

УДК 535 + 538 56 530 145

## К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В ЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

*В. Г. Манишин, Г. А. Пасманик*

Рассмотрены алгоритмы фазового сопряжения, апертурного зондирования и интерференционный критерий для задачи оптимальной фокусировки световых пучков. Для линейной неоднородной среды показано отсутствие локальных экстремумов и эквивалентность рассмотренных алгоритмов при совпадении приемной и передающей апертур. Показано также, что алгоритм фазового сопряжения максимизирует мощность, передаваемую между двумя обращаемыми зеркалами.

1. При распространении лазерного излучения в неоднородной среде флуктуации показателя преломления приводят к искажению профиля пучка. В результате уменьшается его интенсивность и возрастает расходимость, что ограничивает уровень мощности излучения, передаваемого на заданную апертуру. В связи с этим важное значение приобретает проблема такой коррекции амплитудно-фазового профиля светового пучка, которая максимизирует мощность на приемной апертуре, причем при нерегулярном во времени изменении параметров среды для формирования указанного профиля необходимо достаточно быстро отслеживать эти изменения.

В общем случае для коррекции изменений параметров среды система компенсации замыкается обратной связью [1]. В настоящее время различают два типа таких систем: системы фазового сопряжения и апертурного зондирования. В системах апертурного зондирования регистрируется рассеянная объектом волна, и критерием качества передачи излучения является мощность рассеянной волны на приемной апертуре. Для получения максимума мощности на входе приемника необходимо варьировать профиль на передающей апертуре. В связи с этим особый интерес приобретает вопрос о том, существуют ли локальные экстремумы критерия качества, затрудняющие поиск оптимального профиля поля.

В настоящей заметке показано, что таких экстремумов не существует, а есть только один глобальный максимум. Оказывается, что оптимальный профиль поля, соответствующий максимуму передаваемой мощности, совпадает с основной модой резонатора, образованного при постановке на приемную и передающую апертуры зеркал, обращаемых волновой фронт падающего на них излучения.

2. Рассмотрим транспортировку излучения от передатчика к приемнику (рис. 1) (1 — передающая апертура, 2 — приемная апертура, 3 — рассеивающий объект). Выразим критерий качества через амплитудно-фазовый профиль светового пучка на передающей апертуре. В линейной неоднородной среде в квазиоптическом приближении распространение излучения описывается интегральным уравнением

$$E(\mathbf{r}_\perp, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r'_\perp G(0, z, r'_\perp, \mathbf{r}_\perp) E(r'_\perp, 0) + \\ + \int_0^z dz' \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r'_\perp G(z', z, r'_\perp, \mathbf{r}_\perp) ik \varepsilon(r'_\perp, z') E(r'_\perp, z'), \quad (1)$$

где  $G(z', z, \mathbf{r}'_\perp, \mathbf{r}_\perp)$  — функция Грина,  $\varepsilon(\mathbf{r}_\perp, z)$  — возмущения диэлектрической проницаемости по трассе,  $k$  — волновое число, или

$$E(\mathbf{r}_\perp, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r'_\perp H(0, z, r'_\perp, \mathbf{r}_\perp) E(r'_\perp, 0), \quad (2)$$

где  $H(0, z, \mathbf{r}'_\perp, \mathbf{r}_\perp)$  — разрешающее ядро для уравнения (1) (совпадает с функцией Грина  $G$ , если  $\varepsilon(\mathbf{r}_\perp, z) = 0$ ). Распределение поля рассеянной волны на приемной апертуре выражается следующим образом:

$$E_s(\mathbf{r}_\perp, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r'_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r''_\perp \rho'(r'_\perp) H(z, 0, r'_\perp, \mathbf{r}_\perp) \times \\ \times \hat{T}(r'_\perp) H(0, z, r''_\perp, r'_\perp) \rho(r''_\perp) E(r''_\perp, 0), \quad (3)$$

где  $\rho'(r'_\perp)$  и  $\rho(r''_\perp)$  — аподизирующие диафрагмы приемника и передатчика,  $\hat{T}(r'_\perp)$  — оператор рассеяния света на объекте, расположенном в плоскости  $z$ . Отсюда можно выразить значение максимизируемого в методе апертурного зондирования функционала через амплитудно-фазовый профиль светового пучка на передающей апертуре:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r'_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r''_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r'''_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r^{IV}_\perp |\rho'(r'_\perp)|^2 \times \\ \times H(z, 0, r'_\perp, \mathbf{r}_\perp) \hat{T}(r'_\perp) H(0, z, r''_\perp, r'_\perp) H^*(z, 0, r'''_\perp, r_\perp) \hat{T}^*(r'''_\perp) \times \\ \times H^*(0, z, r^{IV}_\perp, r''_\perp) \rho(r''_\perp) \rho^*(r^{IV}_\perp) E(r''_\perp, 0) E^*(r^{IV}_\perp, 0). \quad (4)$$

Обозначим

$$K(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r'_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r''_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r'''_\perp |\rho'(r'_\perp)|^2 H(z, 0, r''_\perp, r'_\perp) \hat{T}(r'_\perp) \times \\ \times H(0, z, r_\perp, r''_\perp) H^*(z, 0, r'''_\perp, r'_\perp) \hat{T}^*(r'''_\perp) H^*(0, z, \mathbf{s}, r'''_\perp) \rho(r''_\perp) \rho^*(\mathbf{s}). \quad (5)$$

Тогда выражение (4) примет следующий вид:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d^2 s K(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}) E(\mathbf{r}_\perp, 0) E^*(\mathbf{s}, 0). \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что  $K(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s})$  — эрмитово ядро, т. е.  $K(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}) = K^*(\mathbf{s}, \mathbf{r}_\perp)$ . Тогда по теореме Гильберта — Шмидта [2] значение функционала (6) выражается через коэффициенты разложения поля  $E(\mathbf{r}_\perp, 0)$  по собственным функциям интегрального уравнения с ядром (5):

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{\lambda_k}; \quad (7)$$

здесь  $a_k = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_{\perp} E(\mathbf{r}_{\perp}, 0) \varphi_k^*(\mathbf{r}_{\perp})$ ,  $\lambda_k$  — собственные значения, а  $\varphi_k(\mathbf{r}_{\perp})$  — собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi_k(\mathbf{r}_{\perp}) = \lambda_k \int_{-\infty}^{\infty} d^2 s K(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{s}) \varphi_k(\mathbf{s}). \quad (8)$$

Уравнение на собственные функции  $\varphi_k(\mathbf{r}_{\perp})$ , сохраняющие свою ортогональность при пересчете с передающей апертуры на приемную, для однородной линейной среды было получено в работах [3, 4]. Выражение (7) при условии  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = 1$  имеет, очевидно, один экстремум ( $|a_k| = 0$  при  $k \neq 1$ ), являющийся глобальным максимумом; собственные значения считаются упорядоченными,  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Для систем апертурного зондирования это означает, что, выбрав в качестве корректирующих параметров первые  $N$  коэффициентов разложения поля  $E(\mathbf{r}_{\perp}, 0)$  по некоторому базису  $\{\psi_k(\mathbf{r}_{\perp})\}$ , связанному с базисом собственных функций уравнения (8) линейным невырожденным преобразованием, можно за  $N$  шагов достичь значения критерия качества, отличающегося от глобального максимума не более чем на величину

$$\Delta I = \frac{1}{\lambda_1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(\mathbf{r}_{\perp}) \tilde{\psi}^*(\mathbf{r}_{\perp}) d^2 r_{\perp},$$

где

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}_{\perp}) = \varphi_1(\mathbf{r}_{\perp}) - \sum_{k=1}^N \psi_k(\mathbf{r}_{\perp}) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_{\perp} \varphi_1(\mathbf{r}_{\perp}) \psi_k^*(\mathbf{r}_{\perp}).$$

Таким базисом может быть любая полная ортогональная система функций. При  $N \rightarrow \infty$   $\Delta I \rightarrow 0$  и функционал (6) достигает глобального максимума. Нетрудно видеть, что в конечномерном пространстве функционал (4) имеет один максимум, так как сечение бесконечномерного эллипсоида  $N$ -мерной гиперплоскостью является  $N$ -мерным эллипсоидом.

3. Сравним теперь алгоритмы апертурного зондирования и фазового сопряжения. В системах фазового сопряжения на приемной и передающей апертурах задается амплитудно-фазовый профиль, сопряженный с профилем принятой волны, и, тем самым, осуществляется компенсация возникающих на трассе искажений волны. В результате образуется резонатор с двумя зеркалами, обращающими волновой фронт падающего на них поля.

Запишем интегральное уравнение для собственных функций такого резонатора. Для поля на передающей апертуре имеем

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}_{\perp}, 0) &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r'_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r''_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r'''_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 s |\rho'(\mathbf{r}'_{\perp})|^2 \times \\ &\times H(z, 0, \mathbf{r}'_{\perp}, \mathbf{r}_{\perp}) \hat{T}(\mathbf{r}'_{\perp}) H(0, z, \mathbf{r}''_{\perp}, \mathbf{r}'_{\perp}) H^*(z, 0, \mathbf{r}'''_{\perp}, \mathbf{r}''_{\perp}) \times \\ &\times \hat{T}^*(\mathbf{r}'''_{\perp}) H^*(0, z, \mathbf{s}, \mathbf{r}'''_{\perp}) \rho(\mathbf{r}_{\perp}) \rho^*(\mathbf{s}) E(\mathbf{s}, 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Для линейных и взаимных сред  $H(0, z, \mathbf{r}'_{\perp}, \mathbf{r}_{\perp}) = H(z, 0, \mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}'_{\perp})$  уравнения (8) и (9) тождественны, т. е. первая мода системы фазового

сопряжения максимизирует функционал (4). Таким образом, алгоритм фазового сопряжения максимизирует мощность, передаваемую с одной апертуры на другую. В частности, при совпадающих апертурах резонатор имеет только одно обращающее зеркало. В этом случае собственные моды замыкаются за два обхода резонатора и основная из них обладает наименьшими потерями по сравнению с модами резонатора без обращающих зеркал [9]. Спектр и система собственных функций для уравнения (9) в случае однородной среды отыскивались в работах [5, 6]. Скорость сходимости к максимуму в методе фазового сопряжения

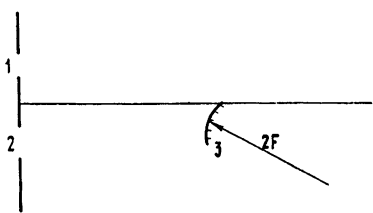


Рис. 1.

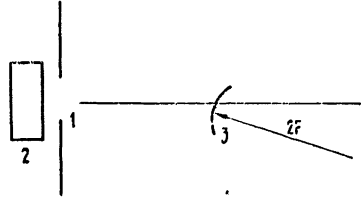


Рис. 2.

зависит от дискриминации мод резонатора с обращающими волновой фронт зеркалами. Зависимость мощности пучка на приемной апертуре от числа итераций (числа пробегов излучением между обращающими зеркалами) следующая:

$$\frac{P(n)}{P_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{\lambda_k^{2n+1}} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_m|^2}{\lambda_m^{2n}} \right)^{-1}, \quad (10)$$

где  $a_n$  — коэффициенты разложения начального амплитудно-фазового профиля по собственным функциям резонатора,  $P_0$  — мощность на передающей апертуре. При  $(\lambda_2/\lambda_1)^n \gg 1$  значение  $I(n) \rightarrow 1/\lambda_1$ , т. е. функционал (6) достигает глобального максимума. Таким образом, хотя характер сходимости к глобальному максимуму у методов апертурного зондирования и фазового сопряжения различный, асимптотически оба метода совпадают.

4. Интересно также сравнить алгоритмы апертурного зондирования и фазового сопряжения с предложенным в работе [7] интерференционным критерием фокусировки излучения, при котором максимизируется функционал

$$j = \left| \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_{\perp} E(r_{\perp}, 0) \psi(r_{\perp}, 0) \right|, \quad (11)$$

где  $E(r_{\perp}, 0)$  — поле на передающей апертуре,

$$\begin{aligned} \psi(r_{\perp}, 0) = & \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r'_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r''_{\perp} \rho(r_{\perp}) H(z, 0, r'_{\perp}, r_{\perp}) \hat{T}(r'_{\perp}) \times \\ & \times H(0, z, r''_{\perp}, r'_{\perp}) E(r''_{\perp}, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 s P(r_{\perp}, s) E(s, 0) \end{aligned}$$

— отраженная объектом волна на той же апертуре. В данном случае приемная и передающая апертуры совпадают (рис. 2) (1 — приемно-передающая апертура, 2 — обращающее волновой фронт зеркало, 3 —

рассеивающий объект). Покажем, что максимум функционала (11) дает тот же амплитудно-фазовый профиль, что и рассмотренные выше алгоритмы. Действительно, при совпадении апертур

$$\varphi_k^*(\mathbf{r}_\perp) = \sqrt{\lambda_k} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 s P(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}) \varphi_k(\mathbf{s}), \quad (12)$$

и для  $\psi(\mathbf{r}_\perp, 0)$  справедливо представление [2]:

$$\psi(\mathbf{r}_\perp, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k^*(\mathbf{r}_\perp), \quad (13)$$

где  $a_k = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_\perp E(\mathbf{r}_\perp, 0) \varphi_k^*(\mathbf{r}_\perp)$ . Тогда для функционала (11) получим следующее выражение:

$$j = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{|\sqrt{\lambda_k}|}. \quad (14)$$

Отсюда видно, что первая мода уравнения (9) доставляет максимум функционалу (11).

5. В качестве примера рассмотрим задачу оптимизации амплитудно-фазового профиля в однородной среде, так как в этом случае легко найти аналитическое решение. В однородной среде ( $H(0, z, \mathbf{r}'_\perp, \mathbf{r}_\perp) = (-ik/2\pi z) \exp[(ik/2z)(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)^2]$ ) оператор рассеяния возьмем в виде (рис. 1)

$$\hat{T}(\mathbf{r}_\perp) = R \exp[(ik/2F) r_\perp^2 + i\beta \mathbf{r}_\perp], \quad \rho(\mathbf{r}_\perp) = \exp(-\alpha_n r_\perp^2/2), \\ \rho'(\mathbf{r}_\perp) = \exp(-\alpha_n r_\perp^2/2),$$

где  $R$  — коэффициент отражения,  $2F$  — радиус кривизны поверхности,  $\beta/k$  — ее угол наклона относительно оси  $z$ . Ядро функционала в этом случае записывается следующим образом:

$$K(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}) = \frac{R^2 k^2}{4\pi z^4 \alpha_n} \left( \frac{2}{z} + \frac{1}{F} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{ik}{2z} \left[ 1 - \left( \frac{2}{z} + \frac{1}{F} \right)^{-1} \frac{1}{z} \right] \right\} \times \\ \times (r_\perp'^2 - s'^2) - i\beta(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{s}') - \frac{k^2}{4\alpha_n z^4} \left( \frac{2}{z} + \frac{1}{F} \right)^{-2} \times \\ \times (\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{s}')^2 - (\alpha_n/2)(r_\perp'^2 + s'^2), \quad (15)$$

где  $\mathbf{s}' = \mathbf{s} - \mathbf{r}_n$ ,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_n$ . Фазовый профиль пучка, максимизирующий мощность на приемной апертуре, в этом случае представляется квадратным трехчленом, и для гауссова распределения интенсивности основная мода

$$\varphi_1(\mathbf{s}) = \exp \left\{ -\frac{ik}{2z} \left[ 1 - \left( \frac{2}{z} + \frac{1}{F} \right)^{-1} \frac{1}{z} \right] s'^2 - i\beta \left( \frac{2}{z} + \frac{1}{F} \right)^{-1} \mathbf{s}' \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{s'^2}{2} \left[ \frac{\alpha_n^2}{z^4} + \frac{k^2}{z^4 \alpha_n} \left( \frac{2}{z} + \frac{1}{F} \right)^{-2} \right] \right\}, \quad (16)$$

коэффициент передачи  $1/\lambda_1$  для этого профиля равен

$$\frac{1}{\lambda_1} = R^2 \left/ \left\{ 1 + \frac{2\sigma_n z^4}{k^2} \left[ \alpha_n + \left[ \alpha_n^2 + \frac{k^2 \alpha_n}{z^4 \alpha_n} \left( \frac{2}{z} + \frac{1}{F} \right)^{-2} \right]^{1/2} \right] \right\} \right. \quad (17)$$

Задача об оптимальной транспортировке волн интересна не только для оптического излучения, но и для электромагнитных волн других частотных диапазонов и волн иной физической природы, в том числе звуковых, для которых также может быть реализовано явление обращения волнового фронта [8]. Если распространение звуковых пучков описывается параксиальным приближением, то полученные выше результаты справедливы и для акустического излучения.

Авторы благодарны В. М. Шашкову и Д. В. Власову за обсуждение работы и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ахманов С А, Воронцов М А, Кандидов В Г, Сухоруков А П, Чесноков С С — Изв вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 1, с 5.
- 2 Цлаф Л. Ю. Вариационное исчисление и интегральные уравнения — М: Наука, 1970
- 3 Кау А — IRE Trans., 1960, AP-8, p 536
- 4 Бондаренко Н Г, Таланов В И — Изв вузов — Радиофизика, 1964, 7, № 2, с 313.
- 5 Бельдюгин И М, Земсков Е М — В сб. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах — Горький, 1979, с 160
- 6 Лесник С А, Резников М. Г, Соскин М С., Хижняк А И — В сб. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах — Горький, 1979, с 146
- 7 Воронцов М А, Шмальгаузен В И — Квантовая электроника, 1980, 7, № 3, с 500.
- 8 Бункин Ф. В, Власов Д. В, Кравцов Ю А — Квантовая электроника, 1981, 8, № 5, с. 1144
9. Резников М Г, Хижняк А. И — Квантовая электроника, 1980, 7, № 5, с 1105.

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
2 июля 1980 г.

#### TO THE PROBLEM OF OPTIMAL CORRECTION OF THE OPTICAL RADIATION PROPAGATING IN A LINEAR MEDIUM

*V G. Manishin, G A Pismanik*

Algorithms of the phase conjugation, aperture sounding and interference criterion are considered for the problem of optimal phase focusing of light beams. For a linear inhomogeneous medium the absence of local extrema is shown as well as equivalency of the algorithm considered when receiving and transmitting apertures are coincide. It is shown that algorithm of the phase conjugation maximizes the power transmitted between two inverted mirrors