

1. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Гетманцев Г. Г., Игнатъев Ю. А., Комраков Г. П. — Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, № 10, с. 497.
2. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Иткина М. А., Митяков Н. А., Терина Г. И., Толмачева А. В., Шавин П. Б. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 12, с. 1821
3. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Терина Г. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 10, с. 1418.
4. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Дмитриев С. А., Терина Г. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 4, с. 504
5. Данилов А. Д., Власов М. Н. Фотохимия ионизованных и возбужденных частиц в нижней ионосфере. — Л.: Гидрометеониздат, 1973.
6. Tomko A. A., Ferraro A. J., Lee H. S., Mitra A. P. — J. Atm Terr. Phys., 1980, 42, № 3, p 273

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
18 декабря 1980 г.

УДК 538.574 : 530 18

О ВРЕМЕНИ ОБРАЗОВАНИЯ СОЛИТОНОВ ИЗ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В РАМКАХ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА—ДЕ ВРИЗА

Е. Н. Пелиновский, Ю. А. Степанянц

Благодаря разработанным в настоящее время точным методам интегрирования уравнений нелинейной теории волн в диспергирующих средах принципиальная картина явления эволюции импульсных сигналов (распад на солитоны, формирование осциллирующих хвостов и т. п.) представляется ясной. Между тем многие количественные соотношения, описывающие волновой процесс (в особенности на ранней стадии эволюции), из-за математических сложностей пока неизвестны. В частности, не известно важное для практических расчетов время формирования солитонов из начальных возмущений, которое, по существу, и определяет время проявления нелинейных и дисперсионных эффектов. Этот вопрос изучался в ряде экспериментальных работ [1, 2] применительно к солитонам в плазме. Однако экспериментальные данные показывают либо большой разброс [1], либо искажены наложением посторонних полей на солитоны [2]. Существующие же численные оценки времени образования солитонов [3] справедливы только в ограниченной области параметров.

В настоящей работе приводятся данные по определению времени (длины) образования первого солитона из различной формы начальных возмущений, описываемых уравнением Кортевега—де Вриза (КдВ), на основе приближенных оценок, размерного подхода, а также аналогового и численного моделирования. Эти данные охватывают широкую область изменения параметров начальных возмущений от импульсов очень малой амплитуды (или длительности) до неограниченных по длительности возмущений типа ступенек.

Рассмотрим начальную задачу для уравнения КдВ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u(0, x) = Uf(x/L). \quad (1)$$

Здесь f — функция, описывающая форму начального возмущения, U — его амплитуда, L — ширина. Используя замену переменных $\eta = u/U$, $\tau = \alpha Ut/L$, $\xi = (x - Vt)/L$, $\sigma^2 = \alpha UL^2/\beta$, уравнение (1) можно привести к безразмерному виду, содержащему единственный параметр σ , характеризующий отношение нелинейности к дисперсии [4]:

$$\tau_\tau + \eta\eta_\xi + \sigma^{-2}\eta_{\xi\xi} = 0, \quad \eta(0, \xi) = f(\xi). \quad (2)$$

Рассмотрим сначала такие возмущения импульсного типа, для которых $\sigma \ll \sigma_c = \sqrt{12}$, где σ_c — значение параметра подобия для солитона. В этом случае нелинейным членом вначале можно пренебречь и рассматривать эволюцию возмущения в рамках линеаризованного уравнения [5, 6]. Решения последнего хорошо известны [4], асимптотически они выражаются через функцию Эйри $u(x, t) = (U/\sqrt{\pi})(3\beta t)^{-1/3} \text{Ai}[(3\beta t)^{-1/3}(x - Vt)]$. Отсюда видно, что на линейном этапе амплитуда возмущения падает, как $t^{-1/3}$, а длина растет, как $t^{1/3}$, вследствие чего изменяется и параметр подобия $\sigma^2(t) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{U}{\sqrt{\pi}} (3\beta t)^{1/3}$,

Поскольку σ растет со временем, то решение в конце концов выходит на нелинейный режим [5, 6] и из его головной части формируется солитон. Для оценки времени формирования солитона приравняем (t) солитонному значению σ_c , откуда находим

$$t_c = \frac{\pi^{3/2}}{3\beta} \left(\frac{12\beta}{\alpha U} \right)^3 = \frac{\pi^{3/2} L^6}{3\beta} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right)^6.$$

Рассмотрим теперь другой предельный случай начального возмущения типа ступеньки, для которого параметр σ формально равен бесконечности. Решение этой задачи хорошо известно [7, 8], хотя интересующая нас величина — время отделения первого солитона — нигде явно не приводится. Поскольку рассматриваемое возмущение $U(0, x) = UH(x)$, где $H(x)$ — единичная функция Хевисайда, не содержит характерного масштаба длины, то краевая задача (1) с помощью замены переменных $\eta = u/U$, $\tau = t \sqrt{\alpha^3 U/\beta}$, $\xi = \sqrt{\alpha U/\beta} (x - Vt)$ приводится к виду, не содержащему свободных параметров:

$$\eta_\tau + \eta \eta_\xi + \eta_{\xi\xi} = 0, \quad \eta(0, \xi) = H(\xi). \quad (3)$$

Поэтому, если в рамках уравнения (3) определить безразмерное время образования первого солитона $\tau_{ст}$, то затем, возвращаясь к исходным переменным, получим зависимость времени образования солитона $t_{ст}$ от амплитуды ступеньки*. $t_{ст} = \tau_{ст} \sqrt{\beta/\alpha} U^{-3/2}$. (Для уравнения МКДВ с кубичной нелинейностью аналогичным путем можно получить $t_{ст} \sim U^{-3}$) Если в качестве критерия образования солитона принять ситуацию, при которой поле за фронтом головного импульса составляет 0,1 от его амплитуды, то на основании численных расчетов, содержащихся в [7, 9], можно считать $\tau_{ст} \approx 45$. Нами был выполнен эксперимент по определению длины распада на солитоны ступенчатого возмущения в нелинейной линии передачи, содержащей 280 LC-звеньев, соединенных последовательно по типу фильтра нижних частот. Такого типа линии передачи уже неоднократно применялись для моделирования нелинейных волновых процессов в средах с дисперсией [10]. На рис. 1 показан график зависимости длины образования солитона от амплитуды входного импульса прямоугольной формы с очень большой длительностью. Как видно из графика, несмотря на наличие в линии небольших потерь, обусловленных диссипацией, и влиянием малой кубичной нелинейности, экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретической формулой.

Пусть теперь задам начальный импульс конечных размеров, для которого $\sigma > \sigma_c$. Будем считать, что из возмущения выделился солитон, если расстояние между вершинами двух первых импульсов составляет заданную величину, например $\Lambda = 2(l_1 + l_2)$, где $l_{1,2}$ — характерные размеры солитонов (отметим, что отношение поля солитона в точке $2l$ от его вершины к амплитуде составляет $\sim 7\%$). Если начальный импульс распадается только на два солитона с отношением амплитуд $a_1/a_2 > 3$, то время распада можно вычислить по формуле [3]

$$\tau_p = 2(l_1 + l_2) / |c_1 - c_2| - (\delta_1 + \delta_2), \quad (4)$$

где $c_{1,2}$ — асимптотические значения скоростей солитонов, а $\delta_{1,2}$ — их фазовые сдвиги по времени из-за нелинейного взаимодействия. Выражая $l_{1,2}$, $c_{1,2}$, $\delta_{1,2}$ через амплитуды солитонов $a_{1,2}$ [1] и возвращаясь от уравнения (2) к размерным переменным, получим

$$t_p = \frac{12}{\alpha} \sqrt{\frac{3\beta}{\alpha}} \frac{U^{-3}}{\sqrt{a_1 a_2}} \left[\frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}}{|a_1 - a_2|} - \frac{a_1^{3/2} + a_2^{3/2}}{4a_1 a_2} \ln \left| \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}} \right| \right]. \quad (5)$$

Значения амплитуд солитонов $a_{1,2}$ можно вычислить по форме начального возмущения, например, с помощью метода обратной задачи рассеяния [4, 11]. Таким же образом можно оценить время образования первого солитона из более сложного начального возмущения, распадающегося в точности на N солитонов:

$$\tau_p = 2 \frac{l_1 + l_2}{|c_1 - c_2|} = \sum_{n=1}^N \delta_{1n} + \sum_{n=1}^N \delta_{2n}, \quad (6)$$

где δ_{in} — характеризует фазовый сдвиг i -го ($i = 1, 2$) солитона при его взаимодействии с n -м, а штрих у знака Σ означает, что при суммировании исключается слагаемое с одинаковыми индексами. Выражая параметры солитонов через их полное число N , получим из (6)

* Заметим, что такой характер зависимости временного масштаба от амплитуды ступеньки относится не только к формированию первого солитона, но, по существу, к любому эффекту, связанному с эволюцией ступеньки, что является следствием замены

$$t_p = \frac{3L}{4\alpha U} \frac{N+1}{N-1} \left[4 - \frac{N-1}{N^2} \ln \frac{(2N)!}{2N! N!} + \frac{N}{(N-1)^2} \ln \frac{N(2N)!}{(N-1)^2 N! N!} \right]. \quad (7)$$

Отсюда следует, что в асимптотике при $N \rightarrow \infty$ безразмерное время распада стремится к постоянному значению $\tau_p = 3$ по закону $\tau_p \approx 3(1 - \ln N/4N)$. На рис 2 приведен график зависимости τ_p от $\sigma = \sqrt{6N(N+1)}$ для начального возмущения вида $\eta(0, \xi) = \text{sch}^2 \xi$. Сплошная кривая — прямой численный расчет на ЭВМ, пунктир — теоретическая зависимость (7). Как видно из графика, формула (7) в целом правильно отражает зависимость τ_p от σ , хотя и дает несколько завышенные значения (не более чем в 1,5 раза). Это объясняется тем, что солитоны при выбранном критерии распада еще не являются свободными, а испытывают нелинейное взаимодействие. При не чисто солитонном распаде в формуле (6), в принципе, нужно еще учесть фазовый сдвиг от несолитонной части возмущения, однако при достаточно больших σ ее вклад относительно мал [4], и им можно пренебречь. Численный расчет подтверждает, что в этом случае полученные данные ложатся на плавную кривую, соединяющую точки чисто солитонного распада (см рис. 2).

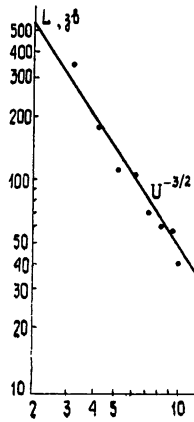


Рис. 1.



Рис. 2.

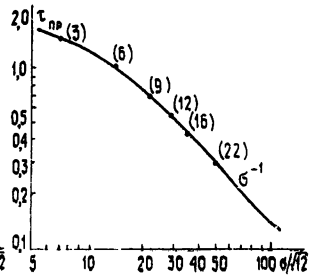


Рис. 3.

Приведенные здесь рассуждения имеют ограниченный характер и относятся к импульсам симметричной формы, описываемым однопараметрическим семейством функций. В частности, они неприменимы для расчета распада импульсов, прямоугольной формы, характеризующихся по крайней мере двумя параметрами — полной шириной и шириной фронта. Однако для таких импульсов с шириной фронта, значительно меньшей общей ширины, естественно предположить, что при достаточно больших σ их распад будет происходить практически так же, как и распад прямоугольной ступеньки. Приравняв размерные времена распада ступеньки $t_{ст}$ и прямоугольного импульса $t_{пр} = \tau_{пр} L/\alpha U$, найдем в безразмерных переменных $\tau_{пр} = \tau_{ст}/\sigma$. На рис. 3 приведены результаты численного расчета распада прямоугольных импульсов. (Цифры в скобках означают число возникающих солитонов.) Видно, что, когда число солитонов в импульсе достигает ~ 10 , расчетные точки соответствуют зависимости $\tau_{пр} \sim \sigma^{-1}$.

Итак, в трех рассмотренных нами случаях — распад ступеньки, ограниченного солитоноподобного импульса и возмущения очень малой интенсивности — выведены приближенные формулы, позволяющие получить оценку времени (длины) распада начального возмущения на солитоны. Эти оценки находятся в хорошем согласии с имеющимися экспериментальными и численными данными и могут быть полезны для ряда прикладных задач океанологии, физики плазмы, радиоплазмы и т. д.

Авторы благодарны Д. Г. Мальковскому за помощь в проведении эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Romesser T, Hershkowitz N.—Phys. Lett., 1975, 53A, № 2, p. 180.
2. Chen T, Schott L—Plasma Phys., 1977, 19, p. 959.
3. Nagashima H.—Sci. Papers IPCR, 1977, 71, № 2, p. 13.
4. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука, 1973.
5. Захаров В. Е.—ПМТФ, 1964, № 3, с. 167.

- 6 Пелиновский Е. Н., Степаняиц Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 11, с 1706
7. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. — ЖЭТФ, 1973, 65, вып. 2, с. 590.
8. Хруслов Е. Я. — Математический сб, 1976, 99, № 2, с. 261.
9. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрайбер И. Р. — В сб: Волновые процессы в двухфазных системах — Новосибирск, 1975, с. 5
10. Ostrovsky L. A., Gorshkov K. A., Parko V. V. — Phys Scr., 1979, 20, № 3/4, p. 357
11. Захаров В. Е. — ЖЭТФ, 1971, 6, вып. 3, с 993.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
11 апреля 1980 г.,
после сокращения
17 февраля 1981 г.

УДК 621.391 2

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

В. Н. Васюков

В некоторых практических приложениях, в частности в радиоастрономии, возникает задача обнаружения сигналов с дискретным спектром. В данной работе строится правило обнаружения такого сигнала при известных частотах дискретных компонент (ДК) и априорно неопределенных интенсивностях ДК. Шум полагается стационарным гауссовым с неизвестной формой спектра. Искомое правило должно обеспечивать максимальную вероятность правильного обнаружения сигнала при фиксированной вероятности ложной тревоги $P_{л.т.}$. Для преодоления априорной неопределенности используется принцип инвариантности [1].

Рассмотрим m -канальный приемник с пространственно-разнесенными каналами, так что шумы в каналах можно считать независимыми; каждый канал содержит n узкополосных фильтров с прямоугольными характеристиками, настроенных на частоты ДК обнаруживаемого сигнала. Путем взятия N независимых отсчетов по времени квадратурных компонент процессов на выходах фильтров получаем выборочный гауссов вектор $X = \{x_{ijk}\}$, где $i = \overline{1, n}$ — номер ДК спектра сигнала, $j = \overline{1, m}$ — номер канала, $k=1$ для косинусной и $k=2$ для синусной квадратурной компоненты, $l = \overline{1, N}$ — номер временного отсчета. Полезным параметром [1] является вектор $M = \{m_{ijk}\}$, образованный математическими ожиданиями компонент вектора X . Мешающий параметр — вектор, образованный стандартными отклонениями $\Sigma = \{\sigma_{ijk}\}$. Задача состоит в проверке гипотезы

H_0 : $m_{ijk} = 0$, $\sigma_{ijk} \in (0, \infty)$ при всех i, j, k , против альтернативы

H_1 : $m_{ijk} \neq 0$, $\sigma_{ijk} \in (0, \infty)$ хотя бы при одном наборе i, j, k .

Сформулированная задача инвариантна [1] относительно группы масштабных преобразований, при которых различные компоненты вектора X умножаются на разные коэффициенты. Максимальным инвариантом (МИ) относительно такой группы служит векторная статистика $T = \{t_{ijk}\}$, где

$$t_{ijk} = \sqrt{N} \frac{x_{ijk}}{\sqrt{\sum_{l=1}^N (x_{ijkl} - \overline{x_{ijk}})^2 / (N-1)}}$$

$$\overline{x_{ijk}} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N x_{ijkl}.$$

Статистика t_{ijk} имеет нецентральное распределение Стьюдента с N степенями свободы и параметром нецентральности $\theta_{ijk} = \sqrt{N} m_{ijk} / \sigma_{ijk}$. Вектор $\theta = \{\theta_{ijk}\}$ — МИ в параметрическом пространстве. Распределение статистики T при гипотезе не зависит от параметра Σ , поэтому правило, основанное на этой статистике, обеспечивает постоянную вероятность ложной тревоги при любых значениях дисперсии шума. В связи с аналитическими трудностями построения правила применим аппроксимацию распределения Стьюдента. Полагая N достаточно большим ($N > 30$), можно считать распределение статистики t_{ijk} приближенно нормальным со средним θ_{ijk} и единичной дисперсией. При данной аппроксимации семейство распределений статистики T инва-