

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 538.567

**ИНДУЦИРОВАННАЯ ШУМОМ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА**

*Е. В. Асташкина, А. С. Михайлов, А. В. Толстопятенко*

1. Под динамической моделью Лоренца понимают систему уравнений (1) (без шумов  $\xi_i(t)$ ,  $i = 1, 3$ ):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 + \xi_1(t), \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + r x_1 - x_1 x_3 + \xi_2(t), \\ \dot{x}_3 &= -b x_3 + x_1 x_2 + \xi_3(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Система (1) среди множества прочих явлений описывает одномодовый режим работы твердотельных квантовых генераторов (КГ) оптического ( $b \ll \sigma \ll 1$ ) и микроволнового ( $b \ll 1$ ,  $\sigma \geq 1$ ) диапазонов (см., например, [1-4]) Ее нетрудно получить, переходя к безразмерным переменным в соответствующих уравнениях для поля, поляризации и разности населенностей [3, 4] Параметры  $\sigma$  и  $b$  характеризуют соотношение между константами затухания поля ( $\gamma_c$ ), поперечной ( $\gamma_{\perp}$ ) и продольной ( $\gamma_{\parallel}$ ) релаксации:  $\sigma = \gamma_c / \gamma_{\perp}$ ,  $b = \gamma_{\parallel} / \gamma_{\perp}$ . Параметр  $r$  определяет мощность накачки Системой (1) описывается также роликовая конвекция в подогреваемом снизу слое жидкости (см [5]). Нас будут интересовать лишь такие значения параметра  $r$ , при которых неравновесный стационарный режим без учета шумов устойчив В оптических твердотельных КГ это условие выполняется обычно при всех  $r > 1$ , а в микроволновых КГ и для гидродинамической интерпретации — при  $1 < r < r^*$ , где  $r^* = \sigma(\sigma + b + 3) / (\sigma - b - 1)$ . Мы покажем, что учет естественных шумов для систем, описываемых моделью Лоренца, может приводить к качественно новому эффекту — появлению неустойчивости, индуцированной шумом.

2. Естественные шумы  $\xi_i(t)$  можно считать дельта-коррелированными во времени. В КГ они описывают равновесные флуктуации поля и спонтанные флуктуации поляризации. Их интенсивность при небольших превышениях над порогом вычислялась в работе [6]. В случае твердотельных оптических КГ в соответствии с [6] имеем

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = D_{ij} \delta(t - t'), \quad i = \overline{1, 3}, \tag{2}$$

$$D_{11} = \sigma^2 D_{22} = [\sigma^2 \Delta / b (r - 1)] D_{33} = [\sigma^2 \Delta / \sqrt{b(r - 1)}] D_{23} = 2\sigma^2 / N\Delta,$$

где  $N$  — число активных атомов в образце, а  $\Delta$  — относительная инверсия населенностей в отсутствие поля. Интенсивность тепловых шумов для случая гидродинамической интерпретации модели Лоренца была рассчитана в работе [7]

3. Нами было произведено численное моделирование системы (1) на ЭВМ для различных значений параметров  $b$ ,  $\sigma$  и  $r$  и различных интенсивностей шумов (рис. 1). Общий результат этого исследования состоит в следующем При малых интенсивностях шумов распределение вероятности в фазовом пространстве имеет резкий максимум в точке, отвечающей стационарному режиму (рис. 1а), но при достаточно высоких интенсивностях стационарный режим теряет устойчивость — в стационарной точке формируется минимум функции распределения, а вокруг этой точки расположено кольцо, на котором плотность вероятности максимальна (рис. 1б и в)\*.

\* Так выглядело бы установившееся распределение вероятности, если бы стационарная точка была неустойчивой и в фазовом пространстве ее окружал бы малый устойчивый предельный цикл

4. Для гидродинамической интерпретации модели Лоренца найденные при моделировании критические интенсивности шумов намного превышают уровень естественных тепловых флуктуаций. В то же время, если взять значения параметров  $\sigma = 0,1$ ,  $b = 10^{-4} \div 10^{-7}$ ,  $r = 1,8$ ,  $N = 10^{17}$  и  $\Delta = 0,1$ , используя данные, приведенные в работах [8-10] для КГ на  $\text{CaF}_2:\text{Dy}^{2+}$ , характеризующегося большой инерционностью населенностей рабочих уровней, то рассчитанных согласно (2) интенсивностей естественных шумов оказывается достаточно для возникновения эффекта неустойчивости. На рис. 1в представлен один из результатов моделирования, полученный при таком выборе параметров ( $b = 10^{-4}$ ). Относительная амплитуда пульсаций имеет для  $b = 10^{-4}$  порядок  $10^{-5} \div 10^{-4}$ , а при  $b = 10^{-7}$  она составляет  $10^{-2} \div 10^{-1}$ . При отключении шумов колебания становятся затухающими и устанавливается устойчивый стационарный режим.

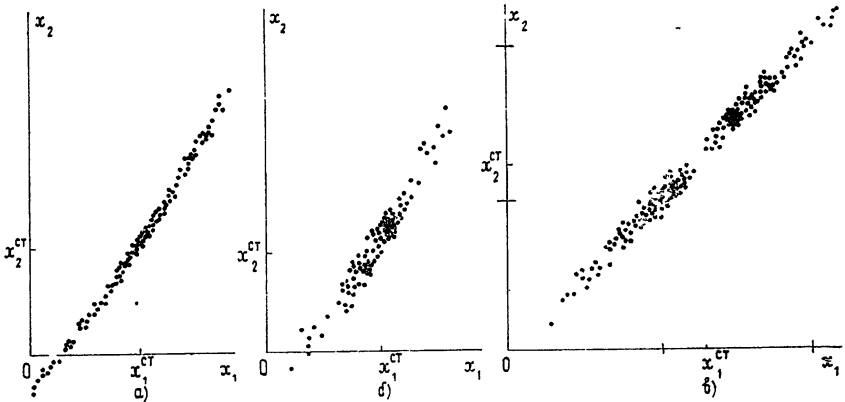


Рис. 1. Карты Пуанкаре модели Лоренца в присутствии шумов. Показаны последовательные точки пересечения случайной фазовой траектории с плоскостью  $x_3 = r - 1$ , содержащей нетривиальные стационарные точки;

а), б) — гидродинамическая интерпретация модели Лоренца:  $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$ ,  $r = 20$ ,  $D_{22} = D_{33} = 10^{-8}$ ,  $D_{12} = D_{23} = D_{13} = 0$ : а)  $D_{11} = 10^{-4}$ , б)  $D_{11} = 1$ , в) — интерпретация модели Лоренца для однододового режима генерации КГ на  $\text{CaF}_2:\text{Dy}^{2+}$  (значения параметров указаны в тексте); цена деления на осях равна  $10^{-6}$ . Сгущения точек на рисунках б) и в) отвечают пересечению кольцевого максимума вероятности с плоскостью  $x_3 = r - 1$

5. Возможный механизм, объясняющий эффект индуцированной шумом неустойчивости, состоит в следующем. Анализ устойчивости стационарной (нетривиальной) точки системы (1) в отсутствие шумов дает три собственных значения: действительное  $\lambda_1 < 0$ , которому соответствует чисто релаксационная мода, и два комплексно-сопряженных  $\lambda_{2,3}$ , отвечающих осциллирующей затухающей моде. С учетом соотношения  $b \ll \sigma$ , справедливого для рассматриваемых КГ, релаксация первой моды является быстрой\*. Благодаря этому для комплексной амплитуды  $\eta$  осциллирующей моды, сохраняя лишь резонансные нелинейные члены, можно получить уравнение

$$\dot{\eta} = -(\gamma + i\omega)\eta - \alpha|\eta|^2\eta + (\alpha_1\eta + \beta_1\eta^* + \nu_1)\xi_i(t), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

в котором  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\nu_i$  и  $\alpha$  — некоторые комбинации исходных параметров  $b$ ,  $\sigma$ ,  $r$ . Третье слагаемое в этом уравнении, мультипликативное по шумам  $\{\xi_i(t)\}$ , возникает после адиабатического исключения быстро релаксирующей моды

Уравнение (3) описывает параметрическое возбуждение затухающего нелинейного осциллятора дельта-коррелированным во времени шумом. Неустойчивость — порог параметрического резонанса для такой системы — наблюдается при интенсивностях шумов  $D_i$ , отвечающих соотношению

$$\sum_{i=1}^3 D_i |\beta_i|^2 = 2\gamma. \quad (4)$$

Сравнение с результатами численного моделирования показывает, что для гидродинамической интерпретации модели Лоренца определяемые формулой (4) пороговые значения интенсивностей шумов согласуются с получаемыми при численном эксперименте, тогда как для значений параметров, соответствующих твердотельному КГ, рассчитан-

\* Выполнено условие  $|\lambda_1| \gg |\text{Re } \lambda_{2,3}|$ . В случае гидродинамической интерпретации модели Лоренца это условие выполняется вблизи точки  $r = r^*$ .

ные значения оказываются гораздо более высокими. В последнем случае потеря устойчивости стационарного режима достигается, по-видимому, за счет иных, не учитываемых в таком решении факторов. Поэтому мы дополнительно провели прямое рассмотрение уравнения Фоккера — Планка (ФП), соответствующего исходной системе (1), специально для случая одномодового оптического твердотельного КГ.

6. Если ввести отклонения  $\omega_i = (x_i - x_i^{ст})/x_i^{ст}$  от стационарной точки, то уравнение ФП для функции распределения  $P(\omega, t)$  запишется в виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \omega_i} [K_i(\omega) P] + \frac{1}{2} \mu d_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial \omega_i \partial \omega_j}, \quad (5)$$

где  $K_i(\omega)$  задаются детерминистическими правыми частями модели Лоренца (1), а  $\mu d_{ij}$  — корреляционная матрица шумов:  $\mu$  — малый параметр, характеризующий слабость шумов. Стационарное решение уравнения ФП (5) можно искать в форме

$$\bar{P} = \left( a + b_i \omega_i + \frac{1}{2} c_{ij} \omega_i \omega_j + \dots \right) \exp \left\{ \mu^{-1} \left( -\frac{1}{2} f_{ij} \omega_i \omega_j + \dots \right) \right\}. \quad (6)$$

Подставляя это разложение в (5) и приравнявая члены одинакового порядка по  $\mu$ , получим систему алгебраических уравнений для коэффициентов  $a, b_i, c_{ij}$  и  $f_{ij}$ . Проведенное нами численное решение этой системы при значениях параметров  $b, g, r, N$  и  $\Delta$  для КГ на  $\text{CaF}_2: \text{Dy}^{2+}$  показало, что в этом случае стационарное распределение вероятности  $\bar{P}$  действительно имеет кольцевой максимум вокруг стационарной точки  $\omega = 0$ , причем найденная величина радиуса кольцевого максимума хорошо согласуется с данными численного эксперимента на ЭВМ. В окрестности стационарной точки  $\omega = 0$  плотность вероятности имеет «седловой» вид: она достигает максимума в плоскости  $\omega_1 = \omega_2$  и убывает в ортогональном к этой плоскости направлении.

7. Отметим, что принципиальное значение для возникновения индуцированной шумом неустойчивости во всякой системе с аддитивными шумами имеет невыполнение условий детального баланса — нетрудно показать, что если справедливы условия детального баланса, то распределение вероятности всегда обладает максимумом в устойчивых стационарных точках динамической системы. Эффект индуцированной шумом неустойчивости может играть важную роль при анализе причин возникновения пиковых режимов в квантовых генераторах (пульсации интенсивности излучения в одномодовом КГ на  $\text{CaF}_2: \text{Dy}^{2+}$  были обнаружены в экспериментах [8, 9]) — в особенности в одномодовом твердотельном оптическом КГ, где без учета шумов стационарный режим генерации оказывается устойчивым при любых мощностях накачки.

Авторы глубоко признательны С. А. Ахманову за внимание к работе. Нам также приятно поблагодарить Ю. Л. Климонтовича и Р. Л. Стратоновича за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ханнин Я. И. Динамика квантовых генераторов. — М.: Сов. радио, 1975.
2. Грасюк А. З., Ораевский А. Н. — Радиотехника и электроника, 1964, 9, с. 524.
3. Naken H. — Phys. Lett., 1975, 53A, p. 77.
4. Гапонов А. В., Рабинович М. И., Шапиро М. Ф. — Вестник МГУ Сер. Физика, астрономия, 1978, 19, с. 125.
5. Lorenz E. — J. Atmos. Sci., 1963, 20, p. 130.
6. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах / Под ред. Ю. Л. Климонтовича. — М.: Наука, 1974.
7. Асташкина Е. В., Хоф Ю. М. — Вестник МГУ Сер. Физика, астрономия, 1980, 21, с. 67.
8. Джибладзе М. И., Мурина Т. М., Прохоров А. М. — ДАН СССР, 1968, 182, с. 1048.
9. Джибладзе М. И., Золотов Е. М., Мурина Т. М., Твердохлебов А. С., Шипуло Г. П. — ДАН СССР, 1970, 195, с. 1078.
10. Дементьев В. А., Зубарев Т. Н., Ораевский А. Н. — Труды ФИАН, 1977, 91, с. 3.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
1 декабря 1980 г.