

УДК 538 574 8

КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ЗА СИЛЬНО ПРЕЛОМЛЯЮЩИМ ХАОТИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ

С. И. Белоусов, И. Г. Якушкин

В работе получено равномерное асимптотическое представление для функции корреляции интенсивности $B_I(r)$ плоской волны за хаотическим фазовым экраном при сильных флуктуациях фазы на экране

Определены границы применимости асимптотики и проведена количественная оценка влияния параметров задачи на поведение $B_I(r)$. Показано, что для гауссовой функции корреляции фазы на экране погрешность при определении величины и масштаба $B_I(r)$ не превышает 7% при дисперсии флуктуаций фазы на экране, $S_0^2 \geq 6$. Предпринята попытка сопоставить результаты асимптотики с экспериментальными данными в сплошной среде

1. Исследование флуктуаций за хаотическим фазовым экраном представляет интерес в связи со многими физическими явлениями, такими как флуктуации УКВ сигналов после прохождения ионосферы, мерцания различных астрономических источников и т. д. Модель фазового экрана можно использовать, по крайней мере, для качественного описания распространения волн в случайно-неоднородной среде.

Для функции корреляции интенсивности поля за фазовым экраном известные численные результаты относятся к случаю относительно слабых флуктуаций фазы на экране [1, 2]. Аналитические асимптотики [3, 4], полученные для отдельных участков спектра флуктуаций интенсивности при сильных флуктуациях фазы на экране, не дают общего представления корреляции интенсивности при произвольных значениях x и r (x — расстояние от фазового экрана до плоскости наблюдения, r — разнос точек в поперечной плоскости).

В настоящей работе получено равномерное по r и x асимптотическое представление для функции корреляции интенсивности $B_I(r)$ плоской волны за хаотическим фазовым экраном при сильных флуктуациях фазы на экране. При этом был использован метод, предложенный в работе [5], где найдена асимптотика для дисперсии флуктуаций интенсивности.

На основании полученного представления проведены расчеты, сравнение которых с результатами, полученными по точным формулам, уточняет границы применимости асимптотики. Данные расчетов позволяют количественно выявить влияние различных параметров на поведение функции корреляции интенсивности. В работе предпринята попытка сопоставить результаты вычислений по асимптотическим формулам для фазового экрана с результатами эксперимента для сплошной среды.

2. Пусть плоская волна единичной амплитуды падает на хаотический фазовый экран с набегом фаз, характеризующимся нормальным законом распределения, нулевым средним и структурной функцией $D(r)$, удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) $D(\mathbf{r}) = \dot{D}(r)$, 2) $\dot{D}'(r) \geq 0$,
 3) $D(r) = 2p^2 A(r/l)$, 4) $A^{2n}(0) = 0(1)$ при $p \rightarrow \infty$,
 5) $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r)/r^2 = 0$,

где p и l выбраны из условий $A''(0) = 1$, $A^{IV}(0) = -2$, тогда $p^2 = -(D''(0))^2/D^{IV}(0)$, $l^2 = -2D''(0)/D^{IV}(0)$. Кроме того, будем считать выполненными условия малоуглового приближения (т. е. $kl/p \gg 1$) и $p \gg 1$.

Выражение для второго момента интенсивности $M_2(\mathbf{r}) = \overline{I(0)I(\mathbf{r})} = B_I(\mathbf{r}) + \overline{I^2}$ имеет вид

$$M_2(\rho) = (2\alpha^2 p^2 / \pi) \int_0^\infty duu \int_0^\infty dvv J_0(2\alpha p v \rho) \int_0^{2\pi} d\varphi \times \quad (1)$$

$$\times \exp(-p^2 f(u, v, \varphi)) \cos(2\alpha p uv \cos \varphi),$$

$$\rho = r/l, \quad \alpha = kl^2/2xp, \quad u = |u|, \quad \cos \varphi = uv/uv,$$

$$f = 2A(u) + 2A(v) - A(u+v) - A(u-v).$$

При $p \gg 1$ основной вклад в интеграл будут вносить области когерентности в плоскости экрана, т. е. области малых значений u или v . Разобьем квадрант $0 < u < \infty$, $0 < v < \infty$ на две области $u < v$ и $u > v$. В каждой из областей функцию $f(u, v)$ можно разложить в ряд Тейлора по меньшей переменной.

Для области $v < u$ разобьем интеграл по u на две части — J_1 (от 0 до 1) и J_2 (от 1 до ∞). J_1 представим в виде

$$J_1 = \frac{2\alpha^2 p^2}{\pi} \int_0^1 duu \int_0^u dvv J_0(2\alpha p v \rho) \int_0^{2\pi} \cos(2\alpha p uv \cos \varphi) \times$$

$$\times \{ [\exp(-p^2 f(u, v)) - \exp(-p^2 \tilde{f}(u, v))] + \exp(-p^2 \tilde{f}(u, v)) \},$$

где для $f(u, v)$ можно использовать первый член разложения в ряд Тейлора по v :

$$f(u, v) \approx u^2 v^2 (\cos^2 \varphi / \varphi_1(u) + \sin^2 \varphi / \varphi_2(u)),$$

$$\varphi_2(x) = x^2/[1 - A''(x)], \quad \varphi_1(x) = x^2/[1 - A'(x)/x],$$

$\tilde{f}(u, v)$ — первый член разложения по обоим переменным u и v . При вычислении интеграла от первого слагаемого J_1 в квадратных скобках с точностью до членов порядка $O(1/p)$ интегрирование по v можно проводить от нуля до бесконечности, что позволяет вычислить интеграл по v . Для второго слагаемого один из интегралов вычисляется после замены переменных и интегрирования по частям.

В результате имеем

$$J_1 = \frac{2\alpha^2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{u} (\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(u)} G(u, \rho) - \sqrt{3} G(0, \rho)) + \quad (2)$$

$$+ \frac{2\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty duu \left[J_{0i} \left(2\alpha p \rho \sqrt{\frac{u}{p}} \right) - J_{0i}(2\alpha p u) \right] \int_0^{2\pi} d\varphi \times$$

$$\times \exp \left[-u^3 \left(\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{3} \right) \right] \cos(2\alpha u \cos \varphi).$$

Для величины J_2 с точностью до $O(1/p)$ во внутреннем интеграле по v также можно положить верхний предел интегрирования равным бесконечности. Вычисляя, получаем

$$J_2 = \frac{2\alpha^2}{\pi} \int_1^\infty \frac{du}{u} (\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(u)} G(u, \rho) - u^2 G(\infty, \rho)) + \quad (3)$$

$$+ 1 - \frac{2\alpha^2}{\pi} \int_0^1 du u G(\infty, \rho),$$

где

$$G(u, \rho) = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \left\{ \exp \left[-\alpha^2 \left(1 + \frac{\rho}{u} \cos \theta \right)^2 \varphi_1(u) \right] + \right.$$

$$\left. + \exp \left[-\alpha^2 \left(1 - \frac{\rho}{u} \cos \theta \right)^2 \varphi_1(u) \right] \right\} \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{\rho}{u} \right)^2 \varphi_2(u) \sin^2 \theta \right],$$

$$G(0, \rho) = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \left\{ \exp \left[-\alpha^2 \left(1 + \frac{\rho}{u} \cos \theta \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \exp \left[-\alpha^2 \left(1 - \frac{\rho}{u} \cos \theta \right)^2 \right] \right\} \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{\rho}{u} \right)^2 3 \sin^2 \theta \right],$$

$$G(\infty, \rho) = \pi \exp(-\alpha^2 \rho^2) \exp(-\alpha^2 u^2) I_0(2\alpha u \alpha \rho),$$

$I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя, $J_{0i}(x) = - \int_x^\infty \frac{J_0(\xi)}{\xi} d\xi$.

Используя аналогичное разбиение по v для области $v > u$, окончательно с точностью до $O(1/p)$ имеем

$$B_I(\rho) = \frac{2\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty dv v [J_{0i}(2\alpha p \rho) - J_{0i}(2\alpha \rho v)] \int_0^{2\pi} d\varphi \times$$

$$\times \exp \left[-v^2 \left(\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{3} \right) \right] \cos(2\alpha v \cos \varphi) +$$

$$+ 2\alpha^2 \int_0^1 \frac{dv}{v} (\sqrt{\varphi_1(v)\varphi_2(v)} \exp(-\alpha^2 \varphi_1(v)) -$$

$$- \sqrt{3} e^{-\alpha^2}) J_0(2\alpha p v \rho) - \int_0^{\alpha^2} dx e^{-x} J_0(2p \rho \sqrt{x}) +$$

$$+ 2\alpha^2 \int_1^\infty \frac{dv}{v} (\sqrt{\varphi_1(v)\varphi_2(v)} \exp(-\alpha^2 \varphi_1(v)) -$$

$$- v^2 \exp(-\alpha^2 v^2)) J_0(2\alpha p v \rho) - \exp(-\alpha^2 \rho^2) \times$$

$$\times \int_0^{\alpha^2} dy e^{-y} I_0(2\alpha \rho \sqrt{y}) + \frac{2\alpha^2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{u} (\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(u)} \times$$

$$\times G(u, \rho) - \sqrt{3} G(0, \rho)) + \frac{2\alpha^2}{\pi} \int_1^\infty \frac{du}{u} (\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(u)} \times$$

$$\times G(u, \rho) - u^2 G(\infty, \rho)) + \exp(-D_1(\rho)), \quad (4)$$

$$D_1(\rho) = (\rho\rho)^2 = D(\rho) \quad \text{при } \rho \ll 1.$$

Аналогичные вычисления для одномерного экрана дают

$$\begin{aligned}
 B_I(\rho) = & \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2) \text{Ci}(2\alpha\rho\rho) + \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{u} \times \\
 & \times \sqrt{\varphi_1(u)} \left\{ \exp\left[-\alpha^2\left(1 + \frac{\rho}{u}\right)^2 \varphi_1(u)\right] + \exp\left[-\alpha^2\left(1 - \frac{\rho}{u}\right) \varphi_1(u)\right] \right\} - 1 + \\
 & + \exp(-D_1(\rho)) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{dv}{v} (\sqrt{\varphi_1(v)} \exp(-\alpha^2\varphi_1(v)) - \exp(-\alpha^2)) \cos(2\alpha\rho v\rho) + \\
 & + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \frac{dv}{v} (\sqrt{\varphi_1(v)} \exp(-\alpha^2\varphi_1(v)) - v \exp(-\alpha^2 v^2)) \cos(2\alpha\rho v\rho) - \\
 & - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha dx \exp(-x^2) \cos(2\rho\rho x).
 \end{aligned} \tag{5}$$

При $\rho=0$ из (4) получаем удобную для расчетов индекса мерцаний β^2 формулу, к которой может быть преобразовано и выражение, полученное в [5],

$$\begin{aligned}
 \beta^2 = & M_F + M_G + M_N - 1, \\
 M_F = & 2\sqrt{3}\alpha^2 \exp(-\alpha^2) \ln \rho, \quad M_N = 2 \exp(-\alpha^2) + \\
 & + 4\alpha^2 \int_0^1 \frac{dv}{v} (\sqrt{\varphi_1(v)\varphi_2(v)} \exp(-\alpha^2\varphi_1(v)) - \sqrt{3} \exp(-\alpha^2)) + \\
 & + 4\alpha^2 \int_1^\infty \frac{dv}{v} (\sqrt{\varphi_1(v)\varphi_2(v)} \exp(-\alpha^2\varphi_1(v)) - v^2 \exp(-\alpha^2 v^2)), \\
 M_G = & 2\sqrt{3\pi}\alpha^2 \int_0^\alpha \exp(u^2 - 2\alpha u) \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) du -
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sqrt{3}\alpha^2 \exp(-\alpha^2) \int_0^\infty duu \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-u} \ln \{ [(\sqrt{3}u \cos \varphi + \\
 & + \alpha)^2 + u \sin^2 \varphi] [(\sqrt{3}u \cos \varphi - \alpha)^2 + u \sin^2 \varphi] \},
 \end{aligned}$$

где индексы G, F, N относятся к слагаемым, связанным с явлениями геометрической оптики, случайной фокусировки и насыщения флуктуаций, $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

3. Таким образом, мы получили асимптотическое представление $B_I(\rho)$ (4) при $\rho \rightarrow \infty$ в виде суммы слагаемых, вклад которых в полное значение величины и характерные масштабы зависят от α .

В области слабых флуктуаций ($\alpha \gg 1$) при $\rho \neq 0$ получаем известное выражение [6, 7]

$$B_I(\rho) \approx 2 \frac{\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{du}{u} \sqrt{\varphi_1(u) \varphi_2(u)} G(u, \rho) - 1 \approx \frac{4}{3\alpha^2} \frac{\Delta^2 D(\rho)}{\Delta^2 D(\rho=0)}, \quad (7)$$

где $\Delta = \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$, которое можно вывести непосредственно из (1)

при $\alpha \rightarrow \infty$. Из (7) следует, что при $\alpha \gg 1$ масштаб $B_I(\rho) - r_G$ приблизительно совпадает с масштабом флуктуаций фазы на экране $r_G \sim l$.

В области насыщенных флуктуаций ($\alpha \ll 1$) полученная асимптотика также дает результат, совпадающий с известным: $B_I(\rho) \approx e^{-D(\rho)} \approx \exp(-p^2 \rho^2)^{[9]}$ (основной масштаб $r_{N_1} \sim l/p$ соизмерим с радиусом когерентности поля). Поправка к основному члену зависит от вида $D(r)$. Для гауссовой функции корреляции фазы на экране при $\alpha \ll 1$ вклад остальных слагаемых имеет порядок $O(\alpha^2)$. Для степенной структурной функции фазы на экране с показателем степени ν из остальных слагаемых выделяются два, с масштабами r_{N_1} и $r_{N_2} \sim l/\alpha \sim x/kr_{N_1}$, вклад которых имеет порядок $O(\alpha^{2-\nu})$. Первое из слагаемых, масштаб которого совпадает с масштабом основного члена r_{N_1} , не играет существенной роли, а второе, описывающее крупномасштабную компоненту $B_I(\rho)$ в области насыщения, определяет поведение корреляционной функции при $r > r_{N_1}$.

В области случайных фокусировок ($\alpha \sim 1$), наряду с указанными масштабами, $B_I(\rho)$ характеризуется еще одним масштабом $r_F \sim x/kl$, определяющим «фокусирующие» возможности экрана ($r_F \sim l/\alpha p \sim l/p \ll l$). При не слишком больших значениях p для $\alpha \sim 1$ компоненты всех масштабов вносят соизмеримый вклад в $B_I(\rho)$. В случае $\ln p \gg 1$ и $r < l/p$ определяющим становится вклад компоненты с масштабом r_F и

$$B_I(\rho) = 2\sqrt{3}\alpha^2 \exp(-\alpha^2 \ln p J_0(2\alpha p \rho) + O(1)). \quad (8)$$

Для $l/p \ll r \ll l$, где поведение функции корреляции определяется крупномасштабной компонентой с масштабом $\sim l$, из (4) получим

$$B_I(\rho) = 2\sqrt{3}\alpha^2 \exp(-\alpha^2 (\ln \rho^{-1} - C) + M_G + M_N/2), \quad (9)$$

где C — постоянная Эйлера.

4. Для конкретизации границ применимости асимптотики и оценки влияния параметров задачи (α , p) на поведение $B_I(\rho)$ были проведены численные расчеты.

На рис. 1 представлены результаты расчета индекса мерцаний β^2 в зависимости от величины $\beta_0 = (2/\sqrt{3}\alpha)$ ($\beta^2 = \beta_0^2$ при $\beta_0 \ll 1$) для гауссовой функции корреляции фазы на экране $A(x) = 1,5(1 - \exp(-x^2/3))$. Сплошными линиями изображены результаты расчета по точной формуле [2, 6], пунктирной — данные расчета по формуле (6). Кривые 1—5 получены для значений дисперсии флуктуаций фазы на экране $\overline{S_0^2} = 4, 7, 10, 20, 40$ ($p = 1, 6; 2, 2; 2, 6; 3, 7; 5, 2$) соответственно. Как видно из рис. 1, для $p > 2, 6$ погрешность асимптотики не превышает 3%. Сравнение результатов расчета, полученных на основе асимптотики и по точной формуле [7], для масштаба функции корреляции интенсивности ρ_0 , определяемого условием $B_I(\rho_0) = B_I(0)/e$, показывает их совпадение с графической точностью уже при $p = 2$ ($\overline{S_0^2} \approx 6$). Проведенные сравнения показывают, что для гауссовой функции корреляции фазы на экране асимптотическое представление дает хорошие результаты при $p \geq 2$.

Рис 1—4 иллюстрируют влияние изменения параметров задачи на β^2 и $b_I(\rho) = B_I(\rho)/\beta^2$. На рис. 2, где приведена зависимость $\beta^2(\beta_0)$ ($\rho = 6$) (сплошная линия), показан вклад отдельных слагаемых (6) в β^2 . При $\beta_0 \leq 0,5$ β^2 определяется величиной M_G , насыщение флуктуаций описывает M_N , а в области случайных фокусировок $0,8 < \beta_0 < 1,5$ M_F вносит в флуктуации основной вклад, растущий с увеличением ρ .

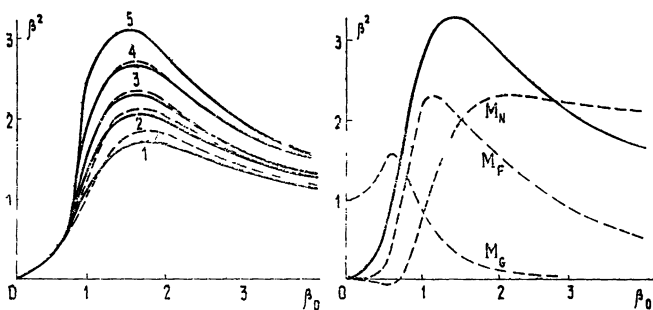


Рис. 1.

Рис. 2.

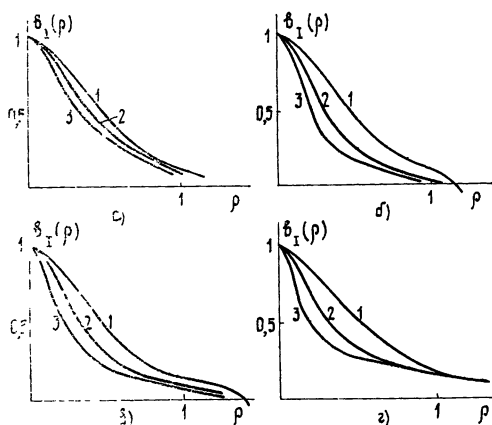


Рис. 3.

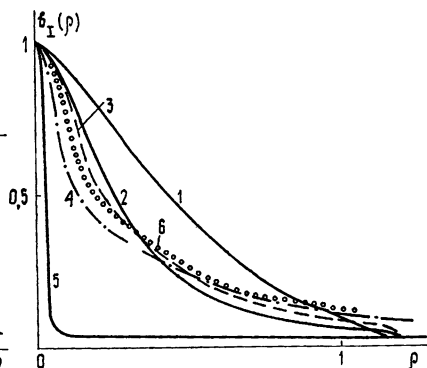


Рис. 4.

Приведенные на рис. 3 результаты расчета нормированной корреляционной функции $b_I(\rho)$ демонстрируют влияние величины ρ при различных значениях β_0 (а) $\beta_0 = 0,5$, б) $\beta_0 = 1$, в) $\beta_0 = 1,5$, г) $\beta_0 = 3,5$. Кривые 1—3 соответствуют значениям $\rho = 2, 4, 6$. Результаты расчета подтверждают выводы предварительного анализа. С ростом ρ увеличивается вклад компоненты с масштабом r_F , а величина масштабов r_F и r_{N_1} уменьшается. При $\beta_0 = 0,5$ основным масштабом $b_I(\rho)$ является $r_G \sim l$, но при $\rho > 2$ уже заметно влияние компоненты с масштабом r_F . С ростом β_0 (начиная с $\beta_0 \sim 1$) заметным становится вклад компоненты с масштабом r_{N_1} и r_{N_2} , причем масштабы r_{N_2} и r_F увеличиваются.

В заключение остановимся на результатах сопоставления данных эксперимента для непрерывной среды [8] в области случайных фокусировок с расчетами по асимптотической формуле для фазового экрана. Параметры фазового экрана были выбраны из условий: равенства величин β^2 , создаваемых фазовым экраном и непрерывной средой при $\beta_0 \ll 1$, и равенства структурной функции фазы $D(r)$ на экране струк-

турной функции фазы в сплошной среде, рассчитанной в приближении метода плавных возмущений. Эти условия приводят к соотношениям $\beta_0 = 2/\sqrt{3}\alpha$, $q = \alpha p = 8\sqrt{3}/\tilde{D}$ (\tilde{D} — волновой параметр). Расчеты функции корреляции интенсивности проводились для постоянной величины q , что лучше соответствовало условиям эксперимента. При расчетах использовалась функция $A(x) = 1,5(1 - \exp(-x^2/3))$, поскольку реализованные в эксперименте значения p не обеспечивали применимость асимптотики для $A(x) = (3/20)[{}_1F_1(-5/6, 1; -4x^2) - 1]$ (${}_1F_1(a, b; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция), соответствующей спектру турбулентности. Следует отметить, что в области случайных фокусировок при $p > 6$ (и это подтверждается расчетами) влияние вида структурной функции фазы на экране на нормированную корреляционную функцию $b_I(\rho)$ не очень существенно, так как вид $D(r)$ заметно сказывается лишь при больших значениях β_0 . На рис. 4 представлены результаты расчета $b_I(\rho)$ по асимптотической формуле при $\tilde{D} = 3$ для разных значений β_0 (кривые 1—5 соответствуют значениям $\beta_0 = 0,5; 1; 1,5; 3,5; 17,3$), которые показывают изменение масштабов $b_I(\rho)$ при переходе от режима слабых флуктуаций в режим случайных фокусировок и далее к насыщенным флуктуациям. На том же рисунке приведены экспериментальные данные (кривая 6, $\beta_0 = 1,8$). Имеющее место довольно хорошее совпадение с экспериментом для $b_I(\rho)$ говорит о том, что модель фазового экрана, по крайней мере качественно, правильно описывает изменения функции корреляции в сплошной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альбер Я. И., Ерухимов Л. М., Рыжов В. А., Урядов В. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1968, 11, № 9, с. 1371
2. Whale H. A. — J. Atm. and Terr. Phys., 1975, 37, № 5, p. 739.
3. Шишов В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, 14, № 1, с. 85
4. Buckley R. — Aust. J. Phys., 1971, 24, № 4, p. 351.
5. Якушкин И. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 9, с. 1350
6. Bonazzola S., Celnikier L. M., Cheverton M. — Astrophys J., 1978, 219, № 1, p. 690.
7. Gramley E. N., Young M. — Proc. IEE, 1967, 114, № 5, p. 553.
8. Гурвич А. С., Кан В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 3, с. 398
9. Mercier R. P. — Proc. Cambr. Phys. Soc., 1962, 58, p. 382.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
23 июня 1980 г.

CORRELATION FLUCTUATIONS OF A PLANE WAVE INTENSITY BEHIND A STRONGLY REFRACTING CHAOTIC PHASE SCREEN

S. I. Belousov, I G Yakushkin

The paper presents a homogeneous asymptotic presentation for the intensity correlation function $B_I(r)$ of a plane wave behind the chaotic phase screen with strong fluctuations of the phase on the screen

Boundaries of the asymptotic applications are defined and a quantitative estimation of the effect of the problem parameters on the behaviour of $B_I(r)$ is given. It is shown that for Gaussian function of the phase correlation on the screen an error of definition of the value and the scale of $B_I(r)$ does not exceed 7% with the dispersion of the phase fluctuation on the screen is $S_0^2 \geq 6$. An attempt is made to compare results of asymptotics with experimental data in a solid medium