ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 9 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 621.391

НЕЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ФАЗЫ СИГНАЛА, ПРИНИМАЕМОГО В СМЕСИ С ШУМОМ

А. Б. Шмелев

На основе обобщения на случайные поля уравнений гауссова приближения, описывающих совместную нелинейную фильтрацию и интерполяцию марковских процессов, рассмотрена задача оптимальной пространственно-временной интерполяции поля фазовых флуктуаций квазигармонического сигнала, наблюдаемого на фоне белого гауссова шума. Получены уравнения, описывающие алгоритм пространственно-временной обработки, и вычислен средний квадрат погрешности оценки в случае, когда пространственные флуктуации вызваны распространением волны в турбулентной атмосфере.

Задачи нелинейной интерполяции случайных процессов, флуктуирующих только во времени, рассматривались методами теории условных марковских процессов в работах [1–3]. С увеличением размеров приемных антенн возникает необходимость не только во временной, но и в пространственной обработке принимаемого поля. В данной работе решена задача пространственно-временной интерполяции фазы квазигармонического сигнала, наблюдаемого в смеси с белым гауссовым шумом. В основу решения положено обобщение на случайные поля уравнений гауссова приближения, описывающих совместную нелинейную фильтрацию и интерполяцию марковских процессов. Особое внимание уделено тому случаю, когда пространственные флуктуации фазы обусловлены распространением волны в турбулентной атмосфере.

По сравнению с аналогичной задачей оптимальной фильтрации без запаздывания [4, 5] точность интерполяционной оценки оказывается выше за счет дополнительной информации, поступившей за время запаздывания, однако алгоритм оптимальной обработки при этом несколько усложняется. Вычисленную ниже среднеквадратичную погрешность интерполяции следует рассматривать как потенциально достижимую в случае, когда приемная апертура является сплошной и достаточно большой по сравнению с областью пространственной корреляции фазы, а времена наблюдения и запаздывания велики по сравнению со временем корреляции фазовых флуктуаций.

Предположим, что на приемной апертуре D в течение времени $(0, t)$ наблюдается случайное поле

$$y(t, \boldsymbol{r}) = A\cos[\omega t + \xi(t, \boldsymbol{r})] + n(t, \boldsymbol{r}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки на апертуре, $n(t, \boldsymbol{r})$ — пространственно-временной белый гауссов шум со спектральной плотностью N, A и ω — постоянные амплитуда и угловая частота полезного сигнала.

Будем считать, что подлежащее оценке поле фазовых флуктуаций $\xi(t, \boldsymbol{r})$ представляет собой марковский процесс со значениями в гильбертовом пространстве, т. е. зависит от координат как от параметров, принимающих континуальное множество значений, и удовлетворяет априорному стохастическому уравнению

$$\frac{d\xi(t, r)}{dt} + \gamma\xi(t, r) = \chi(t, r), \tag{2}$$

где $\chi(t, r)$ — гауссово поле сторонних воздействий с нулевым средним значением и корреляционной функцией $\overline{\chi(t, r)\chi(t', r')} = \varkappa(r - r') \times \delta(t - t')$.

Задача прямой интерполяции состоит в построении оптимальной оценки $\hat{\xi}_{t'}(t, r)$ поля ξ в фиксированный момент $t' < t$ по данным наблюдений за реализацией поля (1) на интервале $(0, t)$. Аналогично тому, как это сделано для марковского процесса в работе [3], можно свести эту задачу к задаче оптимальной фильтрации двумерного случайного поля $(\xi_1, \xi_2) = (\xi, \xi_{t'})$, первая компонента которого совпадает с текущим, а вторая — с интерполируемым значением исходного поля $\xi(t, r)$. Пользуясь результатами работ [3, 4] и считая размеры приемной антенны большими по сравнению с масштабом пространственной корреляции фазовых флуктуаций, записываем обобщенные уравнения гауссова приближения для средних значений $\hat{\xi}_i(t, r)$ и вторых кумулянтов $K_{ij}(t, \rho_1 - \rho_2) = \langle [\xi_i(t, \rho_1) - \hat{\xi}_i(t, \rho_1)] [\xi_j(t, \rho_2) - \hat{\xi}_j(t, \rho_2)] \rangle$ апостериорного распределения указанного двумерного поля:

$$\frac{d\hat{\xi}_1(\rho)}{dt} = -\gamma\hat{\xi}_1(\rho) - \frac{A}{N}\int\limits_D y(t, r) K_{11}(r - \rho) \sin[\omega t + \hat{\xi}_1(r)]\, dr; \tag{3}$$

$$\frac{d\hat{\xi}_2(\rho)}{dt} = -\frac{A}{N}\int\limits_D y(t, r) K_{12}(r - \rho) \sin[\omega t + \hat{\xi}_1(r)]\, dr; \tag{4}$$

$$\frac{dK_{11}(\rho)}{dt} = -2\gamma K_{11}(\rho) - \mu\int K_{11}(r) K_{11}(r - \rho)\, dr + \varkappa(\rho); \tag{5}$$

$$\frac{dK_{12}(\rho)}{dt} = -\gamma K_{12}(\rho) - \mu\int K_{12}(r) K_{11}(r - \rho)\, dr; \tag{6}$$

$$\frac{dK_{22}(\rho)}{dt} = -\mu\int K_{12}(r) K_{12}(r - \rho)\, dr, \tag{7}$$

где $\mu = A^2/2N$ — отношение сигнал/шум в единицу времени на единице площади антенны. Здесь, как обычно, опущены вибрационные слагаемые с двойной частотой ввиду предполагаемой узкополосности системы оптимальной обработки. Решать эти уравнения следует при начальных условиях

$$\hat{\xi}_1(t, \rho)|_{t=0} = \xi_0(\rho), \qquad \hat{\xi}_2(t, \rho)|_{t=t'} = \hat{\xi}_1(t', \rho),$$

$$K_{11}(t, \rho)|_{t=0} = K_0(\rho),$$

$$K_{12}(t, \rho)|_{t=t'} = K_{22}(t, \rho)|_{t=t'} = K_{11}(t', \rho),$$

где $\xi_0(\rho)$ и $K_0(\rho)$ — первые два кумулянта априорного распределения оцениваемого поля.

Как и в случае обычных марковских процессов, уравнения (3) и (5) описывают квазиоптимальную фильтрацию без запаздывания. Полученные в результате фильтрации величины $\hat{\xi}_1(t, \rho)$ и $K_{11}(t, \rho)$ используются затем при формировании интерполяционной оценки $\hat{\xi}_2(t, \rho)$.

Алгоритм нелинейной пространственно-временной фильтрации не отличается от описанного в [5] и представляет собой систему взаимосвязанных петель фазовой автоподстройки, распределенных по апертуре. Коэффициенты усиления и связи этих петель пропорциональны $K_{11}(t, \rho)$ и в общем случае зависят от времени. Однако если время наблюдения велико по сравнению со временем корреляции фазовых флуктуаций, равным по порядку величины γ^{-1}, то устанавливается стационарный режим фильтрации, при котором K_{11} уже не зависит от времени и определяется из уравнения (5) с равной нулю левой частью. Решая это уравнение преобразованием Фурье, получаем тогда

$$\tilde{K}_{11}(q) = \frac{\tilde{\varkappa}(q)}{\gamma\left[1 + \sqrt{1 + (\mu\tilde{\varkappa}(q)/\gamma^2)}\right]}, \tag{8}$$

где тильдой обозначены образы Фурье соответствующих величин.

Согласно (4), интерполяционная оценка $\hat{\xi}_2(\rho)$ образуется путем интегрирования по времени и по апертуре напряжений на выходе фазовых детекторов с весовыми множителями $K_{12}(\mathbf{r} - \rho)$. В этом состоит усложнение схемы обработки при интерполяции по сравнению с пространственно-временной фильтрацией без запаздывания. Если прием производится не на сплошную антенну, а на дискретную решетку, то интегралы по апертуре следует заменить суммами по элементам решетки.

Вычислим предельно достижимую точность интерполяции при $t - t' \to \infty$. Преобразуя уравнения (6) и (7) по Фурье по ρ, решая полученные обыкновенные дифференциальные уравнения с начальными условиями $\tilde{K}_{12}(t', q) = \tilde{K}_{22}(t', q) = \tilde{K}_{11}(t', q)$ и используя для $\tilde{K}_{11}$ выражение (8), в пределе $t - t' \to \infty$ получаем

$$\tilde{K}_{22}(q) = \frac{\tilde{\varkappa}(q)}{2\gamma\sqrt{1 + (\mu\tilde{\varkappa}(q)/\gamma^2)}}. \tag{9}$$

Средний квадрат погрешности интерполяции равен значению в нуле обратного преобразования Фурье от (9).

В случае плоской антенны и гауссовой функции корреляции $\varkappa(\rho) = 2\gamma\sigma^2 \exp(-\rho^2/l^2)$ будем иметь

$$K_{22}(0) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_{22}(q)\, d\mathbf{q} = \frac{2\sigma^2}{1 + \sqrt{1 + \delta}}, \tag{10}$$

где σ^2 — априорная дисперсия поля $\xi(t, \mathbf{r})$, а $\delta = 2\pi\mu\sigma^2 l^2/\gamma$ — произведение дисперсии фазовых флуктуаций на отношение сигнал/шум в пространственно-временной области их корреляции. С ростом параметра δ повышается качество интерполяции.

Если пространственные флуктуации фазы вызваны распространением волны в турбулентной атмосфере, то при геометрооптическом описании волнового поля имеет место следующая формула для спектральной плотности фазы в плоскости приемной антенны [6]:

$$\tilde{\varkappa}_\xi(q) = 0{,}033\,(\pi k^2 L/2)\, c_\varepsilon^2\, q^{-11/3}, \tag{11}$$

где L — длина трассы распространения, $k = \omega/c$ — волновое число, c_ε — структурная постоянная диэлектрической проницаемости турбулентной атмосферы.

Подставляя в (9) $\tilde{\varkappa}(q) = 2\gamma\tilde{\varkappa}_\xi(q)$ и вычисляя двойной интеграл по q, получаем в этом случае

$$K_{22}(0) = \frac{C\gamma\beta^{6/11}}{\mu} = 0{,}14875\,\frac{c_\varepsilon^{12/11}\, k^{12/11}\, L^{6/11}\, \gamma^{5/11}}{\mu^{5/11}}, \tag{12}$$

где

$$\beta = \frac{0{,}033\,\pi\,\mu k^2 L c_\varepsilon^2}{\gamma}, \qquad C = \frac{3}{44\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^{6/11}\sqrt{1+x}} = 0{,}5121131\ldots$$

Средний квадрат погрешности интерполяции растет с увеличением частоты и длины трассы за счет усиления фазовых флуктуаций в среде и уменьшается с ростом отношения сигнал/шум и времени корреляции флуктуаций. Сравнивая результат (12) с соответствующим выражением для среднего квадрата погрешности пространственно-временной фильтрации без запаздывания [5], находим, что дисперсия интерполяционной оценки оказывается в 1,83 раза меньше, чем при стационарной нелинейной фильтрации. Это характеризует тот выигрыш, который обеспечивает интерполяция фазовых флуктуаций сигнала в турбулентной среде по сравнению с фильтрацией без запаздывания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. — Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, № 4, с. 602.
2. Сосулин Ю. Г. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1969, № 5, с. 94.
3. Зайцев В. В, Кульман Н. К. — Радиотехника и электроника, 1970, 15, № 11, с. 2385.
4. Шмелев А. Б. — В сб.: Пространственно-временная обработка сигналов. — Воронеж: Гос. ун-т, 1980, с. 3.
5. Шмелев А. Б. — Радиотехника и электроника, 1980, 25, № 4, с. 717.
6. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
15 апреля 1980 г.,
после доработки
4 февраля 1981 г.

NONLINEAR SMOOTHING OF SPACE-TIME PHASE FLUCTUATIONS OF A SIGNAL RECEIVED TOGETHER WITH NOISE

A. B. Shmelev

Based on a generalization to random fields of Gaussian approximation equations describing both nonlinear filtering and smoothing of Markov process, a problem of optimal space-time smoothing of phase fluctuations of a quasi-harmonic signal observed in the white Gaussian noise is considered. Equations describing algorithms of space-time processing are obtained and the mean square estimation error for the case of space fluctuations caused by the wave propagation in a turbulent atmosphere is calculated.