачи является учет рассеяния второй кратности [2]. Однако исследование пределов его применимости показало [3], что ограничиться приближением только двукратного рассеяния можно лишь для очень узких углов поля зрения приемника или для оптических глубин, меньших единицы.

В ряде работ для сред с сильно анизотропными индикатрисами рассеяния обратное рассеяние находилось на основе решения уравнения переноса в малоугловом приближении [4-7]. При этом предполагалась либо оптическая неоднородность среды, либо изотропность индикатрисы рассеяния вблизи направления назад.

В данной работе в малоугловом приближении решается задача о расчете обратного рассеяния для общего случая оптически неоднородной вдоль трассы зондирования среды с учетом поведения индикатрисы рассеяния вблизи направлений вперед и назад. На примере зондирования однородной полубесконечной среды рассмотрены некоторые закономерности формирования обратного рассеяния. Проведены численные расчеты, результаты которых сопоставляются с данными, полученными в приближении двукратного рассеяния и методом Монте-Карло.

## ВЫВОД ОБЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Пусть в плоскости  $z = 0$  системы координат  $(x, y, z)$  расположен коллимированный источник, излучающий короткий световой импульс в положительном направлении оси  $z$ . В полупространстве  $z \geq 0$  находится рассеивающая среда с неоднородными вдоль оси  $z$  оптическими характеристиками и имеющая анизотропную индикатрису рассеяния. Необходимо найти интенсивность обратно рассеянного излучения в плоскости  $z = 0$  в окрестности источника.

Распространение излучения коллимированного источника в направлении вперед будем описывать в малоугловом приближении, при этом в силу сильной анизотропии индикатрисы рассеяния влиянием обратного рассеяния на процесс распространения можно пренебречь. Так как источник является импульсным, то излучение распространяется в виде светового пакета, локализованного вдоль оси  $z$  и постепенно расплывающегося в поперечном направлении (как известно, расплывание пакета вдоль оси  $z$  мало и в первом приближении его можно не учитывать [8]). Возникновение обратного рассеяния можно рассматривать как действие импульсных источников, распределенных в пространстве и излучающих в момент прохождения вперед основного светового пакета. Действие этих источников разделено во времени, и процесс распространения их излучения может рассматриваться независимо. При этом для его описания также может использоваться малоугловое приближение, если приемник излучения, расположенный в плоскости  $z = 0$ , имеет малый угол поля зрения [4].

Без ограничения общности излучаемый источником импульс далее будем считать  $\delta$ -образным во времени, так как для импульсов конечной длительности решение находится с помощью операции свертки. (Однако при выводе уравнений для получения правильной размерности ему условно будет приписана длительность  $\Delta t$ .)

Следуя [9], будем использовать уравнение переноса в малоугловом приближении для фурье-образа  $F(\mathbf{k}, z, p)$  интенсивности излучения  $I(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}_\perp)$  ( $\mathbf{r}_\perp$  — вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной направлению распространения,  $\mathbf{n}_\perp$  — проекция на эту плоскость единичного вектора  $\mathbf{n}$ ). Решение этого уравнения в случае неоднородной вдоль направления распространения излучения среды находится методом характеристик и имеет вид [10]

$$F(\mathbf{k}, z, p) = P_0 F_s(\mathbf{k}, 0, p + \mathbf{k}z) \exp \left[ - \int_0^z \varepsilon(\eta) d\eta + 2\pi \int_0^z \sigma(\eta) q(|\mathbf{p} + \mathbf{k}(z - \eta)|, \eta) d\eta \right], \quad (1)$$

где  $P_0$  — мощность источника излучения,  $F_s(\mathbf{k}, 0, p)$  — спектр интенсивности источника излучения, деленный на  $P_0$ ,  $\varepsilon(z)$  — показатель ослабления,  $\sigma(z)$  — показатель рассеяния,  $q(p)$  — преобразование Ганкеля от малоугловой индикатрисы рассеяния  $g(\gamma)$ .

Зададим  $g(\gamma)$  следующим образом. При  $\gamma < \gamma_0 < \pi/3$   $g(\gamma) = G(\gamma)/4\pi$ , где  $G(\gamma)$  — индикатриса рассеяния; при  $\gamma > \gamma_0$   $g(\gamma)$  определяется так, чтобы она быстро стремилась к нулю при увеличении  $\gamma$  и при этом выполнялось условие

$$\theta = 2\pi q(0) = 2\pi \int_0^\infty g(\gamma) \gamma d\gamma \leq 1.$$

Величина  $\theta$  характеризует долю излучения, рассеивающегося в малые углы вблизи направления вперед.

Интенсивность источников обратного рассеяния определяется выражением

$$I_{s\pi}(\mathbf{r}_{\perp}, z, \mathbf{n}_{\perp}) = \sigma(z) V_p \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{r}_{\perp}, z, \mathbf{m}_{\perp}) g_{\pi}(\mathbf{n}_{\perp} + \mathbf{m}_{\perp}) d^2 m_{\perp}, \quad (2)$$

где  $I(\mathbf{r}_{\perp}, z, \mathbf{m}_{\perp})$  — интенсивность излучения, распространяющегося вперед;  $|\mathbf{n}_{\perp}| \ll 1$ ,  $|\mathbf{m}_{\perp}| \ll 1$ ,  $n_z \approx -1$ ,  $m_z \approx 1$ ;  $V_p$  — длина рассеивающего слоя, зависящая от формы и длительности импульса (для прямоугольного во времени импульса  $V_p = c \Delta t/2$ , где  $c$  — скорость света);  $g_{\pi}(\gamma)$  вводится аналогично  $g(\gamma)$ :  $g_{\pi}(\gamma) = G(\pi - \gamma)/4\pi$  при  $\gamma < \gamma_0$ ;  $g_{\pi}(\gamma) \rightarrow 0$  при  $\gamma \rightarrow \infty$ .

Применяя к (2) преобразование Фурье по переменным  $\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{n}_{\perp}$ , находим спектр источников обратного рассеяния в плоскости  $z$ :

$$F_{s\pi}(\mathbf{k}, z, \mathbf{p}) = \hat{F}(\mathbf{k}, z, -\mathbf{p}) 2\pi\sigma(z) q_{\pi}(\mathbf{p}, z) V_p. \quad (3)$$

Подставив  $F(\mathbf{k}, z, -\mathbf{p})$  из (1) в (3), получим

$$F_{s\pi}(\mathbf{k}, z, \mathbf{p}) = cE\pi\sigma(z) q_{\pi}(\mathbf{p}, z) F_s(\mathbf{k}, 0, -\mathbf{p} + \mathbf{k}z) \times \\ \times \exp \left[ - \int_0^z \varepsilon(\eta) d\eta + 2\pi \int_0^z \sigma(\eta) q(|-\mathbf{p} + (z - \eta)\mathbf{k}|, \eta) d\eta \right], \quad (4)$$

где  $E = P_0 \Delta t$  — энергия импульса излучения.

Применим теперь снова решение (1), но на этот раз для описания распространения в обратном направлении, и найдем спектр интенсивности излучения, достигшего плоскости  $z = 0$ :

$$F_{\pi}(\mathbf{k}, z, \mathbf{p}) = cE\pi\sigma(z) q_{\pi}(|\mathbf{p} + \mathbf{k}z|, z) F_s(\mathbf{k}, 0, -\mathbf{p}) \times \\ \times \exp \left[ - 2 \int_0^z \varepsilon(\eta) d\eta + 4\pi \int_0^z \sigma(\eta) q(|\mathbf{p} + \mathbf{k}\eta|, \eta) d\eta \right]. \quad (5)$$

(Аргумент  $z$  в  $F_{\pi}(\mathbf{k}, z, \mathbf{p})$  относится не к точке наблюдения, а к положению источника обратного рассеяния.)

Выражение (5) в общем виде определяет связь обратно рассеянного излучения с оптическими характеристиками среды, поэтому его можно назвать уравнением лазерной локации в малоугловом приближении.

Перейдем теперь к исследованию (5) для частного, но часто встречающегося в лазерном зондировании случая геометрии эксперимента, когда источник излучения и приемник можно считать точечными и совмещенными. Без ограничения общности их можно поместить в начало координат. Будем также считать, что диаграмма направленности источника имеет азимутальную симметрию. Тогда интенсивность источника

$$I_s(\mathbf{r}, 0, \alpha) = \delta(\mathbf{r}) \Lambda(\alpha) P_0, \quad (6)$$

где  $\delta(\mathbf{r})$  — двумерная дельта-функция. Соответственно спектр интенсивности источника, деленный на  $P_0$ ,

$$F_s(\mathbf{k}, 0, \mathbf{p}) = \frac{\Omega(\mathbf{p})}{2\pi}, \quad \Omega(\mathbf{p}) = \int_0^{\infty} J_0(p\alpha) \Lambda(\alpha) \alpha d\alpha. \quad (7)$$

Найдем интенсивность обратно рассеянного излучения в начале координат  $I_{\pi}(\beta, z)$ . Ее фурье-образ по угловым переменным  $F_{\pi}(\mathbf{p}, z)$  связан с  $F_{\pi}(\mathbf{k}, z, \mathbf{p})$  обратным преобразованием Фурье по переменной  $\mathbf{k}$ :

$$F_{\pi}(\mathbf{p}, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\pi}(\mathbf{k}, z, \mathbf{p}) d^2 k. \quad (8)$$

Подставляя (5) в (8) и учитывая (7), получим

$$F_{\pi}(p, z) = \frac{cE}{4\pi} \sigma(z) \Omega(p) \exp\left(-2 \int_0^z \varepsilon(\eta) d\eta\right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2k q_{\pi}(|p + kz|, z) \exp\left[4\pi \int_0^z \sigma(\eta) q(|p + k\eta|, \eta) d\eta\right].$$

Сделаем в двойном интеграле замену переменных  $p' = p + kz$  и перейдем к полярным координатам по переменной  $p'$ , причем полярный угол будем отсчитывать от направления вектора  $p$ . В результате получим

$$F_{\pi}(p, z) = I_{\pi 1}(z) \Omega(p) H_1(p, z); \quad (9)$$

$$I_{\pi 1}(z) = \frac{1}{2z^2} cE \sigma(z) g_{\pi}(0, z) \exp\left(-2 \int_0^z \varepsilon(\eta) d\eta\right); \quad (10)$$

$$H_1(p, z) = \frac{1}{\pi g_{\pi}(0, z)} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dp' q_{\pi}(p', z) p' H(p, p', \varphi, z); \quad (11)$$

$$H(p, p', \varphi, z) = \exp\left[4\pi \int_0^z \sigma(\eta) q\left(\left|p\left(1 - \frac{\eta}{z}\right) + p' \frac{\eta}{z}\right|, \eta\right) d\eta\right]. \quad (12)$$

Интенсивность находится теперь с помощью преобразования Ганкеля:

$$I_{\pi}(\beta, z) = I_{\pi 1}(z) \int_0^{\infty} J_0(p\beta) \Omega(p) H_1(p, z) p dp. \quad (13)$$

Отметим, что определяемая (10) и входящая в (9) и (13) величина  $I_{\pi 1}(z)$  представляет собой интенсивность обратно рассеянного излучения в приближении однократного рассеяния.

Если источник является мононаправленным и излучающим вдоль оси  $z$ , то  $\Omega(p) = 1/2\pi$  и

$$I_{\pi}(\beta, z) = I_{\pi 1}(z) \left[ \delta(\beta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(p\beta) (H_1(p, z) - 1) p dp \right]. \quad (14)$$

Первый член суммы в (14) описывает однократное рассеяние, второй обусловлен многократным рассеянием.

Чтобы найти мощность излучения  $P(z)$ , поступающего на детектор, необходимо проинтегрировать  $I_{\pi}(\beta, z)$  по угловой приемной апертуре и умножить на площадь пространственной апертуры. Для распространяющегося случая круглой диафрагмы поля зрения из (13) находим

$$P(z) = 2\pi\alpha P_1(z) \int_0^{\infty} J_1(p\alpha) \Omega(p) H_1(p, z) p dp, \quad (15)$$

где  $\alpha$  — радиус угловой апертуры,  $P_1(z)$  — мощность излучения в приближении однократного рассеяния.

Применим теперь полученные соотношения для случая зондирования однородной полубесконечной среды. Рассмотрение этого примера позволит выявить некоторые характерные закономерности формирования локационного сигнала при наличии процессов многократного рассеяния.

СЛУЧАЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Пусть граница однородной полубесконечной среды находится на расстоянии  $z_n \geq 0$  от плоскости  $z = 0$ . Тогда после ряда преобразований из (11), (12) и (15) получим

$$P(\tau) = 2\pi P_1(\tau) \tau_d \int_0^{\infty} J_1(\tau_d p) \Omega(\tau_0 p) H_1(p, \tau, \tau_0) dp; \quad (16)$$

$$H(p, p', \varphi, \tau) = \exp \left\{ 4\pi\tau \int_0^1 q \left( \frac{\tau_0}{\tau + \tau_0} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sqrt{p'^2 \left[ 1 + (1-y) \frac{\tau}{\tau_0} \right]^2 + p^2 y^2 \tau^2 + 2pp'\tau \left[ 1 + (1-y) \frac{\tau}{\tau_0} \right] y \cos \varphi} \right) dy \right\}, \quad (17)$$

где введены характеристические параметры  $\tau = (z - z_n) \sigma$ ,  $\tau_d = \alpha z_n \sigma$  и  $\tau_0 = z_n \sigma$ . Последние два параметра не зависят от оптической толщины  $\tau$  и характеризуют геометрию эксперимента.

Представляет интерес предельный случай схемы эксперимента, который реализуется при мононаправленном источнике и при  $\tau_0 \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ , так что  $\tau_d = \text{const}$ . При этом увеличение  $\tau_0$  может происходить либо за счет удаления среды, либо путем увеличения показателя рассеяния  $\sigma$  при  $z_n \neq 0$ . Этот случай отличается тем, что объем рассеивающей среды, попадающий в поле зрения приемника и являющийся, вообще говоря, усеченным конусом, в данной схеме эксперимента на протяжении ограниченного, но достаточно большого диапазона оптических толщин представляет собой цилиндр. Переходя к пределу при  $\tau_0 \rightarrow \infty$  в (17), получим

$$H_{\infty}(p, p', \varphi, \tau) = \\ = \exp \left[ 4\pi\tau \int_0^1 q \left( \sqrt{p'^2 + p^2 \tau^2 y^2 + 2pp'y\tau \cos \varphi} \right) dy \right], \quad (18)$$

откуда видно, что зависимость от геометрии эксперимента определяется в этом случае только одним параметром  $\tau_d$ .

Использование (16) — (18) для получения конкретных результатов в общем случае требует применения численных методов расчета. Дальнейшие же аналитические преобразования будут проделаны для сред с предельно вытянутыми индикатрисами рассеяния, а также для предельно узких полей зрения приемника. Источник при этом будет считаться мононаправленным. Очевидно, что эти случаи хорошо вписываются в рамки малоуглового приближения.

Итак, пусть есть исходная рассеивающая среда с индикатрисами  $g_0(\gamma)$  и  $g_{\pi 0}(\gamma)$ . Рассмотрим последовательность все более и более вытянутых индикатрис

$$g_{\Gamma}(\gamma) = \frac{1}{\Gamma^2} g_0 \left( \frac{\gamma}{\Gamma} \right), \\ g_{\pi \Gamma}(\gamma) = \frac{1}{\Gamma_{\pi}^2} g_{\pi 0} \left( \frac{\gamma}{\Gamma_{\pi}} \right),$$

где  $\Gamma \rightarrow 0$ ,  $\Gamma_{\pi} \rightarrow 0$ , но  $\hat{\Gamma} = \Gamma_{\pi}/\Gamma = \text{const}$ , которым соответствуют их преобразования Ганкеля:

$$q_{\Gamma}(p) = q_0(p\Gamma), \quad q_{\pi \Gamma}(p') = q_{\pi 0}(p'\Gamma_{\pi}).$$

Подставив последние выражения в (16) и сделав замену переменных

$$l = p \Gamma, \quad l' = p' \Gamma,$$

получим

$$\frac{P(\tau)}{P_1(\tau)} = \frac{\tau_d \hat{\Gamma}^2}{\pi g_{\tau_0}(0) \Gamma} \int_0^{\infty} dl J_1\left(\frac{\tau_d}{\Gamma} l\right) \times \left[ \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dl' l' q_{\tau_0}(l' \hat{\Gamma}) H(l, l', \varphi, \tau) \right]. \quad (19)$$

Воспользовавшись далее асимптотическим представлением [11]

$$\int_0^{\infty} J_1(p \omega) f(p) dp = \frac{f(0)}{\omega} + o\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad \omega \rightarrow 0$$

и проделав обратную замену переменных  $p' = l'/\Gamma$ , приходим к искомого выражению, определяющему сигнал обратного рассеяния в случае предельно анизотропной индикатрисы рассеяния:

$$\frac{P(\tau)}{P_1(\tau)} = \frac{1}{g_{\tau}(0)} \int_0^{\infty} dp' q_{\tau}(p') p' \exp \left[ 4 \pi \tau \int_0^1 q \left( p' \left( 1 - y \frac{\tau}{\tau + \tau_0} \right) \right) dy \right]. \quad (20)$$

Если  $\hat{\Gamma} \gg 1$ , т. е. обратное рассеяние по отношению к рассеянию вперед может рассматриваться как изотропное, из (20) следует

$$P(\tau)/P_1(\tau) = e^{4\pi\tau q(0)} = e^{2\tau\theta}. \quad (21)$$

Это означает, что при  $\theta \approx 1$  сигнал обратного рассеяния не будет затухать при проникновении в глубь среды.

Заключая описание случая предельно анизотропных индикатрис рассеяния, отметим, что выражение (20) можно рассматривать и как результат формально выполненного предельного перехода при  $\tau_d \rightarrow \infty$  и фиксированных  $\Gamma$ ,  $\Gamma_{\pi}$  и  $\tau_0$ . В этом смысле оно определяет максимальную величину вклада многократного рассеяния, которая получается в малоугловом приближении при увеличении угла приема.

Обратимся теперь к случаю предельно малых углов поля зрения приемника ( $\tau_d \rightarrow 0$ ,  $\tau_0 = \text{const}$ ). Разобьем интеграл по  $p$  в (16) на две части:

$$\frac{P(\tau_d, \tau)}{P_1(\tau)} = \tau_d \left[ \int_0^{p_g} J_1(p \tau_d) H_1(p, \tau, \tau_0) dp + \int_{p_g}^{\infty} J_1(p \tau_d) H_1(p, \tau, \tau_0) dp \right]. \quad (22)$$

При  $\tau_d \rightarrow 0$  первый интеграл в сумме обращается в 0 при любом фиксированном  $p_g$ . Считая, что  $p_g$  достаточно велико, для оценки второго интеграла воспользуемся асимптотическим представлением для  $H_1(p, \tau, \tau_0)$  при  $p \rightarrow \infty$ :

$$H_1(p, \tau, \tau_0) = 1 + 4\pi K(\tau + \tau_0)/p\tau_0 + o(1/p), \quad (23)$$

где

$$K = \frac{1}{\pi g_{\tau}(0)} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dp' q_{\tau}(p') p' \left[ \int_0^{\infty} q(\sqrt{p'^2 + V^2 + 2p'V \cos \varphi}) dV \right].$$

Выражение (23) получается из (11) и (17) с учетом того, что стоящая под знаком экспоненты в (17) величина стремится к 0 при  $p \rightarrow \infty$ .

Подставляя (23) в (22) и переходя к пределу при  $\tau_d \rightarrow 0$ , получим

$$\frac{P(\alpha, \tau)}{P_1(\tau)} - 1 = \frac{4\pi K \tau_d (\tau_0 + \tau)}{\tau_0} = 4\pi K \alpha (\tau_0 + \tau). \quad (24)$$

Наличие линейной (а не квадратичной) по  $\alpha$  зависимости в (24) связано с тем, что источник излучения является мононаправленным.

Выражение (24) определяет также зависимость вклада многократного рассеяния от  $\tau$ , за исключением областей очень малых и очень больших значений  $\tau$ , так как асимптотическое представление (23) является равномерным по параметру  $\tau$  на любом отрезке, не включающем точки 0 и  $\infty$ . Что касается поведения вклада многократного рассеяния в указанных областях, то из общих соотношений (11), (16), (17) следует, что при любом как угодно малом, но фиксированном  $\alpha$   $P(\alpha, \tau)/P_1(\tau) \rightarrow 1$  при  $\tau \rightarrow 0$  и  $P(\alpha, \tau)/P_1(\tau) \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

В случае больших значений  $\tau_0$  из (24) следует, что при  $\tau \ll \tau_0$   $P(\alpha, \tau)/P_1(\tau) - 1 = 4\pi \tau_d K$ , т. е. в зависимости вклада многократного рассеяния от  $\tau$  после небольшого участка начального роста будет иметь место его насыщение.

Если  $z_H = 0$ , (23) и (24) будут справедливы и при  $\tau \rightarrow 0$ . В этом случае вклад многократного рассеяния будет расти линейно с  $\tau$ .

#### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для иллюстрации конкретного применения полученных выше соотношений и сопоставления получаемых на их основе результатов с данными других методов была проведена серия численных расчетов для модели облака С-1. Индикатриса рассеяния бралась по данным [14].

Малоугловая индикатриса представлялась в виде

$$g_i(\gamma) = \sum_{n=1}^{N_i} F_{in} \exp(-E_{in} \gamma^2), \quad (25)$$

где  $g_1(\gamma) = g(\gamma)$ ,  $g_2(\gamma) = g_\pi(\gamma)$ . Коэффициенты  $F_{in}$ ,  $E_{in}$  подбирались с помощью методов нелинейной оптимизации.

Представление (25) удобно тем, что преобразования Ганкеля от  $g(\gamma)$  и  $g_\pi(\gamma)$  легко находятся с помощью соотношений

$$q_i(p) = \sum_{n=1}^{N_i} D_{in} \exp(-\Gamma_{in} p^2), \quad (26)$$

где

$$q_1(p) = q(p), \quad q_2(p) = q_\pi(p),$$

$$D_{in} = F_{in}/2E_{in}, \quad \Gamma_{in} = 1/4E_{in}.$$

Преимуществом (25) является также и то, что интеграл по переменной  $y$ , стоящий под знаком экспоненты в (17), выражается аналитически через экспоненциальные функции и функции ошибок, что позволяет избежать трудоемкой процедуры его численной оценки.

Вычисления  $H_1(p, \tau, \tau_0)$  проводились путем численного интегрирования, причем вначале осуществлялось интегрирование по переменной  $p'$ , так как получавшаяся при этом величина слабо зависела от  $\phi$ . При расчетах  $P(\tau)$  по формуле (16) в случае больших значений  $\tau_d$  использовались квадратурные формулы Котеса с весовой функцией  $J_1(x)$  [12]. Это позволило значительно сократить объем вычислений при той же точности оценки интеграла.

В случае мононаправленного источника излучения интеграл (16) сходится медленно. Для облегчения его вычисления, особенно при малых  $\tau_d$ , использовались представления (22) и (23). При этом второй интеграл в (22) оценивался с помощью полученного из известных формул интегрирования для функций Бесселя [13] соотношения

$$\int_x^\infty \frac{J_1(y)}{y} dy = J_0(x) - J_1(x) + 2 \sum_{k=2}^\infty J_k(x)(-1)^k. \quad (27)$$

Был также исследован вопрос о влиянии на получаемые результаты выбора интервала аппроксимации  $(0, \gamma_0)$  и зависящей от него величины  $\theta$ .

С этой целью для модели С-1 были проведены аппроксимации (25) в области углов  $0 \div 20^\circ$  и  $0 \div 40^\circ$ . При этом для обеспечения точности аппроксимации в несколько процентов оказалось достаточным взять в первом случае  $N_1 = 3$ ,  $N_2 = 4$ , а во втором —  $N_1 = 4$ ,  $N_2 = 6$ . Получившиеся при этом значения  $\theta$  составили соответственно 0,8 и 0,96. Для обеих индикатрис при  $\tau_d = 0,5$  были проделаны расчеты  $P(\tau)/P_1(\tau)$  в диапазоне изменения  $\tau$  от 0 до 4. Оказалось, что относительная разница результатов не превышает 5%. Это означает, что при расчетах с  $\tau_d \leq 0,5$  и  $\tau \leq 4$  достаточно аппроксимировать индикатрису облака С-1 в диапазоне углов до  $20^\circ$  вблизи направлений вперед и назад. Детали поведения индикатрис  $g(\gamma)$  и  $g_\pi(\gamma)$  при больших углах рассеяния в пределах применимости малоуглового приближения не оказывают существенного влияния на получаемый результат.

Переходя к изложению результатов расчетов, остановимся сначала на зависимости рассеяния от параметра  $\tau_0$ , так как приводившиеся до сих пор в литературе данные относились либо к конкретным числовым величинам, либо связывались только с безразмерным параметром  $\tau_d$  [15]. На рис. 1 представлен пример зависимости  $P(\tau)/P_1(\tau)$  при постоянном  $\tau_d = 0,0264$  и  $\tau_0 = \infty$ ; 10; 5; 1 (кривые 1, 2, 3, 4), из которого ясна существенная роль  $\tau_0$ . В данном случае зависимость от  $\tau_0$  можно не учитывать лишь при  $\tau_0 > 10$ .

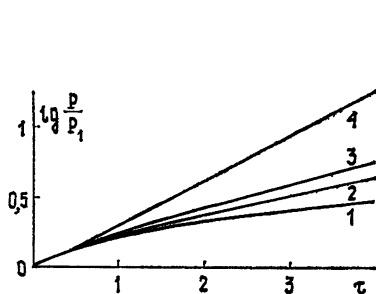


Рис. 1.

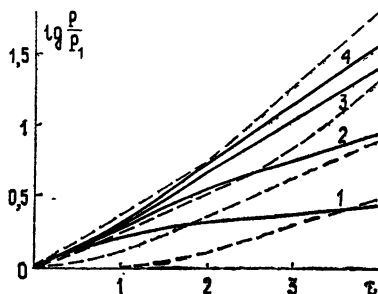


Рис. 2.

На рис. 2 сплошными линиями показаны результаты вычислений  $P(\tau)/P_1(\tau)$  при  $\tau_0 = \infty$  и при значениях  $\tau_d = 0,0264$ ;  $0,0878$ ;  $0,264$ ;  $0,572$  (кривые 1—4) для случая мононаправленного источника излучения. Там же штриховыми линиями изображены кривые, построенные согласно предложенным в [15] аппроксимационным формулам, обобщающим результаты, полученные методом Монте-Карло. Из рис. 2 видно, что в диапазоне  $\tau$  от 1 до 4 при всех значениях  $\tau_d$ , кроме  $\tau_d = 0,572$ , малоугловое приближение дает большую величину вклада многократного рассеяния. Наибольшая разница отмечается при значениях  $\tau_d = 0,0264$  и  $0,0878$  в области малых  $\tau$ .



Следует отметить, что результаты [15] получены не для мононаправленного излучателя, а для источника с излучением, равномерно заполняющим конус. Выполнить расчеты для такого же источника по данной методике затруднительно, так как функция  $\Omega(\rho)$  в этом случае была бы осциллирующей. Вместо этого были сделаны контрольные вычисления  $P(\tau)/P_1(\tau)$  для источника с гауссовой диаграммой направленности, которые показали, что влияние расходимости источника невелико и не может объяснить отмеченную разницу.

Поскольку основные расхождения получены в области малых  $\tau$  и  $\tau_d$ , то было проведено также сравнение с приближением двукратного рассеяния, которое должно давать правильные результаты в области, где эти параметры предельно малы. Расчеты вклада второй кратности рассеяния были выполнены для случая цилиндрической геометрии поля зрения ( $\tau_0 = \infty$ ) для модели облака С-1. В одном варианте вычисления были сделаны на основе представленной в [16] методики, учитывающей временное запаздывание рассеянного излучения, в другом — оно не учитывалось. Оказалось, что при  $\tau > \tau_d/2$  в рассматриваемом диапазоне  $\tau_d < 0,5$  и  $\tau < 4$  оба варианта дают практически совпадающие результаты. Это говорит о том, что временное запаздывание рассеянного излучения, по крайней мере, для рассеяния второй кратности, в данном случае несущественно.

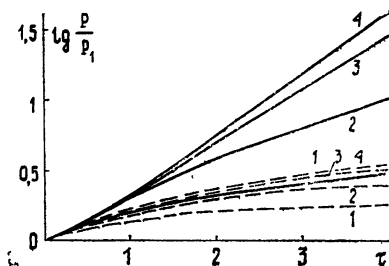


Рис. 3.

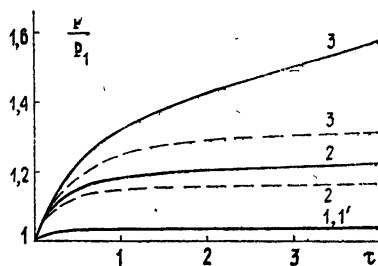


Рис. 4.

Результаты вычислений в приближении двукратного рассеяния показаны на рис. 3 и 4 штриховыми линиями. Сплошные линии, так же как и на рис. 2, изображают данные, полученные в малоугловом приближении. Расчеты проведены для  $\tau_d = 0,0264; 0,0878; 0,264; 0,572$  (кривые 1—4 рис. 3) и  $\tau_d = 0,001; 0,005; 0,01$  (кривые 1—3 рис. 4). Как видно из этих рисунков, совпадение результатов расчетов двумя методами во всем рассматриваемом диапазоне  $\tau$  имеет место лишь при  $\tau_d = 0,001$ . При  $\tau_d > 0,01$  и  $\tau > 1$  учет только двукратного рассеяния не дает представления об истинной величине вклада многократного рассеяния, на что уже указывалось в [3].

При сопоставлении данных, приведенных на рис. 2 и 3, видно, что при  $\tau < 2,6$  для  $\tau_d = 0,0264$  и  $\tau < 1,8$  для  $\tau_d = 0,0878$  полученные методом Монте-Карло величины вклада многократного рассеяния меньше, чем в приближении двукратного рассеяния. Так как величина рассеяния с учетом всех кратностей не может быть меньше вклада двукратного рассеяния, то в этих областях  $\tau$  и  $\tau_d$  величина многократного рассеяния, даваемая в [15], занижена. По-видимому, применяемая в [15] модификация метода локальной оценки не устраняет полностью присущие методу локальной оценки смещения результатов при малых приемных апертурах [17].

Итак, сравнение с расчетами методом Монте-Карло для модели облака С-1 в диапазоне  $\tau$  от 0 до 4 показывает хорошее соответствие результатов при больших ( $\sim 0,5$ ) значениях параметра  $\tau_d$ , где метод

Монте-Карло должен давать наиболее надежные результаты. В области малых  $\tau_d$  результаты совпадают с данными, полученными в приближении двукратного рассеяния. Все это дает основание заключить, что изложенная выше методика расчета обратного рассеяния на основе использования решения уравнения переноса в малоугловом приближении применима не только для качественных, но и для количественных оценок характеристик обратного рассеяния. Область ее применимости значительно шире, чем для приближения двукратного рассеяния.

В заключение автор благодарит А. С. Дрофу и Н. П. Романова за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белов В. В., Креков Г. М., Титов Г. А. — В сб.: Вопросы дистанционного зондирования атмосферы. — Томск: Ин-т оптики атмосферы СО АН СССР, 1975, с. 102.
2. Кауль Б. В., Самохвалов И. В. — Изв. вузов — Физика, 1975, № 8, с. 109.
3. Кауль Б. В., Креков Г. М., Крекова М. М. — Квантовая электроника, 1977, 4, № 11, с. 2408.
4. Ермаков Б. В., Ильинский Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1969, 12, № 5, с. 694.
5. Долин Л. С., Савельев В. А. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1971, 7, № 5, с. 505.
6. Weinman J. A. — J. Atm. Sci., 1976, 33, № 9, p. 1763.
7. Кожевников А. Н., Орлов В. М. Тезисы докладов I Всесоюзного совещания по атмосферной оптике. Ч. I. — Томск: 1976, с. 368.
8. Долин Л. С. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1980, 16, № 1, с. 55.
9. Долин Л. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1964, 7, № 2, с. 380.
10. Коршунов В. А. Тезисы докладов V Всесоюзного симпозиума по лазерному и акустическому зондированию атмосферы. Ч. I. — Томск: 1978, с. 48.
11. Арсеньев А. А. — ДАН СССР, 1964, 154, № 2, с. 251.
12. Крылов В. И., Шульгин Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. — М.: Наука, 1966.
13. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.
14. Зуев В. Е., Креков Г. М., Матвиенко Г. Г., Попков А. И. — В сб.: Лазерное зондирование атмосферы. — М.: Наука, 1976, с. 29.
15. Белов В. В., Глазов Г. Н., Креков Г. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 2, с. 275.
16. Самохвалов И. В. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1979, 15, № 12, с. 1271.
17. Голубицкий Б. М., Танташев М. В. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1973, 9, № 11, с. 1213.

Институт экспериментальной  
метеорологии

Поступила в редакцию  
19 мая 1980 г.

#### EQUATION OF LASER LOCATION IN SMALL ANGLE APPROXIMATION

*V. A. Korshunov*

Small angle approximation known in the theory of the radiation transfer is used for the solution of the problem on back scattering in pulse sensing of optically inhomogeneous medium along the sensing trace. A dependence is analysed of the multiple scattering on the character of the problem parameters. Simple relations have been derived which describe limiting cases of very small reception angles and strongly elongated scattering indicatrices. For the model of C-1 cloud numerical calculations have been made the results of which are compared with the similar data obtained in the approximation of double scattering and Monte-Carlo method. A conclusion is made on the fact that the methodics based on small angle approximation is applicable for quantitative estimation of back scattering signals.