ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 8 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 538 576.23

РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА ПОЛЯ В ОБЛАСТИ ПОЛУТЕНИ БОКОВОЙ ВОЛНЫ

Ю. И. Орлов, С. К. Тропкин

Исследуются задачи, в которых возникают боковые волны, распространяющиеся вдоль плоских границ раздела двух диэлектрических сред. На основе точных решений получены равномерные асимптотические представления полей, справедливые на произвольном расстоянии от границы тени для боковой волны, в том числе при наличии полутеневой каустики

Как известно [1–4], излучение источников над плоскими границами раздела двух диэлектрических сред может сопровождаться появлением боковой волны, распространяющейся вдоль границы раздела. Однако поле в области полутени боковой волны, где происходит ее зарождение и формулы геометрической теории дифракции (ГТД) теряют смысл, имеет более сложный характер и исследовалось менее подробно [1,2]. В настоящей работе на основе асимптотического исследования точных решений получены равномерные асимптотические представления полей, справедливые как вблизи, так и вдали от области полутени боковой волны, в том числе при наличии полутеневой каустики, которая образуется в неоднородной среде.

1. Точное решение задачи об излучении точечного источника (элементарного вертикального электрического или магнитного диполя) над границей раздела двух однородных сред (рис. 1) дает потенциал отраженного поля в среде $z > 0$ при $k_1 r \gg 1$ в виде следующего интеграла [1,2]:

$$u(r, z) = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{k_1}{2\pi r}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{1-\tau^2}} V(\tau) \exp\{ik_1 [r\tau + \sqrt{1-\tau^2}(z + z_0)]\}\, d\tau, \tag{1}$$

где

$$V(\tau) = \frac{n^2\sqrt{1-\tau^2} - i\sqrt{\tau^2 - n^2}}{n^2\sqrt{1-\tau^2} + i\sqrt{\tau^2 - n^2}}, \quad k_1 = k_0 n_1 = \frac{\omega}{c} n_1, \quad n = \frac{n_2}{n_1} < 1. \tag{2}$$

Вычисление этого интеграла методом перевала с учетом вклада точки ветвления $\tau = n$ позволяет получить формулы ГТД, определяющие отраженное поле как сумму вкладов геометрооптического и дифракционного лучей [1,2]. Вклад дифракционного луча соответствует боковой волне, для которой луч полного внутреннего отражения MM' (рис. 1) является границей свет—тень. Для области полутени, где формулы ГТД неприменимы, в [1] получена локальная асимптотика отраженного поля, применимая только вблизи луча MM'.

В отличие от [1] ниже получена равномерная асимптотика отраженного поля, справедливая в области полутени боковой волны и асимптотически переходящая в формулы ГТД вдали от нее (см. также [12])*. Выделим в коэффициенте отражения $V(\tau)$, входящем в подынтегральное выражение (1), член, содержащий в виде сомножителя степенную особенность $\sqrt{\tau^2-n^2}$, которая определяет вклад боковой волны:

$$V(\tau) = 1 - 2i\sqrt{\tau^2-n^2}/(n^2\sqrt{1-\tau^2} + i\sqrt{\tau^2-n^2}). \tag{3}$$

Интеграл (1) от первого слагаемого в (3) вычислим с помощью обычного метода перевала, а интеграл от второго слагаемого — с помощью обобщенного метода перевала [5], учитывающего наличие степенной особенности. В результате получим равномерную полутеневую асимптотику поля

$$u = U^0_{\text{г о}} \exp(ik_1\varphi_{\text{г.о}}) + e^{ik_1\psi}\left[\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\left(\tilde{U}_{\text{г о}} - i\sqrt{2}\xi^2 U_б\right)D_{1/2}(\xi) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{\xi^{3/2}}(\tilde{U}_{\text{г о}} + i\sqrt{2}\xi^2 U_б)D'_{1/2}(\xi)\right], \tag{4}$$

где

$$\psi = \frac{1}{2}(\varphi_б + \varphi_{\text{г.о}}), \quad \xi = \exp\left(i\frac{\pi}{4} \pm i\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{2k_1(\varphi_{\text{г о}} - \varphi_б)},$$

$$U^0_{\text{г о}} = \frac{1}{R_1}, \quad \tilde{U}_{\text{г о}} = U_{\text{г о}} - U^0_{\text{г о}}, \quad U_{\text{г.о}} = (1/R_1)V(\tau_s), \quad \tau_s = r/R_1,$$
$$\varphi_{\text{г о}} = R_1, \quad R_1 = \sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}, \quad \varphi_б = nr + \sqrt{1-n^2}(z+z_0), \tag{5}$$
$$U_б = 2i(1-n^2)^{-1/4}/\{k_1 n\sqrt{r}[r\sqrt{1-n^2} - (z+z_0)n]^{3/2}\},$$

$D_\nu(z)$ — функция параболического цилиндра, а коэффициент отражения $V(\tau)$ определяется формулой (2). В выражении для ξ верхний (нижний) знак берется в области света I (тени II) боковой волны (см. рис. 1). Величины $U_{\text{г.о}}$, $\varphi_{\text{г о}}$, $U_б$, $\varphi_б$ в (4), (5) отвечают формулам ГТД [1, 2] и являются амплитудами и эйконалами соответственно отраженного поля в приближении геометрической оптики и поля боковой волны.

Используя асимптотические представления функции $D_{1/2}(\xi)$ при $|\xi| \gg 1$, можно показать, что вдали от области полутени решение (4) переходит в формулы ГТД. Вблизи луча полного внутреннего отражения, где $r \sim (z+z_0)n/\sqrt{1-n^2}$, формула (4) допускает упрощение и переходит в локальную полутеневую асимптотику

$$u = \frac{e^{ik_1R_1}}{R_1}\left\{1 - \frac{2\sqrt{2}e^{i\pi/8}}{n^{3/2}[k_1R_1(1-n^2)]^{1/4}}D_{1/2}(\xi)\right\}, \tag{6}$$

совпадающую с полученной в [1].

Таким образом, решение (4) определяет отраженное поле на произвольном расстоянии от луча полного внутреннего отражения. Следует отметить, что это решение может быть получено также на основе общей теории [6], дающей равномерную полутеневую асимптотику поля в окрестности размытых границ тени.

2. Рассмотрим задачу об изучении бесконечной нити электрического тока, расположенной при $y = 0$, $z = z_0 > 0$ в неоднородной плоскослоистой среде $n^2(z)$ вблизи границы раздела $z = 0$ с однородным по-

* В работе [5] поле боковой волны в области полутени исследовалось отдельно, что является неправомерным, так как в области полутени происходит зарождение боковой волны, и поэтому там должно рассматриваться полное отраженное поле.

лупространством (рис. 2). Сначала будем считать, что в неоднородном полупространстве $z > 0$ квадрат показателя преломления изменяется по линейному закону

$$n^2(z) = n_1^2 + az, \qquad a > 0, \tag{7}$$

а при $z < 0$ $\quad n^2 = n_1^2 = \text{const}$.

Строгое решение задачи

$$\begin{gathered} \Delta u + k^2 n^2(z) u = -\delta(y)\delta(z - z_0), \\ u(z_1 - 0) = u(z_1 + 0), \; u'_z(z_1 - 0) = u'_z(z_1 + 0) \end{gathered} \tag{8}$$

методом разделения переменных позволяет представить поле в области $0 < z < z_0$ в виде следующего интеграла:

$$u(y,\, z) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k}{a}\right)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ v(t) - \frac{1}{2i} R(\tau) w(t) \right\} w(t_0)\, e^{ik\tau y}\, d\tau, \tag{9}$$

где

$$R(\tau) = \frac{2i\,[v'(t_1) + \sqrt{t_1}\, v(t_1)]}{w'(t_1) + \sqrt{t_1}\, w(t_1)}, \quad t = t(\tau,\, n) = \left(\frac{k}{a}\right)^{2/3} (\tau^2 - n^2), \tag{10}$$

$$t_1 \equiv t(\tau,\, n_1), \qquad t_0 \equiv t(\tau,\, n_0), \qquad n_0 \equiv n(z_0) = n_1^2 + az_0,$$

а $w(t)$, $v(t)$ — функции Эйри в обозначениях Фока.

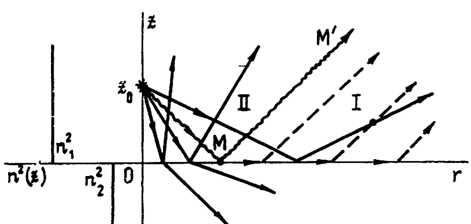

Рис. 1.

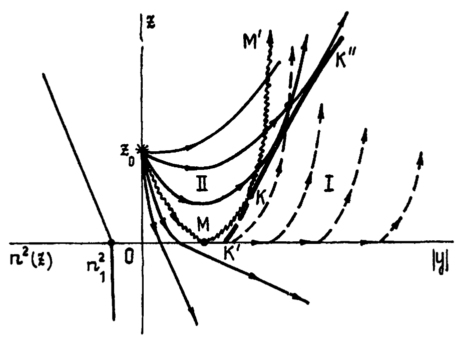

Рис. 2.

Рис. 1. Образование боковой волны на границе раздела двух однородных сред; сплошные линии — лучи геометрической оптики, штриховые линии — дифракционные лучи (боковая волна), MM' — луч полного внутреннего отражения (граница тени боковой волны)

Рис. 2 Образование боковой волны на слабой границе раздела в неоднородной среде, сплошные линии — лучи геометрической оптики, штриховые линии — дифракционные лучи (боковая волна), MKM' — граничный луч (граница тени боковой волны), $K'KK''$ — каустика геометрооптических лучей.

Для построения равномерного асимптотического решения, как и в предыдущей задаче, выделим в подынтегральном выражении (9) член, содержащий степенную особенность $\sqrt{t_1}$ в виде сомножителя:

$$\begin{aligned} u = {} & \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{k}{a}\right)^{1/3} e^{i\pi/3} \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\, w(t_0)\, e^{ik\tau y}\, d\tau - \\ & - \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{k}{a}\right)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{t_1}\, T(\tau)\, w(t)\, w(t_0)\, e^{ik\tau y}\, d\tau, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$T(\tau)=\frac{[e^{i\pi/3}w'(t_1)-w^{*\prime}(t_1)]+\sqrt{t_1}\,[e^{i\pi/3}w(t_1)-w^*(t_1)]}{\sqrt{t_1}\,[w'(t_1)+\sqrt{t_1}\,w(t_1)]}\,.$$

Заменим функции $w(t)$ и $w(t_0)$ их асимптотиками, справедливыми при $(-t)\gg 1$ и $(-t_0)\gg 1$. После этого вычислим первый интеграл в (11) с помощью обобщения метода перевала на случай произвольного (в том числе сколь угодно близкого) расположения двух перевальных точек $\tau_{1,2}$, а второй интеграл — с помощью аналогичного обобщения [7], учитывающего наличие степенной особенности в подынтегральном выражении. В результате получим следующую равномерную асимптотику поля:

$$u=\exp\left(ik\psi-i\frac{\pi}{4}\right)[(-\xi)^{1/4}(iU^0_{\text{г о}_1}+U^0_{\text{г.о}_2})v(\xi)+i(-\xi)^{-1/4}(iU^0_{\text{г.о}_1}-U^0_{\text{г.о}_2})v'(\xi)]+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(ik\psi-i\frac{\pi}{4}\right)\left[AG_{1/2}(\xi,\eta)+iB\frac{\partial}{\partial\xi}G_{1/2}(\xi,\eta)+iC\frac{\partial}{\partial\eta}G_{1/2}(\xi,\eta)\right],\qquad(12)$$

где

$$A=(-\xi)^{1/4}\,[i\tilde U_{\text{г о}_1}(-\eta-\sqrt{-\xi})^{-1/2}+\tilde U_{\text{г.о}_2}(-\eta+\sqrt{-\xi})^{-1/2}],$$

$$B=(-\xi)^{-1/4}\,[i\tilde U_{\text{г о}_1}(-\eta-\sqrt{-\xi})^{-1/2}-\tilde U_{\text{г о}_2}(-\eta+\sqrt{-\xi})^{-1/2}],$$

$$C=\frac{1}{\eta^2+\xi}(A-B\eta)+2i(\eta^2+\xi)^{1/2}U_{\text{б}},$$

$$\psi=\frac{1}{2}(\varphi_{\text{г.о}_1}+\varphi_{\text{г.о}_2}),\qquad \xi=-\left[\frac{3k}{4}(\varphi_{\text{г.о}_1}-\varphi_{\text{г о}_2})\right]^{2/3},$$

$$\eta^3/3+\eta\xi=k(\varphi_{\text{б}}-\psi),\quad \varphi_{\text{г.о}_{1,2}}=\varphi(\tau_{1,2}),\quad \varphi_{\text{б}}=\varphi(n_1),\qquad(13)$$

$$U^0_{\text{г о}_{1,2}}=\frac{[(\tau^2_{1,2}-n^2)(\tau^2_{1,2}-n_0^2)]^{-1/4}}{2\sqrt{2\pi k\,|\,\varphi''_{\tau^2}(\tau_{1,2})\,|}}\exp\left(i\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{4}\delta\right),\quad \tilde U_{\text{г.о}_{1,2}}=U_{\text{г.о}_{1,2}}-U^0_{\text{г.о}_{1,2}},$$

$$U_{\text{г о}_{1,2}}=\frac{1-R(\tau_{1,2})}{2\sqrt{2nk\,|\,\varphi''_{\tau^2}(\tau_{1,2})\,|}\,[(\tau^2_{1,2}-n^2)(\tau^2_{1,2}-n^0_2)]^{1/4}}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\delta\right),$$

$$\tau_{1,2}=\frac{y}{2r}\,[(n_0^2+n^2)\mp\sqrt{(n_0^2+n^2)^2-a^2r^2}]^{1/2},\quad r=\sqrt{y^2+(z-z_0)^2},$$

$$U_{\text{б}}=(k/a)^{1/3}\sqrt{n_1}\,3^{2/3}\,\Gamma^2(1/3)\,\frac{[(n_1^2-n^2)(n_1^2-n_0^2)]^{-1/4}}{2\,[2\pi k\,\varphi'_{\tau}(n_1)]^{3/2}}\exp\left(i\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\varphi(\tau)=(2/3a)(n^2-\tau^2)^{3/2}+(2/3a)(n_0^2-\tau^2)^{3/2}+\tau y,\quad \delta=\operatorname{sgn}\varphi''_{\tau^2}(\tau_{1,2}),$$

а выражение для $R(\tau)$ дается формулой (10). В решении (12) через $G_{1/2}(\xi,\eta)$ обозначена обобщенная функция Вебера [8], определяемая интегралом:

$$G_{1/2}(\xi,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\tau-\eta)^{1/2}\exp\left[i\left(\frac{1}{3}\tau^3+\tau\xi\right)\right]d\tau,\qquad(14)$$

где $(\tau-\eta)=(\eta-\tau)e^{-i\pi}$ при $\tau<\eta$. Величины $U_{\text{г.о}_{1,2}}$, $\varphi_{\text{г.о}_{1,2}}$, $U_{\text{б}}$, $\varphi_{\text{б}}$ в (13) являются амплитудами и эйконалами двух геометрооптических лучей и одного дифракционного луча, соответствующего боковой волне (рис. 2).

Используя соответствующие асимптотические представления обобщенной функции Вебера (см., например, [8]), можно показать, что вдали от границы тени MKM' боковой волны и вдали от каустики $K'KK''$ геометрооптических лучей (рис. 2) решение (12) асимптотически переходит в формулы ГТД. Вблизи каустики, но вдали от точки K, формула (12) переходит в обычную каустическую асимптотику [9] на основе функции Эйри, а вблизи граничного луча MKM' (но вдали от точки K) — в полутеневую асимптотику [6]. Последняя вблизи от участка MK области полутени определяется выражением

$$u=e^{ik\chi}\left[\frac{1}{2\sqrt{\zeta}}(\tilde{U}_{\text{г.о}_2}+i\sqrt{2}\zeta^2U_{\text{б}})D_{1/2}(\zeta)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\zeta\sqrt{\zeta}}(\tilde{U}_{\text{г.о}_2}-i\sqrt{2}\zeta^2U_{\text{б}})D'_{1/2}(\zeta)\right]+U^0_{\text{г.о}_2}\exp(ik\varphi_{\text{г.о}_2}), \tag{15}$$

$$\chi=(1/2)(\varphi_{\text{б}}+\varphi_{\text{г.о}_2}),\qquad \zeta=\exp(-i\pi/4\mp i\pi/2)\sqrt{2k(\varphi_{\text{б}}-\varphi_{\text{г.о}_2})}.$$

Аналогично вблизи участка KM' полутеневая асимптотика имеет вид

$$u=e^{ik\chi}\left[\frac{1}{2\sqrt{\zeta}}(\tilde{U}_{\text{г.о}_1}-i\sqrt{2}\zeta^2U_{\text{б}})D_{1/2}(\zeta)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\zeta\sqrt{\zeta}}(\tilde{U}_{\text{г.о}_1}+i\sqrt{2}\zeta^2U_{\text{б}})D'_{1/2}(\zeta)\right]+U^0_{\text{г.о}_1}\exp(ik\varphi_{\text{г.о}_1})+U_{\text{г.о}_2}\exp(ik\varphi_{\text{г.о}_2}), \tag{16}$$

$$\chi=(1/2)(\varphi_{\text{б}}+\varphi_{\text{г.о}_1}),\quad \zeta=\exp(i\pi/4\pm i\pi/2)\sqrt{2k(\varphi_{\text{г.о}_1}-\varphi_{\text{б}})}.$$

В этих формулах через $D_\nu(z)$ обозначена функция параболического цилиндра; верхний (нижний) знак в выражениях для ζ берется в области света (тени) боковой волны, а $\tilde{U}_{\text{г.о}_{1,2}}$, $U^0_{\text{г.о}_{1,2}}$, $U_{\text{г.о}_{1,2}}$, $U_{\text{б}}$, $\varphi_{\text{г.о}_{1,2}}$, $\varphi_{\text{б}}$ те же, что и в (13). Таким образом, полученное решение (12) представляет собой равномерную асимптотику поля, справедливую на произвольных расстояниях от граничного луча MKM' и от полутеневой каустики $K'KK''$ (рис. 2).

Следует отметить одну особенность рассматриваемой задачи. Как видно из рис. 2, геометрооптические лучи образуют, вообще говоря, «оборванную» каустику KK'' с полутеневым краем в точке K. Однако, как показывает исследование выражения для $U_{\text{г.о}_{1,2}}$ в (13), поле $u_{\text{г.о}}=U_{\text{г.о}_1}\exp(ik\varphi_{\text{г.о}_1})+U_{\text{г.о}_2}\exp(ik\varphi_{\text{г.о}_2})$, связанное с геометрооптическими лучами, существует по обе стороны от участка MK граничного луча (рис. 2). Это обусловлено наличием в выражении (13) для $U_{\text{г.о}_{1,2}}$ коэффициента $R(\tau_{1,2})$, который при удалении от граничного луча асимптотически стремится к нулю или единице. Для указанного поля, связанного с геометрооптическими лучами, каустика $K'KK''$ реализуется полностью и является неограниченной в области полутени. Поэтому асимптотика (12) может быть получена и с помощью общей теории [8], справедливой в окрестности неограниченных размытых полутеневых каустик.

3. Рассмотрим теперь обобщение предыдущей задачи на случай произвольного монотонного закона $n^2(z)$ при $z>0$. Если вблизи границы раздела (при $z\to+0$) $n^2(z)$ имеет вид $n^2(z)\approx n_1^2+az_\alpha$, где

$a > 0$, $0 < \alpha < 2$, то лучевая картина аналогична рис. 2. Тогда, как и в случае (7), можно показать, что равномерная асимптотика поля в области полутени определяется формулами (12), (13), которые отличаются от предыдущего случая лишь явным видом амплитуд и эйконалов геометрооптических лучей и поля боковой волны. Выражения для амплитуды и эйконала боковой волны в этом случае получены, в частности, в работах [3, 4].

В заключение отметим, что механизм возникновения боковой волны на металлической или импедансной границе в неоднородной среде [10, 11], вообще говоря, отличен от рассмотренного выше. В этом случае поле боковой волны имеет экспоненциальный (а не степенной) порядок по большому параметру задачи и асимптотика поля в области полутени должна быть исследована отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.— М.: Наука, 1973.
2. Фелсен Л, Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн.— М.: Мир, 1978.
3. Цепелев Н. В — Записки научных семинаров ЛОМИ, 1969, **15**, № 2, с. 187; 1970, **17**, № 3, с 209.
4. Тинин М В.— Изв. вузов — Радиофизика, 1973, **16**, № 4, с. 505.
5. Bleistein N. — Comm. Pure and Appl. Math., 1966, **19**, № 4, p. 353.
6. Орлов Ю. И, Тропкин С. К.— Изв вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 3, с. 334.
7. Bleistein N. — J. Math. and Mech, 1967, **17**, № 6, p. 533.
8 Орлов Ю. И., Тропкин С К.— Изв. вузов — Радиофизика (в печати).
9. Кравцов Ю. А.— Изв. вузов — Радиофизика, 1964, **7**, № 4, с. 664; Акуст. журн., 1968, **14**, № 1, с 1.
10. Jones D S. — Philos Trans. Roy. Soc Lond, 1963, **255**, № 1058, p. 341.
11. Levey L., Felsen L. B. — J. Inst. Math. Appl., 1967, **3**, № 1, p. 76.
12. Yanovskaya T. B.— Proc. Roy. Soc. Lond, 1969, **A313**, № 1515, p. 477.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 30 октября 1980 г.

UNIFORM ASYMPTOTIC OF A FIELD IN THE REGION OF HALF-SHADOW OF A LATERAL WAVE

Yu. I. Orlov, S. K. Tropkin

Problems are studied of lateral waves propagating along plane boundaries of two dielectric media separation. Based on strict solutions, uniform asymptotic presentations of fields have been obtained being valid at an arbitrary distance from the shadow boundary for a lateral wave including the presence of half-shadow caustics.