

УДК 538.56.519.25

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ

Г. Н. Бочков, А. А. Дубков, А. А. Мальцев

С помощью марковского аппарата интегродифференциальных уравнений Колмогорова — Феллера получены и проанализированы точные выражения для плотностей вероятности напряжений в автокомпенсаторе и в усилителе с АРУ, возникающих при прохождении через них синусоидальных сигналов с телеграфным законом случайной амплитудной модуляции

1. Широкий круг задач статистической радиофизики приводит к необходимости исследования стохастических систем, описываемых дифференциальными уравнениями со случайными параметрами. С подобными задачами приходится сталкиваться, в частности, при изучении преобразования случайных сигналов различными устройствами с обратными связями (усилителями с автоматической регулировкой усиления (АРУ) [1], автокомпенсаторами [2] и др.).

Статистический анализ указанных адаптивных систем удается приближенно провести лишь для предельно быстро флуктуирующих входных воздействий [1, 3–5]. В силу этого принципиальное значение приобретает разработка точных методов решения таких задач. Точные методы, с одной стороны, позволяют исчерпывающим образом изучить поведение адаптивных систем в широком диапазоне изменения статистических параметров воздействующих помех, а с другой, — играют важную роль при обосновании известных и при построении новых приближенных приемов их исследования.

В настоящей работе выводятся точные соотношения для вероятностных характеристик преобразования случайного телеграфного сигнала радиотехнической системой, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка. На основе полученных общих результатов найдены вероятностные распределения управляющих и выходных напряжений в одноканальном автокомпенсаторе и в усилителе с АРУ*.

2. Адаптивное радиотехническое звено с фильтром первого порядка в цепи обратной связи в общем случае описывается уравнением вида

$$dx/dt = \Phi(x, \xi(t)), \quad (1)$$

где $x(t)$ — управляющее напряжение, $\xi(t)$ — входной сигнал. Будем полагать далее, что на вход системы поступает телеграфный случайный процесс, принимающий с равной вероятностью лишь два противоположных по знаку значения ± 1 . Случайные моменты скачков $\xi(t)$ считаем распределенными по закону Пуассона (см. [10]):

$$P_n(T) = \frac{(\nu T)^n}{n!} e^{-\nu T},$$

* Заметим, что в [6, 7] были получены точные результаты для средних характеристик линейных систем с «телеграфными» флуктуациями параметров, а в [8, 9] был проведен точный спектрально-корреляционный анализ одноканального автокомпенсатора и усилителя с АРУ с «телеграфными» входными воздействиями

где $P_n(T)$ — вероятность того, что процесс n раз сменит знак в интервале длительностью T , $\nu = \langle n \rangle / T$ — средняя частота перескоков.

Попробуем при этих предположениях отыскать одномоментную стационарную (установившуюся) плотность вероятности $P_{ст}(x, \xi)$ совокупности $\{x(t), \xi(t)\}$.

Будем полагать, что функцию $\Phi(x, \xi)$ в (1) можно разложить в степенной ряд по ξ . Тогда с учетом $\xi^{2n}(t) = 1$, $\xi^{2n+1}(t) = \xi(t)$ ($n = 1, \infty$) уравнение (1) сводится к более простому

$$dx/dt = f(x) + \xi(t)g(x). \quad (2)$$

Поскольку определенный выше телеграфный случайный процесс $\xi(t)$ является марковским, то в соответствии с (2) таким же свойством обладает и совокупность $\{x(t), \xi(t)\}$. Исходя из этого, для одномоментной совместной плотности вероятности $P(x, \xi; t)$ можно записать замкнутое уравнение Колмогорова — Феллера:

$$\frac{\partial P(x, \xi; t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \{ [f(x) + \xi g(x)] P(x, \xi; t) \} + \hat{L}_T(\xi) P(x, \xi; t), \quad (3)$$

где

$$\hat{L}_T(\xi) = \nu \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi + \eta) \{ \dots \} d\eta - \hat{1} \right]$$

— кинетический оператор телеграфного сигнала* $\xi(t)$ ($\hat{1}$ — единичный оператор).

Будем интересоваться далее лишь установившимся вероятностным распределением

$$P_{ст}(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(x, \xi; t),$$

уравнение для которого легко получить из (3), если положить $\partial/\partial t = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ [f(x) + \xi g(x)] P_{ст}(x, \xi) \} + \nu [P_{ст}(x, \xi) - P_{ст}(x, -\xi)] = 0. \quad (4)$$

В силу того, что телеграфный сигнал $\xi(t)$ может принимать лишь два значения ± 1 , решение уравнения (4) следует искать в виде

$$P_{ст}(x, \xi) = C_1(x) \delta(\xi - 1) + C_2(x) \delta(\xi + 1), \quad (5)$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — некоторые неотрицательные функции x , такие, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} C_2(x) dx = 1/2. \quad (6)$$

Подставляя (5) в (4) и приравнивая нулю слагаемые при $\delta(\xi - 1)$ и $\delta(\xi + 1)$, приходим к следующей системе уравнений для функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \{ [f(x) + g(x)] C_1(x) \} + \nu [C_1(x) - C_2(x)] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \{ [f(x) - g(x)] C_2(x) \} + \nu [C_2(x) - C_1(x)] &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решая систему (7), находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

* Заметим, что телеграфный сигнал относится к классу чисто разрывных марковских процессов Колмогорова — Феллера, описываемых кинетическими операторами интегрального типа [10, 11]

$$C_1(x) = \frac{B}{g(x) + f(x)} \exp \left\{ 2\nu \int \frac{f(x) dx}{g^2(x) - f^2(x)} \right\},$$

$$C_2(x) = \frac{B}{g(x) - f(x)} \exp \left\{ 2\nu \int \frac{f(x) dx}{g^2(x) - f^2(x)} \right\} \quad (8)$$

(постоянная интегрирования B вычисляется на основании (6)). Из условий неотрицательности функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ вытекают ограничения на область изменения аргумента x в (8):

$$|f(x)| \leq |g(x)|, \quad Bg(x) \geq 0. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (5) и учитывая (9), определяем искомое установившееся вероятностное распределение $P_{ст}(x, \xi)$ совокупности $\{x(t), \xi(t)\}$:

$$P_{ст}(x, \xi) = \frac{C}{|g(x)|} \exp \left\{ 2\nu \int \frac{f(x) dx}{g^2(x) - f^2(x)} \right\} \left\{ \left[1 + \frac{f(x)}{g(x)} \right]^{-1} \delta(\xi - 1) + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right]^{-1} \delta(\xi + 1) \right\} \quad (|f(x)| \leq |g(x)|), \quad (10)$$

где $C > 0$ — константа нормировки.

Пользуясь очевидным соотношением

$$P_{ст}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{ст}(x, \xi) d\xi, \quad (11)$$

из (10) легко получить, в частности, выражение для стационарной плотности вероятности $P_{ст}(x)$ случайного процесса* $x(t)$:

$$P_{ст}(x) = \frac{2C|g(x)|}{g^2(x) - f^2(x)} \exp \left\{ 2\nu \int \frac{f(x) dx}{g^2(x) - f^2(x)} \right\} \quad (12)$$

$$(|f(x)| \leq |g(x)|).$$

С помощью (12) основной результат (10) можно представить также в виде

$$P_{ст}(x, \xi) = \frac{P_{ст}(x)}{2} \left\{ \left[1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right] \delta(\xi - 1) + \left[1 + \frac{f(x)}{g(x)} \right] \delta(\xi + 1) \right\}. \quad (13)$$

3. В дальнейшем нам понадобится также формула для плотности вероятности случайного процесса

$$z(t) = \eta(t)y(t), \quad (14)$$

где $\eta(t) = a_1 + a_2 \xi(t)$, $y(t) = A_1 + A_2 x(t)$; A_1, A_2, a_1, a_2 — некоторые константы. Преобразование (14) относится к классу нелинейных безынерционных, и, следовательно, можно воспользоваться хорошо известными формулами связи вероятностных распределений сигналов на входе и на выходе перемножителя (см., например, [13]):

$$P_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{y\eta} \left(\frac{z}{\eta}, \eta \right) \frac{d\eta}{|\eta|}. \quad (15)$$

Здесь $P_{y\eta}(y, \eta)$ — совместная плотность вероятности случайных процессов $y(t)$ и $\eta(t)$. В свою очередь, $P_{y\eta}(y, \eta)$ связана с $P_{x\xi}(x, \xi)$ следующим образом:

* Формула (12) была получена в [12] (см также [7])

$$P_{y\eta}(y, \eta) = \frac{1}{|a_2 A_2|} P_{x\xi} \left(\frac{y - A_1}{A_2}, \frac{\eta - a_1}{a_2} \right). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15) и производя замену переменной интегрирования $\eta = a_1 + a_2 \xi$, имеем

$$P_z(z) = \frac{1}{|A_2|} \int_{-\infty}^{\infty} P_{x\xi} \left(\frac{z - (a_1 + a_2 \xi) A_1}{(a_1 + a_2 \xi) A_2}, \xi \right) \frac{d\xi}{|a_1 + a_2 \xi|}.$$

Теперь остается воспользоваться полученной ранее формулой (13) и произвести интегрирование. В результате придем окончательно к

$$P_z(z) = \frac{1}{2 |A_2|} \left\{ \left[1 - \frac{f((z - \eta_2 A_1)/\eta_2 A_2)}{g((z - \eta_2 A_1)/\eta_2 A_2)} \right] \frac{P_x((z - \eta_2 A_1)/\eta_2 A_2)}{|\eta_2|} + \right. \\ \left. + \left[1 + \frac{f((z - \eta_1 A_1)/\eta_1 A_2)}{g((z - \eta_1 A_1)/\eta_1 A_2)} \right] \frac{P_x((z - \eta_1 A_1)/\eta_1 A_2)}{|\eta_1|} \right\}, \quad (17)$$

где $\eta_1 = a_1 - a_2$ и $\eta_2 = a_1 + a_2$ — значения случайного процесса $\eta(t)$.

4. Рассмотрим теперь конкретные примеры адаптивных радиотехнических систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями первого порядка.

а) Адаптивный компенсатор помех. Блок-схема указанного адаптивного устройства с корреляционными обратными связями, служащего для подавления неизвестных априори помех, представлена на рис. 1. Усредненные уравнения, описывающие процесс установления управляющих напряжений $W_{c,s}(t)$ в автокомпенсаторе, имеют вид (см. [5, 8])

$$\frac{dW_{c,s}}{dt} + \frac{1}{T_{c,s}} W_{c,s} = \frac{\gamma_{c,s}}{2T_{c,s}} \left[U U_0 \left\{ \begin{array}{l} \cos(\varphi - \varphi_0) \\ \sin(\varphi - \varphi_0) \end{array} \right\} - U^2 W_{c,s} \right]. \quad (18)$$

Здесь $U_0(t)$, $\varphi_0(t)$ и $U(t)$, $\varphi(t)$ — огибающие и фазы колебаний, поступающих на систему, $x_0(t) = U_0(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0(t))$, $x(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Сделаем далее, как и в [8], ряд упрощающих предположений.

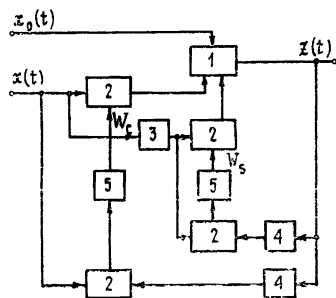


Рис 1 Функциональная схема квадратурного автокомпенсатора помех.

1 — сумматор, 2 — множители, 3 — фазовращатель на $\pi/2$, 4 — усилители обратной связи (с коэффициентами усиления γ_c , γ_s), 5 — фильтры низких частот (с постоянными времени T_c , T_s)

1) Будем пренебрегать неполной корреляцией между огибающими колебаний $x_0(t)$ и $x(t)$, полагая

$$U_0(t) = k_0 U(t).$$

2) Разность фаз считаем величиной нефлуктуирующей.

$$\varphi(t) - \varphi_0(t) = \delta = \text{const.}$$

3) Предположим, что оба канала (для $W_c(t)$ и $W_s(t)$) автокомпенсатора выполнены из идентичных элементов: $T_c = T_s = T$, $\gamma_c = \gamma_s = \gamma$.

Эти допущения позволяют вместо двух уравнений (18) рассматривать в установившемся режиме лишь одно — для нормированного управляющего напряжения $W(t) = W_c(t)/k_0 \cos \delta$, $W_s(t)/k_0 \sin \delta$:

$$T \frac{dW}{dt} + \left[1 + \frac{\gamma}{2} U^2(t) \right] W = \frac{\gamma}{2} U^2(t). \quad (19)$$

С помощью выведенных выше в п. 2 и 3 соотношений легко провести точный вероятностный анализ подавления автокомпенсатором помехи с телеграфной статистикой огибающей (см. рис. 2). В самом деле,

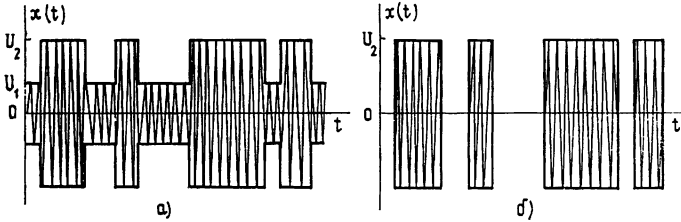


Рис. 2.

для этого следует представить телеграфный процесс $U^2(t)$, принимающий два значения U_1^2 и U_2^2 ($U_2 > U_1 \geq 0$), через стандартный телеграфный сигнал $\xi(t)$ ($\xi(t) = \pm 1$):

$$U^2(t) = \langle U^2 \rangle [1 + \mu \xi(t)]. \quad (20)$$

Здесь $\langle U^2 \rangle = (U_1^2 + U_2^2)/2$, $\mu = (1 - m^2)/(1 + m^2)$, $m = U_1/U_2$, μ — глубина амплитудной модуляции. Подставляя (20) в (19) и вводя безразмерный параметр $\beta = (\gamma/2) \langle U^2 \rangle$, имеющий смысл эффективной мощности помехи, приведем уравнение (19) к виду (2):

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{T} [\beta - (1 + \beta)W] + \xi(t) \frac{\beta \mu}{T} (1 - W).$$

Для отыскания стационарной плотности вероятности $P_{ст}(W)$ нормированного управляющего напряжения осталось положить в (12)

$$f(x) = \frac{1}{T} [\beta - (1 + \beta)x], \quad g(x) = \frac{\beta \mu}{T} (1 - x) \quad (21)$$

и произвести несложные вычисления. В результате получим

$$P_{ст}(W) = \frac{(1 + \beta)(1 - W)(W - W_1)^{s_1 - 1} (W_2 - W)^{s_2 - 1}}{B(s_1, s_2) (W_2 - W_1)^{s_1 + s_2 - 1}} \quad (22)$$

где

$$B(s_1, s_2) = \frac{\Gamma(s_1) \Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1 + s_2)} = \int_0^1 y^{s_1 - 1} (1 - y)^{s_2 - 1} dy$$

— бета-функция, $\Gamma(s)$ — гамма-функция,

$$W_1 = \frac{\gamma U_1^2}{2} \left/ \left(1 + \frac{\gamma U_1^2}{2} \right) \right., \quad W_2 = \frac{\gamma U_2^2}{2} \left/ \left(1 + \frac{\gamma U_2^2}{2} \right) \right.,$$

$$s_{\{1, 2\}} = 1/2\alpha [1 + \beta(1 \mp \mu)], \quad \alpha = \tau_{корр}/T = 1/2\gamma T$$

— относительное время корреляции помехи.

Как было показано в [8], в установившемся режиме огибающая $V_0(t)$ нескомпенсированной помехи $z(t)$ на выходе системы связана с $U(t)$ и $W(t)$ простым соотношением

$$V_0(t) = U_0(t) [1 - W(t)] = k_0 U(t) [1 - W(t)]. \quad (23)$$

Сравнивая (23) и (14), видим, что для определения вероятностного распределения нормированной на k_0 огибающей $V(t) = V_0(t)/k_0$ необходимо положить в (17) $\eta(t) = U(t)$, $x(t) = W(t)$, $A_1 = 1$, $A_2 = -1$ и учесть соотношения (21), (22). В итоге найдем*

$$P_{\text{ср}}(V) = \frac{1 + \beta}{4\alpha\beta\mu B(s_1, s_2) [2\alpha(s_1 - s_2)]^{s_1+s_2-1}} \left\{ \frac{(V-V_1')^{s_2} (V_1''-V)^{s_1-1}}{s_2 U_1^{s_1+s_2}} \Pi_{V_1', V_1''}(V) + \frac{(V-V_2')^{s_2-1} (V_2''-V)^{s_1}}{s_1 U_2^{s_1+s_2}} \Pi_{V_2', V_2''}(V) \right\}, \quad (24)$$

где $\Pi_{V_1, V_2}(V) = 1(V - V_1) 1(V_2 - V)$, $1(V) = \begin{cases} 1, & V \geq 0 \\ 0, & V < 0 \end{cases}$ — единичная функция, $V_1' = U_1/(1 + \gamma U_1^2/2)$, $V_1'' = U_1/(1 + \gamma U_1^2/2)$, $V_2' = U_2/(1 + \gamma U_2^2/2)$, $V_2'' = U_2/(1 + \gamma U_2^2/2)$.

В частном случае $U_1 = 0$ ($\mu = 1$) из (22) и (24) получаем вероятностные характеристики подавления автокомпенсатором импульсной помехи (см. рис. 2б)

$$P_{\text{ср}}(W) = \frac{(1 + \beta)(1 - W) W^{s_1-1} (W_2 - W)^{s_2-1}}{B(s_1, s_2) W_2^{s_1+s_2+1}} \quad (0 \leq W \leq W_2),$$

$$P_{\text{ср}}(V) = \frac{1}{2} \delta(V) + \frac{1 + \beta}{4\alpha\beta B(s_1, s_2) [2\alpha(s_1 - s_2)]^{s_1+s_2-1}} \times \times \frac{(V - V_2')^{s_2-1} (U_2 - V)^{s_1}}{s_1 U_2^{s_1+s_2}} \Pi_{V_2', U_2}(V).$$

Здесь уже $s_1 = 1/2\alpha$, $s_2 = 1/2\alpha(1 + 2\beta)$.

б) Усилитель с АРУ. Широкополосный усилитель с автоматической регулировкой усиления (АРУ), блок-схема которого приведена на рис. 3, можно описать тремя уравнениями вида**

$$\tau_{\text{АРУ}} \frac{dE_p}{dt} + E_p = D(V), \quad V = \kappa U, \quad \kappa = \kappa(E_p), \quad (25)$$

где $U(t)$ и $V(t)$ — огибающие входного $u(t)$ и выходного $v(t)$ синусоидальных сигналов соответственно. Исключая из (25) $E_p(t)$ и $V(t)$, получаем одно нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка для коэффициента усиления $\kappa(t)$:

$$\tau_{\text{АРУ}} \frac{d\kappa}{dt} + \left[\frac{d}{d\kappa} \ln E_p(\kappa) \right]^{-1} = \frac{D(\kappa U(t))}{E_p(\kappa)}. \quad (26)$$

* Необходимо отметить, что найденного приближенным методом в [4] выражения для плотности вероятности коэффициента подавления помехи $\epsilon = 1 - W$ в общем случае недостаточно для анализа эффективности работы компенсационной схемы

** Для простоты рассматривается схема АРУ без напряжения задержки (см. [3]).

Если огибающая $U(t)$ поступающего на вход усилителя с АРУ колебания представляет собой телеграфный случайный процесс (см. рис. 2), то, в принципе, не составляет труда по изложенной выше методике определить из (26) установившееся вероятностное распределение $x(t)$. Мы же для наглядности проанализируем далее лишь простейший случай, когда характеристика детектора $D(V)$ и закон регулирования $x(E_p)$ являются линейными:

$$D(V) = V, \quad x(E_p) = x_0 - b E_p \quad (b > 0). \quad (27)$$

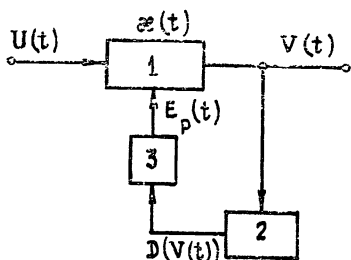


Рис 3 Блок-схема усилителя с АРУ
1 — широкополосный усилитель с регулируемым коэффициентом усиления $x(t)$, 2 — амплитудный детектор, 3 — низкочастотный фильтр первого порядка с постоянной времени $\tau_{\text{АРУ}}$, $E_p(t)$ — напряжение регулирования

Подставляя (27) в (26), приходим к линейному уравнению для нормированного коэффициента усиления $K(t) = x(t)/x_0$:

$$\tau_{\text{АРУ}} \frac{dK}{dt} + [1 + bU(t)]K = 1. \quad (28)$$

Выразим телеграфный процесс $U(t)$ со значениями U_1 и U_2 ($U_2 > U_1 \geq 0$) через стандартный телеграфный сигнал $\xi(t)$ ($\xi(t) = \pm 1$):

$$U(t) = \langle U \rangle [1 + r \xi(t)]. \quad (29)$$

Здесь $\langle U \rangle = (U_1 + U_2)/2$, $r = (1 - m)/(1 + m)$, $m = U_1/U_2$. В соответствии с (2), (14), (25), (28) и (29) для отыскания стационарных плотностей вероятности нормированного коэффициента усиления $K(t)$ и нормированной на x_0/b^* огибающей $R(t) = bV(t)/x_0$ выходного сигнала достаточно положить в (12), (17)

$$f(x) = \frac{1}{\tau_{\text{АРУ}}} [1 - (1 + b \langle U \rangle)x], \quad g(x) = -\frac{b \langle U \rangle r x}{\tau_{\text{АРУ}}},$$

$$\eta(t) = U(t), \quad x(t) = K(t), \quad A_1 = 0, \quad A_2 = b$$

и произвести необходимые вычисления. В результате можно прийти к следующим соотношениям для $P_{\text{ст}}(K)$ и $P_{\text{ст}}(R)$:

$$P_{\text{ст}}(K) = \frac{(1 + b \langle U \rangle) K (K - K_2)^{\rho_1 - 1} (K_1 - K)^{\rho_2 - 1}}{B(\rho_1, \rho_2) (K_1 - K_2)^{\rho_1 + \rho_2 - 1}} \quad (30)$$

$$(K_2 \leq K \leq K_1);$$

$$P_{\text{ст}}(R) = \frac{1 + b \langle U \rangle}{4\alpha b \langle U \rangle r B(\rho_1, \rho_2) [2\alpha(\rho_2 - \rho_1)]^{\rho_1 + \rho_2 - 1}} \times \quad (31)$$

$$\times \left\{ \frac{(R - R_{11})^{\rho_1} (R_{12} - R)^{\rho_2 - 1}}{\rho_1 (bU_1)^{\rho_1 + \rho_2}} \Pi_{R_{11}, R_{12}}(R) + \dots \right\}$$

* Величина x_0/b является предельным значением средней огибающей выходного колебания при $U_1 \neq 0$ ($r \neq 1$): $\langle V \rangle \rightarrow x_0/b$ при $\langle U \rangle \rightarrow \infty$

$$+ \frac{(R - R_{21})^{\rho_1 - 1} (R_{22} - R)^{\rho_2}}{\rho_2 (bU_2)^{\rho_1 + \rho_2}} \Pi_{R_{21}, R_{22}}(R) \Big\},$$

где

$$\alpha = \tau_{\text{кор}}/\tau_{\text{АРУ}} = 1/2\nu\tau_{\text{АРУ}}, \quad \rho_{\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}} = 1/2\alpha [1 + b \langle U \rangle (1 \pm r)],$$

$$K_1 = (1 + bU_1)^{-1}, \quad K_2 = (1 + bU_2)^{-1}, \quad R_{11} = bU_1/(1 + bU_2),$$

$$R_{12} = bU_1/(1 + bU_1), \quad R_{21} = bU_2/(1 + bU_2), \quad R_{22} = bU_2/(1 + bU_1).$$

В случае импульсного сигнала ($U_1 = 0, r = 1$) формулы (30) и (31) несколько упрощаются и принимают вид

$$P_{\text{ст}}(K) = \frac{(1 + bU_2/2) K (K - K_2)^{\rho_1 - 1} (1 - K)^{\rho_2 - 1}}{B(\rho_1, \rho_2) (1 - K_2)^{\rho_1 + \rho_2 - 1}} \quad (K_2 \leq K \leq 1),$$

$$P_{\text{ст}}(R) = \frac{1}{2} \delta(R) + \frac{1 + bU_2/2}{2\alpha bU_2 B(\rho_1, \rho_2) [2\alpha(\rho_2 - \rho_1)]^{\rho_1 + \rho_2 - 1}} \times \\ \times \frac{(R - R_{21})^{\rho_1 - 1} (bU_2 - R)^{\rho_2}}{\rho_2 (bU_2)^{\rho_1 + \rho_2}} \Pi_{R_{21}, bU_2}(R),$$

где уже $\rho_1 = 1/2\alpha(1 + bU_2), \quad \rho_2 = 1/2\alpha.$

5. Как показывает анализ, характеристики сигналов в автокомпенсаторе (22), (24) и в усилителе с АРУ (30), (31) очень схожи. Исходя из этого, далее рассматриваются стационарные плотности вероятности нормированного коэффициента усиления $P_{\text{ст}}(K)$ и огибающей выходного сигнала $P_{\text{ст}}(R)$ только для схемы АРУ. Трансформация этих распределений изучается в зависимости от двух безразмерных параметров $\alpha = \tau_{\text{кор}}/\tau_{\text{АРУ}}$ и $b \langle U \rangle$, имеющих смысл относительного времени корреляции и среднего уровня входного колебания, при фиксированной глубине амплитудной модуляции ($m = 1/2, r = 1/3$)*.

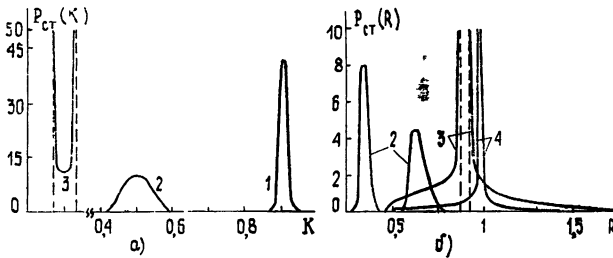


Рис. 4. Вероятностные распределения нормированного коэффициента усиления $K(t)$ (а) и нормированной огибающей $R(t) = bV(t)/x_0$ выходного колебания (б) при $\alpha = \tau_{\text{кор}}/\tau_{\text{АРУ}} = 0,1$ и $m = U_1/U_2 = 0,5$.

Кривые приведены для разных значений среднего уровня входного сигнала $b \langle U \rangle$: 1 — $b \langle U \rangle = 0,1$, 2 — $b \langle U \rangle = 1$, 3 — $b \langle U \rangle = 10$, 4 — $b \langle U \rangle = 100$.

На рис. 4 приведены графики распределений $P_{\text{ст}}(K)$ и $P_{\text{ст}}(R)$, построенные по точным формулам (30) и (31), для разных значений $b \langle U \rangle$ при $\alpha = 0,1$. Поведение данных характеристик легко объяснить с помощью представленных на рис. 5 осциллограмм напряжений в уси-

* Заметим, что в [3] с помощью метода ЭФП изучалось вероятностное распределение коэффициента усиления и выходного сигнала в схеме АРУ в предельном случае $\alpha \rightarrow 0$.

лителе с АРУ. В соответствии с уравнением (28) и рис. 5 вид реализаций $K(t)$ и $R(t)$ зависит от соотношения между временем корреляции огибающей входного сигнала $\tau_{кор}$ и эффективной постоянной времени (временем быстрогодействия) системы $T_{эфф} \approx \tau_{АРУ} / (1 + b \langle U \rangle)$, т. е. согласно вышепринятым обозначениям от параметра $\alpha(1 + b \langle U \rangle)$. В том случае, когда $\alpha(1 + b \langle U \rangle) \ll 1$, схема АРУ, обладая большой инерционностью, «не обрабатывает» флуктуации $U(t)$, и распределение $K(t)$ близко к нормальному (см. рис. 5а и кривую 1 на рис. 4а). Огибающая $R(t)$ при этом сохраняет информацию о законе амплитудной модуляции поступающего на вход колебания (см. рис. 5а и кривые 2 на рис. 4б).

С увеличением среднего уровня входного сигнала $\langle U \rangle$ уменьшается эффективная постоянная времени системы, и усилитель с АРУ при $\alpha(1 + b \langle U \rangle) \gg 1$ начинает отслеживать флуктуации $U(t)$ (см. рис. 5б). Форма вероятностных распределений нормированного коэффициента усиления $K(t)$ и нормированной огибающей выходного колебания $R(t)$ при этом качественно изменяется. Плотность вероятности $P_{ст}(K)$ теперь уже сосредоточена вблизи значений K_2 и K_1 и близка к распределению телеграфного процесса $U(t)$ (см. кривую 3 на рис. 4а), а $P_{ст}(R)$ вырождается при $b \langle U \rangle \gg 1$ в два узких пика, расположенных около независимого от уровня входного сигнала значения $R=1$ (см. кривые 3, 4 на рис. 4б). Таким образом, с увеличением $\langle U \rangle$ система АРУ не только

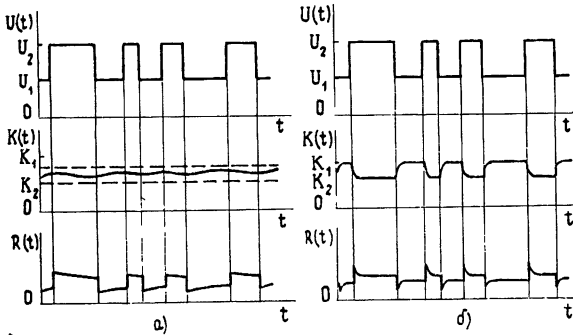


Рис 5. Осциллограммы напряжений в усилителе с АРУ.
а) — случай $\alpha(1 + b \langle U \rangle) \ll 1$, б) — случай $\alpha(1 + b \langle U \rangle) \geq 1$.

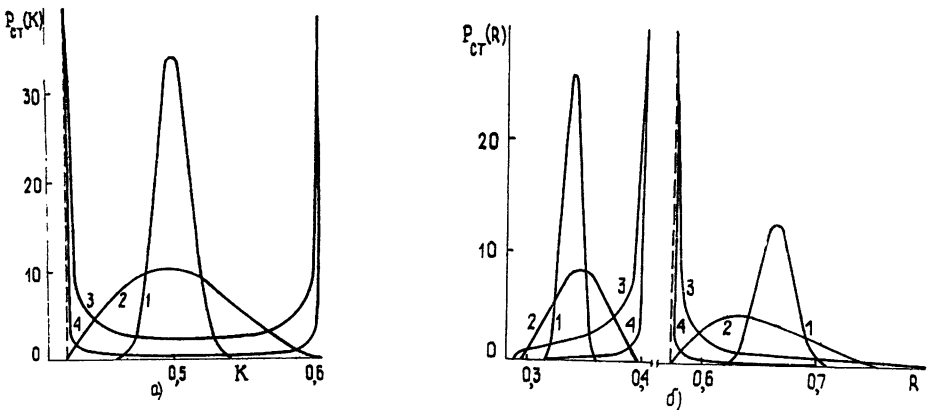


Рис 6. Вероятностные распределения нормированного коэффициента усиления $K(t)$ (а) и нормированной огибающей $R(t) = bV(t)/x_0$ выходного сигнала (б) при $b \langle U \rangle = 1$ и $m = U_1/U_2 = 0,5$

Кривые приведены для разных значений $\alpha = \tau_{кор}/\tau_{АРУ}$: 1 — $\alpha = 0,01$, 2 — $\alpha = 0,1$, 3 — $\alpha = 1$, 4 — $\alpha = 10$

выводит среднее значение огибающей $V(t)$ выходящего колебания на постоянный уровень (ее основное действие), но и эффективно «отрабатывает» флуктуации $U(t)$. Смещение распределений $P_{ст}(K)$ влево на рис. 4а объясняется особенностью работы схемы АРУ: чем больше уровень входного сигнала, тем в среднем меньше коэффициент его усиления. Наибольшие флуктуации напряжения $K(t)$ и $R(t)$ испытывают при $b \langle U \rangle \sim 1$.

Рис 6а, б иллюстрируют изменение формы распределений $P_{ст}(K)$ и $P_{ст}(R)$ в зависимости от значения относительного времени корреляции $\alpha = \tau_{кор}/\tau_{АРУ}$ при постоянном уровне входного сигнала $b \langle U \rangle = 1$. Как видно из рис. 6, средние значения $\langle K \rangle$ и $\langle R \rangle$ практически не зависят от α , дисперсия флуктуаций $K(t)$ увеличивается с ростом α , а флуктуации $R(t) = bV(t)/z_0$, наоборот, уменьшаются. Качественное изменение формы кривых плотностей вероятности происходит при значениях параметра $\alpha(1 + b \langle U \rangle) \approx 1$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бакут П. А и др. Вопросы статистической теории радиолокации — М Сов радио, 1963 — Т 1
- 2 Ундроиу Б и др — ТИИЭР, 1967, 55, № 12, с 78
- 3 Григорьев Л Н, Иванов С П — Радиотехника и электроника, 1973, 18, № 2, с 251, — В сб Вопросы радиоэлектроники Сер. Общетеχνическая (ОТ), 1975, вып 6, с 3.
- 4 Чечик Л А — Изв вузов — Радиоэлектроника, 1975, 18, № 4, с. 67
- 5 Мальцев А. А., Музычук О В, Позументов И. Е — Радиотехника и электроника, 1978, 23, № 7, с 1401
- 6 Bourret R., Frisch U, Pouquet A — Physica, 1973, 65, № 2, p. 303.
- 7 Кляцкин В И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах — М: Наука, 1980
- 8 Дубков А А, Мальцев А А — Изв вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 3, с 353
- 9 Дубков А. А., Мальцев А А. — Радиотехника и электроника, 1980, 25, № 11, с 2371.
- 10 Тихонов В И, Миронов М А. Марковские процессы — М: Сов радио, 1977
11. Дубков А. А., Мальцев А А — Изв вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 1, с 107
- 12 Кляцкин В И — Изв вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 4, с 562
13. Левин Б Р. Теоретические основы статистической радиотехники — М Сов. радио, 1974 — Кн 1

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
2 июня 1980 г

PROBABLE CHARACTERISTICS OF SOME STOCHASTIC SYSTEMS WITH FEEDBACK

G. N. Bochkov, A A Dubkov, A A Mal'tsev

By the Markov apparatus of integro-differential Kolmogorov — Feller equations exact expressions have been obtained and analysed for densities of the strength probability in autocompensator and in the amplifier with AAR occurred when sinusoidal signals with telegraph law of a random amplitude modulation pass through them