ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 8 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 538.56

СРЕДНЕЕ ОТ УПОРЯДОЧЕННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ФУНКЦИОНАЛОВ

С. А. Дягилев

Получено обобщение ранее известных теорем о среднем от произведения двух функционалов от коммутирующих случайных процессов (в частности, известной теоремы Фурутцу — Новикова) на случай некоммутирующих случайных процессов. Найденные формулы проиллюстрированы на конкретном физическом примере.

Решение многих статистических задач существенно упрощается использованием теорем о среднем от произведения функционалов случайных процессов (в частности, известной теоремы Фурутцу — Новикова) [1–7]. Вместе с тем в литературе отсутствует обобщение этих теорем на случай некоммутирующих случайных процессов несмотря на то, что интерес к изучению их статистики в последние годы усилился в связи с разнообразными задачами квантовой механики и статистической физики [8–11]. В настоящей работе получено обобщение указанных выше теорем для случая среднего от упорядоченного произведения двух функционалов от некоммутирующих случайных процессов.

Функционал $\tilde{N}[x(\tau)]$ мы будем называть упорядоченным и обозначать $\check{Q}N[x(\tau)]$, если он может быть представлен в виде ряда*

$$\tilde{N}[x(\tau)] = \check{Q}N[x(\tau)] = N[0] + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int dt_1 \dots$$
$$\dots dt_k \check{Q} x(t_1) \dots x(t_k) \left. \frac{\delta^{(k)} N[x(\tau)]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_k)} \right|_{\tilde{x}(t)=0}, \tag{1}$$

где $\check{Q}$ — оператор упорядочивания, действующий на множестве произведений вида $x(t_1) \dots x(t_k)$ и расставляющий их в определенном порядке в зависимости от аргумента (примером может служить хорошо известный хронологический оператор Дайсона T), $N[x(\tau)]$ — некоторый, вообще говоря, произвольный функционал $x(\tau)$ (необходимое число раз функционально дифференцируемый), в котором $x(t_i)$ считаются коммутативными. Заметим, что данное определение упорядоченного функционала является естественным обобщением упорядоченных экспонент Кубо [8]. Упорядоченным произведением двух функционалов $F[x(\tau)]$ и $R[x(\tau)]$ мы тогда будем называть функционал $\check{Q}F[x(\tau)]\, R[x(\tau)]$. Из определения (1) следует, что под знаком оператора упорядочивания $\check{Q}$ функционалы $F[x(\tau)]$ и $R(x(\tau)]$ можно

* Здесь и далее, когда у интеграла не указаны пределы, предполагается, что они бесконечны.

рассматривать как классические (т. е. как функционалы от коммутирующих случайных процессов). Вычисление среднего от упорядоченного произведения функционалов $\langle \check{Q} F[x(\tau)] R[x(\tau)] \rangle$ будет основываться на несколько видоизменяемом методе вычисления корреляции классических функционалов, предложенном Кляцкиным [4]. С этой целью рассмотрим следующее среднее от упорядоченного произведения функционалов $\langle \check{Q} F[x(\tau) + \eta_1(\tau)] R[x(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle$, где $\eta_{1,2}(\tau)$ — некоторые, вообще говоря, произвольные вспомогательные детерминированные фукции. Разлагая функционалы F и R в функциональные ряды Тейлора по $x(\tau)$, для корреляции $\langle \check{Q} F[x(\tau) + \eta_1(\tau)] R[x(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle$ получим выражение

$$\langle \check{Q} F[x(\tau) + \eta_1(\tau)] R[x(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle = \left\langle \check{Q} \exp\left\{ \int d\tau x(\tau) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times (\delta/\delta\eta_1(\tau) + \delta/\delta\eta_2(\tau)) \right\} \right\rangle F[\eta_1(\tau)] R[\eta_2(\tau)]. \tag{2}$$

Заметим теперь, что согласно работе [12] порождающий функционал $\left\langle \check{Q} \exp\left\{ \int d\tau x(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle$ (где $v(\tau)$ — произвольная детерминированная функция) можно записать через Q — упорядоченные кумулянты $\langle \check{Q} x(t_1) \ldots x(t_k) \rangle_c$:

$$\left\langle \check{Q} \exp\left\{ \int d\tau x(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle = \check{P} \exp\{\theta[v(\tau)]\}, \tag{3}$$

где

$$\theta[v(\tau)] = \sum_1^{\infty} \frac{1}{k!} \int dt_1 \ldots dt_k \langle \check{Q} x(t_1) \ldots x(t_k) \rangle_c \times$$
$$\times v(t_1) \ldots v(t_k). \tag{4}$$

Здесь $\check{P}$ — оператор упорядочивания Q-кумулянтов, которые, вообще говоря, некоммутативны*. Соотношения (3) и (4) позволяют переписать равенство (2) в следующем виде:

$$\langle \check{Q} F[x(\tau) + \eta_1(\tau)] R[x(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle =$$
$$= \check{P} \exp\{\theta[\delta/\delta\eta_1(\tau) + \delta/\delta\eta_2(\tau)]\} F[\eta_1(\tau)] R[\eta_2(\tau)]. \tag{5}$$

Используя для преобразования правой части (5) равенства

$$\check{P} \exp\{\theta[\delta/\delta\eta_1(\tau) + \delta/\delta\eta_2(\tau)] - \theta[\delta/\delta\eta_1(\tau)] - \theta[\delta/\delta\eta_2(\tau)]\} \times$$
$$\times \exp\{\theta[\delta/\delta\eta_1(\tau)]\} \exp\{\theta[\delta/\delta\eta_2(\tau)]\} =$$
$$= \check{P} \exp\{\theta[\delta/\delta\eta_1(\tau) + \delta/\delta\eta_2(\tau)] - \theta[\delta/\delta\eta_1(\tau)] -$$
$$- \theta[\delta/\delta\eta_2(\tau)]\} \check{P} \exp\{\theta[\delta/\delta\eta_1(\tau)]\} \check{P} \exp\{\theta[\delta/\delta\eta_2(\tau)]\} \tag{6}$$

и

$$\check{P} \exp\{\theta[\delta/\delta\eta(\tau)]\} M[\eta(\tau)] = \langle \check{Q} M[x(\tau) + \eta(\tau)] \rangle, \tag{7}$$

* Необходимость введения такого оператора была впервые отмечена в работе [12]

окончательно приходим к следующему выражению:

$$\langle \check{Q} F[x(\tau)+\eta_1(\tau)] R[x(\tau)+\eta_2(\tau)]\rangle =$$
$$= \check{P}\{\exp\{\theta[\delta/\delta\eta_1(\tau)+\delta/\delta\eta_2(\tau)] - \theta[\delta/\delta\eta_1(\tau)] - \tag{8}$$
$$-\theta[\delta/\delta\eta_2(\tau)]\}\langle \check{Q} F[x(\tau)+\eta_1(\tau)]\rangle \langle \check{Q} R[x(\tau)+\eta_2(\tau)]\rangle\}_c.$$

Здесь символ c означает, что все средние, стоящие в фигурных скобках, необходимо выразить через Q-кумулянты, поскольку только в этом случае будет определено действие оператора $\check{P}$. Формула (8) позволяет представить среднее значение от упорядоченного произведения функционалов через произведение средних значений самих упорядоченных функционалов. В случае коммутативного процесса $x(\tau)$ можно положить $\check{P} = \check{Q} = 1$, а также убрать символ c у фигурных скобок (так как кумулянты будут уже коммутативны), и формула (8) перейдет в классическую [4].

Рассмотрим частный случай линейного функционала $F[x(\tau)] = x(t')$. В этом случае формулу (8) можно преобразовать к виду

$$\langle \check{Q} x(t') R[x(\tau)]\rangle = \check{P} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\int dt_1 \ldots dt_{k-1} \times$$
$$\times \langle \check{Q} x(t)\, x(t_1) \ldots x(t_{k-1})\rangle_c \left\{\left\langle \check{Q} \frac{\delta^{(k-1)} R[x(\tau)]}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_{k-1})}\right\rangle\right\}_c. \tag{9}$$

В соотношении (9) мы положим вспомогательные функции $\eta_{1,2}(\tau) = 0$.

Далее мы будем использовать обобщение (9) на случай двумерного гауссова процесса (все Q-кумулянты выше второго порядка обращаются в нуль) с нулевыми средними и коммутирующими кумулянтами ($\check{P} = 1$):

$$\langle \check{Q} x_l(t') R[x_1(\tau), x_2(\tau)]\rangle = \sum_{j=1}^{2} \int d\tau \langle \check{Q} x_l(t')\, x_j(\tau)\rangle_c \times$$
$$\times \left\langle \check{Q} \frac{\delta R[x_1(\tau), x_2(\tau)]}{\delta x_j(\tau)}\right\rangle. \tag{10}$$

Равенство (10) является обобщением известной формулы Фурутцу — Новикова [1–3] на случай некоммутативных случайных процессов.

Отметим, что в прикладных задачах может встретиться среднее от произведения двух упорядоченных функционалов $\langle\{\check{Q}_1 F[x(\tau)]\} \times \{\check{Q}_2 R[x(\tau)]\}\rangle$ (где $\check{Q}_1$ и $\check{Q}_2$ — различные операторы упорядочивания), однако легко показать, что и эту корреляцию можно свести к вышеизложенной схеме. Действительно, рассмотрим следующий вспомогательный двумерный функционал $\{\check{Q}_1 F[x_1(\tau)]\}\{\check{Q}_2 R[x_2(\tau)]\}$ с некоммутативными случайными процессами $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$. Введем оператор упорядочивания $\check{Q}_3$, обладающий следующими свойствами:

$$\check{Q}_3 = \begin{cases} \check{Q}_1 \text{ на множестве произведений } x_1(t_1) \ldots x_1(t_k), \\ \check{Q}_2 \text{ на множестве произведений } x_2(t_1) \ldots x_2(t_k), \\ \text{всегда располагает } x_2(t_\alpha) \text{ правее } x_1(t_\beta). \end{cases} \tag{11}$$

Тогда среднее от вспомогательного функционала можно переписать как $\check{Q}_3$ — упорядоченное произведение функционалов

$$\langle \{\check{Q}_1 F[x_1(\tau)]\} \{\check{Q}_2 R[x_2(\tau)]\} \rangle = \langle \check{Q}_3 F[x_1(\tau)] R[x_2(\tau)] \rangle \qquad (12)$$

и использовать найденные формулы (8), (9) (которые легко обобщить на двумерный случай), а в конце расчета положить $x_1(\tau) = x_2(\tau) = x(\tau)$. При этом, однако, необходимо иметь в виду, что Q_3-кумулянты двумерного процесса $\{x_1(t), x_2(t)\}$ при возвращении к исходным обозначениям будут, вообще говоря, выражаться не только через Q_1 и Q_2 упорядоченные кумулянты исходного процесса $x(t)$, но и через так называемые сложные кумулянты (подобно рассмотренным в [12]). Сложные кумулянты не выражаются через Q-кумулянты, но тем не менее также являются мерой статистической связи.

Сделаем еще одно замечание по поводу гауссовости некоммутативных случайных процессов. Ниоткуда не следует, что если Q_1-кумулянты выше второго порядка процесса $x(t)$ равны нулю, то и Q_2-кумулянты того же процесса ($\check{Q}_1 \neq \check{Q}_2$) выше второго порядка тоже равны нулю. Поэтому сделанное ранее замечание по поводу гауссовости двумерного процесса (перед формулой (10)) касалось лишь Q-кумулянтов. Однако можно определить процесс $x(t)$ как гауссовый «абсолютно» при условии, что все Q-кумулянты (с любым возможным оператором упорядочивания $\check{Q}$), а также все сложные кумулянты выше второго порядка равны нулю.

Проиллюстрируем все сказанное на следующем физическом примере. На замкнутую квантовую физическую систему с начальной матрицей плотности ρ_0 и гамильтонианом H_0 накладывается в $t = 0$ динамическое возмущение $V = -xf(t)$, где $f(t)$ — внешняя классическая сила, а x — «координата» системы. Полный гамильтониан H системы для $t > 0$, таким образом, будет равен $H = H_0 - xf(t)$. Эволюция усредненного гайзенберговского оператора $\langle x^h(t) \rangle$ дается соотношением (см. [13], стр. 57)

$$\langle x^h(t) \rangle = \mathrm{Sp}\, \rho_0 x^h(t) = \Big\langle \Big\{ \tilde{T} \exp\Big[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau\, x(\tau) f(\tau) \Big] \Big\} \Big\{ T x(t) \times \times \exp\Big[\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau\, x(\tau) f(\tau) \Big] \Big\} \Big\rangle, \qquad (13)$$

где T и $\tilde{T}$ — хронологический и антихронологический операторы упорядочивания Дайсона соответственно, а $x(\tau) = \exp[(iH_0\tau)/\hbar]\, x \times \exp[-(iH_0\tau)/\hbar]$ — оператор x в представлении взаимодействий. Ниже будем полагать, что $x(t)$ — «абсолютно» гауссов случайный процесс с нулевым средним. Согласно замечанию, предшествующему формуле (12), рассмотрим вспомогательный усредненный упорядоченный функционал

$$B[f_1(\tau), f_2(\tau)] = \Big\langle \check{Q}_3 x_2(t) \exp\Big\{ \int_0^t d\tau\, [x_1(\tau) f_1(\tau) + x_2(\tau) f_2(\tau)] \Big\} \Big\rangle, \qquad (14)$$

в котором $-i\hbar^{-1}x(t)$ и $i\hbar^{-1}x(t)$ заменены на $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответственно и представляют собой двумерную «абсолютно» гауссову совокупность; введены вспомогательные детерминированные функции $f_{1,2}(t)$, а $\check{Q}_3$ определен в соответствии с (11) ($\check{Q}_1 = \tilde{T}$, $\check{Q}_2 = T$). Вычисляя (14) с помощью (10), приходим к следующему выражению*:

* При конечных пределах интегрирования $[0, t]$ формула (10) остается в силе для $t' < t$, $\tau \leqslant t$, а также для $t' = t$ в случаях не δ-коррелированных процессов [4]

$$B\,[f_1(\tau),\, f_2(\tau)] = \Phi[f_1(u),\, f_2(u)] \int\limits_0^t d\tau\, [\langle \overset{\vee}{Q}_3 x_2(t)\, x_1(\tau)\rangle_c \times$$
$$\times f_1(\tau) + \langle \overset{\vee}{Q}_3 x_2(t)\, x_2(\tau)\rangle_c f_2(\tau)], \tag{15}$$

где $\Phi[f_1(u),\, f_2(u)]$ — двумерный порождающий функционал, который, выраженный через Q_3-кумулянты, принимает вид

$$\Phi[f_1(u),\, f_2(u)] = \left\langle \overset{\vee}{Q}_3 \exp\left\{\int\limits_0^t du [x_1(u) f_1(u) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + x_2(u)\, f_2(u)]\right\}\right\rangle = \exp\left\{\int\limits_0^t \int\limits_0^t du_1\, du_2 \left[\frac{1}{2} \left\langle \overset{\vee}{Q}_3\, x_1(u_1)\, x_1(u_2)\right\rangle_c \times\right.\right.$$
$$\times f_1(u_1) f_1(u_2) + \frac{1}{2} \left\langle \overset{\vee}{Q}_3 x_2(u_1)\, x_2(u_2)\right\rangle_c f_2(u_1) f_2(u_2) + \tag{16}$$
$$\left.\left. + \langle \overset{\vee}{Q}_3 x_1(u_1)\, x_2(u_2)\rangle_c f_1(u_1) f_2(u_2)\right]\right\}.$$

Отсюда нетрудно найти следующие соотношения между Q_3-кумулянтами и Q_3-моментами:

$$\langle \overset{\vee}{Q}_3 x_1(t_1)\, x_1(t_2)\rangle_c = \langle \tilde{T} x_1(t_1)\, x_1(t_2)\rangle, \quad \langle \overset{\vee}{Q}_3 x_2(t_1)\, x_2(t_2)\rangle_c =$$
$$= \langle T x_2(t_1)\, x_2(t_2)\rangle, \quad \langle \overset{\vee}{Q}_3 x_1(t_1)\, x_2(t_2)\rangle_c = \langle x_1(t_1)\, x_2(t_2)\rangle. \tag{17}$$

Подставляя (17) в правую часть (16), а то в свою очередь в правую часть (15) и возвращаясь к прежним обозначениям, для $\langle x^h(t)\rangle$ находим

$$\langle x^h(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar^2} \int\limits_0^t \int\limits_0^t d\tau_1\, d\tau_2 \left[\frac{1}{2} \left\langle \tilde{T} x(\tau_1)\, x(\tau_2)\right\rangle + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2} \langle T x(\tau_1)\, x(\tau_2)\rangle - \langle x(\tau_1)\, x(\tau_2)\rangle\right] f(\tau_1) f(\tau_2)\right\} \times \tag{18}$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \varphi(t, \tau) f(\tau),$$

где $\varphi(t, \tau) = i\hbar^{-1} \langle [x(t),\; x(\tau)]\rangle\, \vartheta(t-\tau)\, \vartheta(\tau)$ — линейная функция реакции системы, а $\vartheta(u)$ — единичная функция Хевисайда. Замечая, что показатель экспоненты в (18) (фигурные скобки) равен нулю, окончательно для $\langle x^h(t)\rangle$ получаем следующее выражение:

$$\langle x^h(t)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \varphi(t, \tau) f(\tau). \tag{19}$$

Отсюда следует, что все нелинейные функции реакции, определяемые соотношениями

$$\varphi(t, t_1 \ldots t_n) = \frac{1}{n!} \left.\frac{\delta^{(n)} \langle x^h(t)\rangle}{\delta f(t_1) \ldots \delta f(t_n)}\right|_{\widetilde{f(t)}=0}, \qquad n \geqslant 2,$$

равны нулю и, следовательно, связаны с негауссовостью физической системы («координаты» $x(t)$). Ранее это свойство функций реакции, исходя из других соображений, было отмечено в работе [14].

Таким образом, найденные соотношения позволили выразить $\langle x^h(t)\rangle$ через Q_3-упорядоченные кумулянты и, тем самым, максимально использовать гауссовы свойства физической системы.

В заключение автор выражает благодарность В. Б. Цареградскому, Г. Ф. Ефремову, А. А. Дубкову за критические советы и пожелания, высказанные в процессе обсуждения статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Furutsu K.— J. Res. NBS, 1963, **67**, p. 303.
2. Новиков Е А — ЖЭТФ, 1964, **47**, с 1919
3. Donsker M. D. Proc Conf Theory and Appl. of Analysis Function Space.— Cambridge: M. I T. Press, 1964 — P. 17.
4. Кляцкин В И Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах — М Наука, 1980 — С. 48
5. Бочков Г Н., Дубков А А — Изв вузов — Радиофизика, 1974, **17**, вып 3, с 376
6. Дубков А А, Малахов А Н — ДАН СССР, 1975, **222**, № 4, с 793
7 Бочков Г Н, Дубков А А, Малахов А Н — Изв вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 3, с 406
8. Kubo R — J. Phys Soc. Japan, 1962, **17**, p 1100.
9. Van Kampen N. G — Physica, 1974, **74**, p. 239
10. Fox R. F.— J. Math Phys., 1975, **16**, p 289
11. Fox R. F.— J. Math. Phys., 1976, **17**, p. 1148
12. Апресян Л А — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 5, с 698
13. Бочков Г. Н., Ефремов Г. Ф. Нелинейные стохастические модели процессов и систем — Горький· Гос. ун-т, 1978
14. Ефремов Г. Ф., Казаков В. А.— Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 10, с 1236

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
8 октября 1980 г.

AN AVERAGE VALUE OF THE ORDERED PRODUCT OF TWO FUNCTIONALS

S A Dyagilev

A generalization of formely known theorems has been obtained on the average value of two functional product from commutation random processes (in particular, the known Furutsu—Novikov theorem) for the case of noncommutative random processes. Formulas obtained are illustrated by a concrete physical example