

УДК 538.56 519.25

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В ПЛОСКОСЛОИСТЫХ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

С. Н. Аристов, С. Н. Гурбатов

Рассматривается рассеяние пространственно-модулированных полей от случайно-неоднородной плоскостойкой среды с мелкомасштабными неоднородностями. Исследована зависимость формы средней интенсивности отраженной волны от угла падения пространственно-ограниченного пучка и от соотношения между характерными масштабами рассеяния и дифракции, а также от толщины слоя. Рассмотрены особенности отражения сигналов с периодической модуляцией структур от случайно-неоднородной плоскостойкой среды.

При анализе рассеяния плоских волн от плоскостойких сред со случайными мелкомасштабными неоднородностями было показано (см., например, [1-5]), что при достаточно большой толщине слой с неоднородностями играет роль «зеркала», т. е. отражает практически всю падающую энергию. Наряду со «статическими» характеристиками зеркала, такими, как зависимость коэффициента отражения от толщины слоя, распределение интенсивности поля внутри слоя и т. д., представляют интерес и «динамические» параметры зеркала, связанные с переходными процессами, как во времени, так и в пространстве. Анализ отражения сигналов, промодулированных по времени, был проведен в работе [6], где найдена связь интенсивностей падающего и отраженного сигналов и показано, что эта связь не зависит от фазовых характеристик падающего импульса. В настоящей работе рассмотрено отражение пространственно-модулированных сигналов, в том числе и пучков, от достаточно длинных сред, когда существенным становится многократное рассеяние. Наряду с рассеянием в формировании отраженного поля существенны и дифракционные эффекты. Наличие двух параметров — характерных длин рассеяния и дифракции — приводит к появлению двух существенно различных режимов рассеяния в зависимости от соотношения между этими длинами. В работе исследована зависимость характеристик отраженной волны при наклонном падении и рассмотрены особенности отражения сигналов с периодической модуляцией.

1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Будем рассматривать распространение волн в плоскостойкой среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z) = 1 + \Delta\epsilon(z)$ ($\langle \Delta\epsilon^2 \rangle \ll 1$) на основе скалярного волнового уравнения

$$\Delta E + k^2(1 + \Delta\epsilon(z))E = 0, \quad k = \omega/c. \quad (1.1)$$

Это уравнение описывает как распространение акустических волн в среде с флуктуациями скорости звука, так и распространение электромагнитных волн с вектором электрического поля, параллельным границе плоскостойкой среды [7]. В дальнейшем мы будем считать эти условия выполненными и не будем рассматривать особенности отражения электромагнитных волн с учетом поляризационных эффектов [8].

Пусть флуктуации диэлектрической проницаемости отличны от нуля в слое $[0, L]$ и справа на слой падает волна, поперечная структура которой на границе $z = L$ имеет вид

$$E_0(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{x} c(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = \{x, y\}. \quad (1.2)$$

Для описания распространения волны в слое естественно перейти к разложению поля $E(\mathbf{r}, z)$ по плоским волнам, для комплексных амплитуд которых $A(\mathbf{x}, z)$ имеем из (1.1)

$$d^2 A/dz^2 + (k_z^2 + k^2 \Delta\epsilon(z))A = 0, \quad k_z = \sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}. \quad (1.3)$$

Представим решение (1.3) в виде

$$A(z) = P(z)e^{ik_z z} + Q(z)e^{-ik_z z}. \quad (1.4)$$

Здесь $P(z)$ и $Q(z)$ — комплексные амплитуды, которые вне слоя имеют смысл амплитуд волн, бегущих вдоль и против оси z . Для определения отраженного поля достаточно знать лишь локальный коэффициент отражения $R = P(z)/Q(z)$, который в соответствии с (1.3), (1.4) удовлетворяет уравнению

$$\frac{dR}{dz} = \frac{k^2 \Delta\epsilon(z)}{2ik_z} (2R + R^2 e^{-2ik_z z} + e^{2ik_z z}) \quad (1.5)$$

и граничные условия для которого задаются на задней границе слоя:

$$R(z=0) = \lambda(\mathbf{x}), \quad (1.6)$$

где $\lambda(\mathbf{x})$ — функция, зависящая в общем случае от угла падения. В частности, при согласованной границе $\lambda \equiv 0$, а при идеально отражающей $|\lambda| \equiv 1$. Для поля отраженной волны из (1.2), (1.4) имеем

$$E_{\text{отр}}(\mathbf{r}) = \int d^2 \mathbf{x} c(\mathbf{x}) R(k_z, L) e^{2ik_z L} e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}}. \quad (1.7)$$

В этой формуле $R(k_z, L)$ — случайный коэффициент отражения комплексной амплитуды плоской волны с поперечным вектором \mathbf{x} , $c(\mathbf{x})$ — фурье-образ падающего поля, множитель $\exp(2ik_z L)$ описывает регулярный набег в слое за счет прямого и обратного пробега.

В регулярной среде ($\Delta\epsilon = 0$) отраженное поле $E_{\text{отр}} = 0$ в случае согласованной границы ($\lambda = 0$) и совпадает с полем падающей волны, прошедшей расстояние $2L$ в свободном пространстве, при идеальном отражении ($\lambda = 1$).

Характеристики отраженной волны в случайно-неоднородной среде существенно зависят от соотношения между масштабом неоднородностей среды ρ_* и характерной величиной волнового вектора k_z . При $k_z \rho_* \gg 1$, т. е. для крупномасштабных неоднородностей, когда длина волны достаточно мала, а угол падения не слишком велик, обратным рассеянием можно пренебречь и использовать для описания распространения волны метод геометрической оптики. При этом в случае согласованной границы ($\lambda = 0$) отраженное поле равно нулю, а при идеальном отражении в (1.7) имеем множитель $R = \exp\left[\frac{ik^2}{k_z} \int_0^L \Delta\epsilon(z') dz'\right]$,

описывающий дополнительный набег фазы в случайно-неоднородной среде и приводящий к уменьшению регулярной компоненты. $\langle E_{\text{отр}} \rangle$ с увеличением толщины слоя L .

В противоположном случае, когда $k_z \rho_* \ll 1$, существенным становится обратное брегговское рассеяние и отраженная волна появляется

вне зависимости от вида граничных условий на задней границе слоя. В дальнейшем мы остановимся только на случае мелкомасштабных неоднородностей, когда выполнено условие $k_z \rho_* \ll 1$. Для описания статистических характеристик коэффициента отражения при этом можно использовать марковское приближение, т. е. считать, что корреляционная функция $\Delta \epsilon(z)$ аппроксимируется как

$$B_{\Delta \epsilon}(\rho) = \langle \Delta \epsilon(z + \rho) \Delta \epsilon(z) \rangle = D \delta(\rho), \quad D = \sigma_{\Delta \epsilon}^2 \rho_*, \quad (1.8)$$

где $\sigma_{\Delta \epsilon}^2$ и ρ_* — дисперсия и длина корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости.

Для определения среднего поля $\langle E_{\text{отр}} \rangle$ достаточно знать средний коэффициент отражения $\langle R \rangle$. Используя процедуру, применяемую в работах [3–6] для нахождения коэффициента отражения плоской нормально падающей волны, получим из (1.5) для $\langle R \rangle$ в случае идеального отражения

$$\langle R(k_z, L) \rangle = \lambda(\mathbf{x}) \exp[-(3/2) D k^4 L / k_z^2]. \quad (1.9)$$

Из (1.7), (1.9) видно, что флуктуации диэлектрической проницаемости приводят к экспоненциальному ослаблению регулярной компоненты отраженной волны, причем в силу зависимости декремента затухания от угла происходит дополнительное искажение формы среднего поля отраженной волны.

Для корреляционной функции отраженного сигнала из (1.7) имеем

$$B(\mathbf{R}, \rho) = \langle E_{\text{отр}}(\mathbf{R} + \rho/2) E_{\text{отр}}^*(\mathbf{R} - \rho/2) \rangle = \iint d^2 \mathbf{x}_1 d^2 \mathbf{x}_2 \times \\ \times \langle c(\mathbf{x}_1) c^*(\mathbf{x}_2) \rangle \langle R(k_{1z}, L) R^*(k_{2z}, L) \rangle \exp[2iL(k_{1z} - k_{2z}) + \\ + i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \mathbf{R} + i(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \rho/2]. \quad (1.10)$$

Для статистически однородного поля, когда $\langle c(\mathbf{x}_1) c^*(\mathbf{x}_2) \rangle = S(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$, а также для функции корреляции первого рода $B_1(\rho) = \int B(\mathbf{R}, \rho) d^2 \mathbf{R}$, из (1.10) получаем

$$B_1(\rho) = \int d^2 \mathbf{x} S(\mathbf{x}) \langle |R(k_z, L)|^2 \rangle e^{i\mathbf{x}\rho}. \quad (1.11)$$

Следовательно, в этом случае достаточно знать лишь средний квадрат коэффициента отражения плоской волны [3–6]. Легко показать, что коэффициенты корреляции $B_1(\rho)$ падающей и отраженной волн совпадают при идеальном отражении на задней границе $|\lambda| = 1$, а также при $L \rightarrow \infty$, вне зависимости от вида граничных условий на задней границе [5].

В общем же случае для определения энергетических характеристик отраженного поля необходимо знать функцию корреляции коэффициента отражения двух плоских волн с проекциями волновых векторов k_{1z} и k_{2z} . Мы будем считать, что $|\lambda| = 1$, и тогда коэффициент отражения испытывает только фазовые флуктуации $R = e^{i\varphi}$, где фаза в соответствии с (1.5) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{k^2 \Delta \epsilon(z)}{k_z} (1 + \cos(\varphi - 2k_z z)), \quad \varphi(0) = \arg \lambda. \quad (1.12)$$

Считая, что флуктуации $\Delta \epsilon$ гауссовы, а их корреляционная функция имеет вид (1.8), для совокупности $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, φ_1 (где φ_i — фаза коэффициента отражения с проекцией волнового вектора на ось $z - k_{iz}$) можно записать точное уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка для плотности вероятности $W(\psi, \varphi; z)$. В дальнейшем мы

будем рассматривать пучки с достаточно узким угловым спектром ($|\Delta k_z| = |k_{1z} - k_{2z}| \ll k_{1z}, k_{2z}$), и поэтому можно усреднить точное уравнение по периоду $2\pi/k_z$ [5, 6]. В результате для плотности вероятности $W(\psi; z)$ получим

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{Dk^4}{k_z^{*2}} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} (1 - \cos(\psi - 2\Delta k_z z)) W,$$

$$\Delta k_z = k_{1z} - k_{2z}, \quad k_z^* \approx k_{1z} \approx k_{2z}, \quad (1.13)$$

$$\langle R(k_{1z}) R^*(k_{2z}) \rangle = \int e^{i\psi} W(\psi, L) d\psi.$$

Переходя от (1.13) к характеристической функции полной фазы коэффициента отражения $\eta(u; z) = \langle \exp[iu(\psi - 2\Delta k_z z)] \rangle$, составляя систему рекуррентных уравнений для $\eta_n(z) = \eta(n, z)$ и находя ее решение при $L \rightarrow \infty$ аналогично тому, как это делалось в работе [6], получим для $\eta_1(\infty) = K$

$$K(\omega) = \frac{1}{2(1+i\omega) - \frac{1}{2(1+i\omega/2) - \frac{1}{2(1+i\omega/3) - \dots}}}, \quad \omega = \frac{2\Delta k_z k_z^{*2}}{Dk^4}. \quad (1.14)$$

При этом для интенсивности отраженной волны имеем

$$I_{\text{отр}}(\mathbf{R}) = \langle |E_{\text{отр}}(\mathbf{R})|^2 \rangle = \iint d^2 \mathbf{x}_1 d^2 \mathbf{x}_2 c(\mathbf{x}_1) c(\mathbf{x}_2) \times$$

$$\times K(2\Delta k_z k_z^{*2}/Dk^4) \exp[i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \mathbf{R}]. \quad (1.15)$$

Существование стационарного решения (1.14) соответствует тому, что при достаточно толстых слоях интенсивность отраженной волны перестает зависеть от толщины слоя.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТРАЖЕННЫХ ПУЧКОВ

Анализ средней интенсивности отраженного поля мы будем проводить на основе формулы (1.15), где $c(\mathbf{x})$ — фурье-образ падающей волны, коэффициент $K(\omega)$ (см. (1.14)) определяет совместный коэффициент отражения двух волн с поперечными пространственными частотами \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 от «зеркала», образованного случайно-неоднородной средой. Прежде всего следует отметить, что коэффициент корреляции двух спектральных компонент, имеющих разные \mathbf{x} , но одинаковые $k_z = \sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}$, равен единице. Связано это с тем, что в плоскослоистой среде рассеяние волн с одинаковыми k_z происходит когерентно. Вследствие того, что $K(0) = 1$ [6], из (1.15) имеем, что энергия отраженной волны $\int I_{\text{отр}}(\mathbf{R}) d^2 \mathbf{R} = B_1(0)$ равна энергии падающей, т. е. «зеркало» полностью отражает падающую волну. Однако форма средней интенсивности отраженной волны существенно отличается в общем случае от формы падающей волны.

Пусть на слой под углом θ в плоскости z, x падает пучок, т. е. угловой спектр поля представим в виде

$$c(\mathbf{x}) = \tilde{c}(\mathbf{x}_x - \mathbf{x}_*, \mathbf{x}_y), \quad \mathbf{x}_* = k_0 \sin \theta, \quad (2.1)$$

где $\tilde{c}(\mathbf{x}'_x, \mathbf{x}'_y)$ сосредоточено вблизи нулевой пространственной частоты и отражает форму пучка. Мы будем рассматривать достаточно малоугловые пучки, что позволяет разложить аргумент $K(\omega)$ в ряд по отклону

нениям от центральной пространственной частоты. Переходя в (1.15) к интегрированию по $x'_x = x_x - x_*$, $x'_y = x_y$, разлагая ω в ряд и ограничиваясь квадратичными по x'_x , x'_y членами, что соответствует приближению параболического уравнения в однородной среде, получим

$$I_{\text{отр}}(R) = \iint d^2\bar{x}' d^2\bar{x}'' \tilde{c}(\mathbf{x}') \tilde{c}^*(\mathbf{x}'') \exp[i(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')R] \times \quad (2.2)$$

$$\times K \left[L_p \sin 2\theta (x'_x - x''_x) + \frac{L_p}{k \cos \theta} (x'^2_x - x''^2_x) + \frac{L_p \cos \theta}{k} (x'^2_y - x''^2_y) \right].$$

Здесь мы ввели параметр $L_p = 1/Dk^2$, имеющий смысл характерного расстояния, на котором происходит перекачка энергии из прямой в отраженную волну при нормальном падении. Вторым физически важным параметром является характерная длина дифракции $L_d = ka^2 \sim k/(\Delta x)^2$, где a — ширина падающего пучка, Δx — ширина его спектра.

Прежде чем перейти к анализу (2.2), обсудим качественную картину отражения пучка от слоя. Падающий пучок, с одной стороны, уширяется из-за дифракции, а с другой стороны, испытывает отражение. Совокупное действие этих двух факторов и определяет структуру отраженного поля. Пусть пучок падает под углом θ в плоскости x, z и имеет на поверхности слоя одинаковый размер a по осям x и y . Тогда в плоскости, перпендикулярной направлению падения пучка, его размеры будут $a_y = a$, $a_x = a \cos \theta$, а характерное расстояние дифракционного расплывания по осям x и y равно соответственно $L_y = L_d = ka^2$, $L_x = L_d \cos^2 \theta = ka^2 \cos^2 \theta$. При однократном отражении от слоя, находящегося на расстоянии L' от входа, пучок смещается на величину $\Delta x = 2L' \operatorname{tg} \theta$, пройдя при этом путь $S' = 2L'/\cos \theta$. Уширение пучка из-за дифракции по осям y и x определяется при этом параметрами $p_y = S'/L_y = 2L'/L_d \cos \theta$, $p_x = S'/L_x = 2L'/L_d \cos^3 \theta$, а именно дифракционное расплывание становится существенным при $p \gg 1$. Из-за многократного рассеяния энергия падающего пучка уменьшается по мере углубления в слой, причем характерная глубина, где происходит ослабление падающей волны в соответствии с (1.9), (1.13), равна $L^* = L_p \cos^2 \theta$, а эффективный путь, пройденный волной, равен $S^* = 2L^*/\cos \theta = L_p \cos \theta$. Следовательно, для p имеем $p_y^* = L_p \cos \theta / L_d$, $p_x^* = L_p / L_d \cos \theta$. Таким образом, при

$$L_p \cos \theta / L_d \ll 1, \quad L_p / L_d \cos \theta \ll 1 \quad (2.3)$$

можно пренебречь при рассмотрении характеристик отраженного поля дифракционными эффектами.

Перейдем теперь к анализу интенсивности отраженной волны на основе (2.2). При выполнении условий (2.3) в аргументе $K(\omega)$ можно отбросить квадратичные члены по x^2 , что соответствует случаю, когда дифракционное расплывание пучка при отражении несущественно. Предположим для определенности, что поле падающего пучка представимо в виде $E_0(x, y) = E_x(x)E_y(y)$. Тогда из (2.2) для интенсивности отраженной волны имеем

$$I_{\text{отр}}(x, y) = I_{\text{отр}}(x)I_0(y), \quad I_0(y) = |E_y(y)|^2; \quad (2.4)$$

$$I_{\text{отр}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\xi) K(L_p \sin 2\theta \xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad \xi = x'_x - x''_x; \quad (2.5)$$

$$I_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \quad (2.6)$$

Здесь $I_0(x)$, $I_0(y)$ — распределение интенсивности падающей волны по осям x и y , $S_0(\xi)$ — фурье-образ интенсивности падающей волны, причем $S_0(0) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} I_0(x) dx$ и в дальнейшем полагается равным единице.

Можно выделить два существенно различных режима рассеяния. Для достаточно широких пучков, когда $a/L_p \sin 2\theta \gg 1$, рассеяние происходит «вблизи» поверхности и смещение отраженного поля $\Delta x \sim L_p \sin 2\theta$ существенно меньше характерного размера падающего поля a . Согласно (2.5) имеем при этом $I_{отр}(x) = I_0(x)$, т. е. средняя интенсивность отраженной волны успевает следить за изменениями $I_0(x)$. В противоположном случае достаточно узкого пучка из (2.5) получаем

$$I_{отр}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(L_p \sin 2\theta \xi) e^{i\xi x} d\xi = (L_p \sin 2\theta)^{-1} \times \quad (2.7)$$

$$\times f(x/L_p \sin 2\theta);$$

$$f(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) e^{i\eta\xi} d\xi. \quad (2.8)$$

Функция $f(\eta)$ в соответствии с (1.14) равна нулю при $\eta < 0$ и монотонно спадает при $\eta > 0$. Численный расчет показывает, что характерная ширина $f(\eta)$ равна единице. Таким образом, из (2.7) следует, что характерная ширина интенсивности отраженного пучка равна

$$\Delta x \approx L_p \sin 2\theta. \quad (2.9)$$

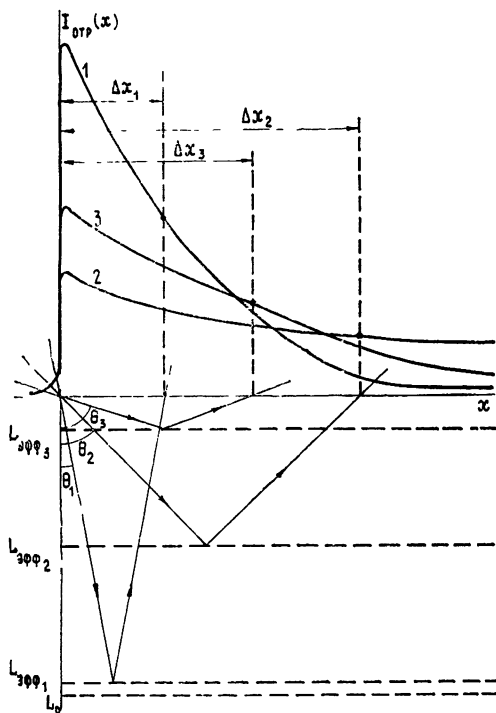


Рис 1 Средняя интенсивность отраженного пучка $I_{отр}(x)$ в зависимости от угла падения θ_i : $\theta_1 = 10^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$, $\theta_3 = 70^\circ$; $L_{эфф_i} = L_p \cos^2 \theta_i$ — характерная толщина рассеивающего слоя, $\Delta x_i = L_p \sin 2\theta_i$ — характерная длительность отраженного пучка.

Немонотонная зависимость Δx от θ обусловлена конкуренцией двух факторов. При увеличении θ характерное смещение пучка возрастает при отражении от слоя $L_{\text{эфф}}$, как $2L_{\text{эфф}} \operatorname{tg} \theta$. С другой стороны, при увеличении θ возрастают и относительные флуктуации диэлектрической проницаемости (см. (1.3)), что приводит к приближению «отражающей границы» $L_{\text{эфф}}$ к входу: $L_{\text{эфф}} = L_p \cos^2 \theta$. В результате совокупного действия двух этих факторов имеем для Δx выражение (2.9). Эволюция профиля волны и его характерной ширины изображена на рис. 1, 2.

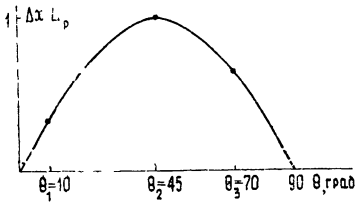


Рис. 2. Зависимость характерной длины отраженного пучка Δx от угла падения θ .

Следует отметить, что для двумерных пучков, когда $E_y(y) = \text{const}$, а также для интегрального распределения интенсивности в сечении x , $\tilde{I}_{\text{отр}}(x) =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) dy$, выражение (2.5) справедливо при более слабых, чем (2.3), предположениях. В этом случае в выражении (2.2) $x'_y = x''_y$ и при переходе к (2.5) квадратичными членами можно пренебречь, если выполнены условия

$$\cos \theta \sin 2\theta \gg 1/ka, \quad \theta_1 \ll |\theta| \ll \pi/2 - \theta_2, \quad (2.10)$$

$$\theta_1 = 1/ka, \quad \theta_2 = 1/\sqrt{ka}.$$

Физически это соответствует тому, что уширение пучка по оси x из-за сноса существенно больше, чем из-за дифракции. Таким образом, для двумерных пучков дифракцию при отражении необходимо учитывать лишь в достаточно узком интервале углов.

Для того, чтобы рассмотреть отражение пучков при нормальном падении, необходимо в общем случае проводить численное интегрирование (2.2), так как $K(\omega)$ задается в виде цепной дроби (1.14). Однако в ряде случаев удается получить аналитические оценки. Прежде всего отметим, что при $L_d \gg L_p$ в $K(\omega)$ аргумент $\omega \ll 1$ и, следовательно, $K(\omega) \approx 1$ [6]. Таким образом, $I_{\text{отр}}(\mathbf{R}) \approx I_0(\mathbf{R})$, т. е. распределение интенсивности отраженного поля повторяет распределение интенсивности падающего. В противоположном случае ($L_d \ll L_p$) основной вклад в интеграл (2.2) дают области \mathbf{z} , где $\omega \gg 1$. При этом, как показано в [6], для аппроксимации $K(\omega)$ можно использовать первое приближение цепной дроби.

Рассмотрим падение гауссова пучка $E_0(\mathbf{r}) = \exp(-r^2/2a^2)$. Переходя к безразмерным переменным $\boldsymbol{\eta} = a\mathbf{x}$, имеем

$$I_{\text{отр}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \iint d\eta_1 d\eta_2 K\left(\frac{L_p}{L_d}(\eta_1^2 - \eta_2^2)\right) \exp\left[-\frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + i\frac{\mathbf{R}}{a}(\eta_1 - \eta_2)\right], \quad L_p = 1/Dk^2, \quad L_d = ka^2. \quad (2.11)$$

Здесь мы рассматриваем падение на слой как трехмерного пучка ($m=2$, $\mathbf{R}=(x, y)$, $\boldsymbol{\eta}=(\eta_x, \eta_y)$), так и двумерного ($m=1$, $\mathbf{R}=(x)$, $\boldsymbol{\eta}=(\eta_x)$). Учитывая четность реальной части $K(\omega)$ и антисимметричность мнимой, для интенсивности отраженной волны на оси пучка при $L_d \ll L_p$ получим, аппроксимируя $K(\omega)$ первым членом цепной дроби,

$$I_{\text{отр}}(0) = \frac{i}{(2\pi)^m} \int \int d\eta_1 d\eta_2 \frac{\exp[-(1/2)(\eta_1^2 + \eta_2^2)]}{2[1 + (L_p/L_d)^2(\eta_1^2 - \eta_2^2)]}. \quad (2.12)$$

Для двумерного и трехмерного пучков из (2.12) имеем соответственно

$$I_{2 \text{ отр}}(0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-u} du}{\sqrt{1 + 4\gamma^2 u^2}} = \frac{\pi}{8\gamma} \left[H_0 \left(\frac{1}{2\gamma} \right) - N_0 \left(\frac{1}{2\gamma} \right) \right], \quad (2.13)$$

$$I_{3 \text{ отр}}(0) = \frac{1}{2\gamma} \int_0^\infty e^{-u} \operatorname{arctg} \gamma u du, \quad \gamma = L_p/L_d,$$

где H_0 и N_0 — функции Струве и Неймана [9]. Заметим, что (2.13) дает качественно правильный ответ и при $L_d \gg L_p$: $I_{\text{отр}}(0) = I_0(0)/2$, отличие в два раза обусловлено тем, что в первом приближении цепной дроби $K(0) = 1/2$. При $L_d \ll L_p$, т. е. в случае, когда $k^3 a^2 D \ll 1$ и пучок испытывает существенное дифракционное расплывание на длине рассеяния $L_p = 1/Dk^2$, из (2.13) имеем

$$I_{2 \text{ отр}}(0) \approx \frac{L_d}{4L_p} \ln \frac{L_p}{4L_d}, \quad I_{3 \text{ отр}} \approx \frac{\pi}{4} \frac{L_d}{L_p}. \quad (2.14)$$

В соответствии с сохранением полной энергии отраженной волны для эффективной ширины отраженного пучка имеем $a_{\text{эфф}} \approx a_0/I_{\text{отр}}(0)$. Интересно сравнить отражение от случайного «зеркала» с эффективной длиной рассеяния L_p и отражение от идеального зеркала в однородной среде, расположенного на расстоянии $L' = L_p$ от входа. При $L_d \ll L_p$ из (2.14) имеем

$$\frac{I_{2 \text{ отр}}(0)}{I_{2 \text{ пер}}(0)} \sim \ln \frac{L_p}{L_d}, \quad \frac{I_{3 \text{ отр}}(0)}{I_{3 \text{ пер}}(0)} \sim \frac{L_p}{L_d}, \quad (2.15)$$

где $I_{\text{пер}}(0)$ — интенсивность поля на оси при отражении от идеального зеркала. Из (2.15) видно, что $I_{\text{отр}}(0)/I_{\text{пер}}(0) \gg 1$, и связано это с тем, что эффективное отражение от распределенного зеркала происходит от всех слоев случайно-неоднородной среды в интервале глубин $[0, L_p]$.

3. ОТРАЖЕНИЕ СИГНАЛОВ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ОТ ПЛОСКОСЛОИСТЫХ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Периодическая модуляция падающего поля соответствует появлению в спектре волны дискретных гармоник, отстоящих в спектральной области друг от друга на конечное расстояние. Это приводит к ряду особенностей при рассеянии периодических сигналов. Пусть падающая волна зависит только от одной координаты x и имеет пространственный период $T = 2\pi/\Omega$. Тогда падающее поле $E_0(x)$ и его спектр можно записать в виде

$$E_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in \Omega x}; \quad (3.1)$$

$$c(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(x - n \Omega). \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в выражение для интенсивности отраженной волны (1.15), получим

$$I_{\text{отр}}(x) = \sum_n \sum_m a_n a_m^* K_{n,m} e^{ix \Omega (n-m)}, \quad (3.3)$$

$$K_{n,m} = K(\omega(n \Omega, m \Omega)).$$

Из выражения для коэффициента $K(\omega)$ (1.14) видно, что в отраженной волне, вне зависимости от соотношений между характерными длинами рассеяния и пространственными масштабами поля, коэффициент корреляции двух волн $K_{n,m}$ принимает максимальное значение, равное единице, при $|n|=|m|$, т. е. коррелированными оказываются волны, имеющие равные модули поперечных составляющих волнового вектора, в том числе и волны, бегущие в противоположные стороны. В частности, вследствие этого гармоническая стоячая структура, т. е. поле, представляющее собой суперпозицию двух плоских волн одинаковой амплитуды и имеющих одинаковые по модулю x , полностью и без искажений восстанавливается при отражении.

Из (1.14) видно, что характерный масштаб спадающего коэффициента $K(\omega)$ в области пространственных частот равен $x_* \approx \sqrt{k/L_p}$. Пространственный спектр падающего поля характеризуется двумя масштабами: $\Omega = 2\pi/T$ — расстояние между пространственными гармониками и $\Omega_{\max} = 2\pi/\Delta T$, где ΔT — минимальный размер падающего поля. В случае сильного рассеяния, когда $L_p \ll L_d \sim k(\Delta T)^2$, в (3.3) все коэффициенты $K_{n,m}$ можно положить равными единице (см. рис. 3).

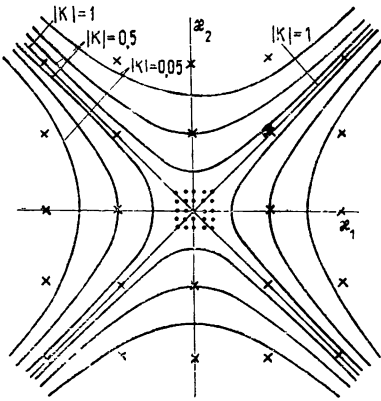


Рис. 3.

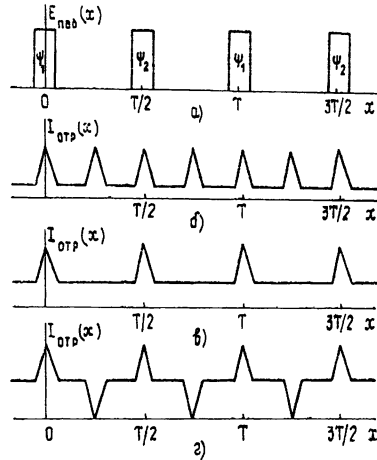


Рис. 4.

Рис. 3 Линии равного уровня коэффициента $|K|$ в плоскости x_1, x_2 ; кружки и крестики — спектр падающего поля, кружки — сильное рассеяние $L_p \ll L_d = k(\Delta T)^2$, крестики — слабое рассеяние $L_p \gg kT^2$.

Рис. 4 Форма отраженного периодического сигнала а) — падающее поле, ψ_1 — фазы составляющих; б) — г) — средняя интенсивность отраженной волны, б) $\psi_1 - \psi_2 = 0$, в) $\psi_1 - \psi_2 = \pi/2$; г) $\psi_1 - \psi_2 = \pi$.

В результате этого имеем $I_{отр}(x) = I_0(x)$, т. е. отраженная структура полностью восстанавливается. В случае слабого рассеяния ($L_p \gg kT^2$), когда рассеяние происходит в достаточно глубоких слоях, коррелированными оказываются лишь волны с $|m|=|n|$ (см. рис. 3) и для средней интенсивности отраженной волны имеем из (3.3)

$$I_{отр}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n a_n^* - |a_0|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n a_{-n}^* e^{i\Omega n 2x}. \quad (3.4)$$

Вводя постоянную составляющую, среднюю интенсивность и автосвертку, $I_{отр}(x)$ запишем в виде

$$I_{отр}(x) = \overline{I_0(x)}^T - |\overline{E_0(x)}^T|^2 + |E_0(2x) \oplus E_0(2x)|,$$

$$\overline{I_0(x)}^T = \frac{1}{T} \int_0^T I_0(x) dx, \quad \overline{E_0(x)}^T = \frac{1}{T} \int_0^T E_0(x) dx; \quad (3.5)$$

$$E_0(x) \oplus E_0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T E(y) E^*(y-x) dx. \quad (3.6)$$

Таким образом, в этом случае в отраженном сигнале отсутствует корреляция между волнами с разными пространственными частотами, но полностью сохраняется связь между волнами с одинаковыми по модулю поперечными векторами. Если падающая волна набрана только из бегущих волн, то при отражении средняя интенсивность $I_{отр}(x) = \text{const}$. При наличии же в падающей волне стоячих структур при отражении происходит их полное восстановление, причем разные структуры некогерентны.

Для иллюстрации рассмотрим отражение волны, представляющей суперпозицию двух периодических последовательностей:

$$E_0(x) = P_1(x) e^{i\psi_1} + P_2(x) e^{i\psi_2}, \quad (3.7)$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$ — периодические действительные функции, ψ_1 — фазы этих последовательностей. Из (3.6), (3.7) для автосвертки имеем

$$\begin{aligned} E_0(x) \oplus E_0(x) = & P_1(x) \oplus P_1(x) + P_2(x) \oplus P_2(x) + 2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \times \\ & \times P_1(x) \oplus P_2(x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, в отраженной волне наблюдается интерференция структур, несмотря на то, что отражение идет от случайно-неоднородного слоя. Случай отражения поля, состоящего из двух последовательностей прямоугольных импульсов, изображен на рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Газарян Ю. Л. — ЖЭТФ, 1969, 56, с 1856
2. Papanicolaou G. — SIAM J. Appl. Math., 1971, 21, p 13
3. Ruzhkov Yu. A. — Radio Sci., 1976, 11, p. 121
4. Кляцкин В. И., Татарский В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 7, с. 1040.
5. Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н., Рыжов Ю. А. Препринт НИРФИ № 119. — Горький, 1978; Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 5, с 566
6. Абрамович Б. С., Гурбатов С. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 4, с. 442.
7. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах — М. Наука, 1973
8. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме — М.: Наука, 1967.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
23 мая 1980 г

MULTIPLE SCATTERING OF WAVE BEAMS IN PLANE STRATIFIED RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIA

S. N. Aristov, S. N. Gurbatov

Scattering of space-modulated fields by randomly inhomogeneous plane stratified medium with small-scale inhomogeneities is considered. A dependence is studied of the form of mean intensity reflected wave on the incidence angle of a space-limited beam and on the relation between the characteristic scales of scattering and diffraction, as well as on the layer depth. Peculiarities are considered of the signal reflections with the periodic structure modulation from randomly inhomogeneous plane-stratified medium.