

УДК 51 001 57 + 621 385 6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ ПОТОКАМИ

А. С. Рошаль, В. А. Лейтан

Описан эффективный метод математического моделирования нелинейного взаимодействия релятивистского электронного потока с электродинамическими структурами. Обсуждаются особенности и возможности метода. Приводятся результаты моделирования прибора типа гиросмонотрона с вращающимся потоком

1. В связи с быстрым развитием релятивистской электроники представляет большой интерес совершенствование методов теоретического исследования процессов взаимодействия релятивистских электронных потоков с электродинамическими структурами. Обычно для исследования этих процессов используется представление решений уравнений поля в виде рядов по собственным волнам (собственным колебаниям) структуры [1-3]. В данной работе предложен новый эффективный метод исследования самосогласованной динамики релятивистского заряженного потока в электродинамических системах. Метод основан на математическом моделировании, причем на каждом временном шаге моделирования численно решается система модельных уравнений, состоящая из неоднородных и нелинейных уравнений Максвелла и уравнений кинетики заряженных частиц. Отличительной особенностью метода является решение полных уравнений электродинамики без разложения поля по собственным решениям уравнений Максвелла и без выделения поля объемного заряда. Самостоятельными проблемами моделирования являются корректное задание начальных и краевых условий для модельных уравнений, вычисление макроскопической (сглаженной) плотности тока дискретных частиц, моделирование тепловых потерь, ввода и вывода электромагнитной энергии. Основные особенности данного метода рассматриваются на примере двумерной модели электронного прибора с вращающимся потоком (рис. 1), хотя метод применим к областям взаимодействия и потокам любой формы и размерности, в декартовой или криволинейной системах координат.

Заряженный поток изображается в модели N частицами (макрочастицами) с зарядом q . Поскольку в правильно построенных моделях частиц всегда выполняется уравнение непрерывности (сохранение заряда), можно опустить скалярные уравнения Максвелла, отнеся их к начальным условиям. В рассматриваемой области вводятся сдвинутые пространственные сетки по числу учитываемых компонент поля. Предполагается, что в рассматриваемом приборе (рис. 1) отличны от нуля лишь компоненты E_x , E_y ,

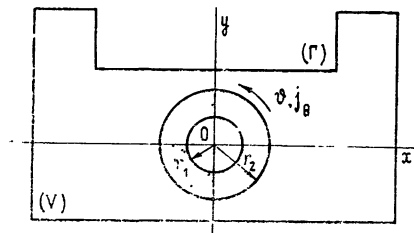


Рис 1 Конфигурация рассматриваемой области (V) с границей (Г); r_1 — внутренний радиус, r_2 — внешний радиус вращающегося заряженного кольца с плотностью тока j_ϕ в начальный момент времени $t = 0$

$H_z \equiv H$. Следует еще раз подчеркнуть, что предположение о двумерности модели, выбор декартовой системы координат и учет лишь трех компонент поля обусловлены характером модельной задачи, а не пределами применимости предлагаемого метода.

В векторных уравнениях Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t + \mathbf{j}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t \end{aligned} \quad (1)$$

пространственные производные аппроксимируются центрально-разностными, а дифференцирование по времени сохраняется. Сдвиг сеток снижает погрешность и упрощает аппроксимацию производных и некоторых типов краевых условий [4]. В результате аппроксимации получается система обыкновенных дифференциальных уравнений метода прямых по времени для компонент напряженности поля \mathbf{E}_i , \mathbf{H}_i во внутренних узлах сетки (i — номера узлов).

В текущий момент времени t в памяти ЭВМ имеются сеточные функции $\mathbf{E}_i(t)$, $\mathbf{H}_i(t)$, а также координаты $\mathbf{r}_\alpha(t)$, скорости $\mathbf{v}_\alpha(t)$ и ускорения $\mathbf{g}_\alpha(t - \Delta t)$, $\mathbf{g}_\alpha(t - 2\Delta t)$ всех N частиц, связанные релятивистскими уравнениями движения

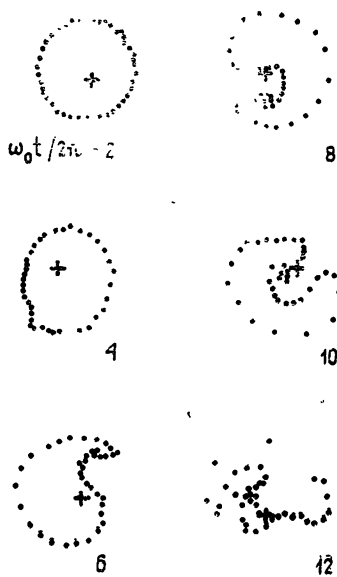


Рис. 2. Деформация сгустка со временем.

$$\dot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha, \quad \dot{\mathbf{v}}_\alpha = \mathbf{g}_\alpha \equiv (e/m_0) \gamma_\alpha^{-1} (\mathbf{E}_\alpha + \mu_0 [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{H}_\alpha] - c^{-2} \mathbf{v}_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{E}_\alpha)). \quad (2)$$

Здесь $\alpha = 1, 2, \dots, N$ — номера частиц, e и m_0 — заряд и масса покоя электрона, γ — множитель Лоренца, c — скорость света, Δt — временной шаг, точка означает дифференцирование по времени. Вычисления на временном шаге включают три этапа: решение уравнений движения частиц (2), вычисление плотности тока в узлах сетки, решение уравнений Максвелла (1). При решении уравнений движения используются метод Адамса третьего порядка для скорости частиц и степенные ряды для координат:

$$\mathbf{v}_\alpha(t + \Delta t) = \mathbf{v}_\alpha(t) + (1/3) \Delta t [(23/4) \mathbf{g}_\alpha(t) - 4 \mathbf{g}_\alpha(t - \Delta t) + (5/4) \mathbf{g}_\alpha(t - 2\Delta t)] + O(\Delta t^4); \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_\alpha(t + \Delta t) = \mathbf{r}_\alpha(t) + \mathbf{v}_\alpha(t) \Delta t + (1/4) \Delta t^2 [(19/6) \mathbf{g}_\alpha(t) - (5/3) \mathbf{g}_\alpha(t - \Delta t) + (1/2) \mathbf{g}_\alpha(t - 2\Delta t)] + O(\Delta t^5). \quad (4)$$

Для вычисления полей $\mathbf{E}_\alpha(t)$ и $\mathbf{H}_\alpha(t)$, входящих в ускорения $\mathbf{g}_\alpha(t)$, значения полей со сдвинутых сеток предварительно линейно интерполируются на единую сетку, а затем используются в формулах «взвешивания по площадям». Такой способ улучшает устойчивость математической модели [4]. В моделях с относительно невысокими плотностями сеточных узлов и частиц при вычислении поля в точках расположения частиц целесообразно численное интерполирование сеточных функций \mathbf{E}_i , \mathbf{H}_i со сглаживанием.

Сеточная плотность тока \mathbf{j}_i вычисляется по методу «дробных частиц» [5]. При этом траектория каждой частицы на шаге Δt аппроксимируется формулами вида (3), (4), записанными для произвольного относительного момента времени $0 \leq \tau \leq \Delta t$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha(t + \tau) = & \mathbf{v}_\alpha(t) + (1/3)\tau [(3 + (9/4)\tau_0 + (1/2)\tau_0^2)\mathbf{g}_\alpha(t) - \\ & - \tau_0(3 + \tau_0)\mathbf{g}_\alpha(t - \Delta t) + (1/4)\tau_0(3 + 2\tau_0)\mathbf{g}_\alpha(t - 2\Delta t)] + O(\Delta t \tau^3); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\alpha(t + \tau) = & \mathbf{r}_\alpha(t) + \mathbf{v}_\alpha(t)\tau + (1/4)\tau^2 [(2 + \tau_0 + (1/6)\tau_0^2)\mathbf{g}_\alpha(t) - \\ & - (1/3)\tau_0(4 + \tau_0)\mathbf{g}_\alpha(t - \Delta t) + (1/6)\tau_0(2 + \tau_0)\mathbf{g}_\alpha(t - 2\Delta t)] + \\ & + O(\Delta t \tau^4) \quad (\tau_0 \equiv \tau/\Delta t). \end{aligned} \quad (6)$$

Каждая дробная частица номера $k = 1, 2, \dots, K$ вносит в плотность тока в i -м узле вклад

$$\delta \mathbf{j}_{iak} = (q/K)\mathbf{v}_\alpha(t + \tau_k)S(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_\alpha(t + \tau_k)), \quad \tau_k = (k - 0,5)\Delta t/K, \quad (7)$$

где K — число разбиений отрезка траектории, S — весовая функция типа «облака в ячейках» [4]. Сумма вкладов от всех NK дробных частиц представляет собой усредненную за шаг Δt сеточную плотность тока, обозначаемую $\mathbf{j}_i(t + \Delta t/2)$ и используемую в уравнении Максвелла. В памяти ЭВМ сохраняются значения

$$\mathbf{r}_\alpha(t + \Delta t), \mathbf{v}_\alpha(t + \Delta t), \mathbf{g}_\alpha(t), \mathbf{g}_\alpha(t - \Delta t) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N).$$

Аппроксимирующая уравнения Максвелла система обыкновенных дифференциальных уравнений решается с помощью последовательных приближений Пикара [6]. При этом возбуждающее поле $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ (сигнал), если оно имеется (например, в виде неоднородных краевых условий), берется на полуцелом шаге, т. е. в момент $t + \Delta t/2$, как и плотность тока \mathbf{j}_i . В результате находятся сеточные функции $\mathbf{E}_i(t + \Delta t), \mathbf{H}_i(t + \Delta t)$ с погрешностью $O(\|\dot{\mathbf{E}}_s\| \Delta t^3, \|\dot{\mathbf{H}}_s\| \Delta t^3, \|\dot{\mathbf{j}}\| \Delta t^3)$, сохраняемые затем в памяти ЭВМ.

2. Тепловые потери в среде моделируются добавлением в правую часть второго уравнения Максвелла (1) диссипативного члена $-\sigma_H \mu_0 \mathbf{H}$, где $\sigma_H \geq 0$ — «магнитная» проводимость. Задавая соответствующее распределение σ_H , можно имитировать распределенные или локальные потери, вывод энергии в нагрузку через «поглощающие пятна» и другие явления.

Для задания начальных условий необходимо предварительное вычисление статического собственного поля заряженного пучка, определяемого уравнениями статики

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0. \quad (8)$$

(Уравнение $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ в рассматриваемой задаче выполняется тождественно.) Статическое электрическое поле находится из решения уравнения Пуассона

$$\Delta \varphi = -\rho/\epsilon_0, \quad \varphi|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (9)$$

для скалярного потенциала φ . Конечно-разностный аналог уравнения Пуассона решается итерационным методом Зейделя с ускорением сходимости по методу Люстерника [7]. Как показывают тестовые расчеты, ускорение сходимости на порядок сокращает требуемое число итераций. Затраты машинного времени сокращаются в значительно меньшей степени из-за существенного удлинения каждой итерации.

В предположении, что резонатор изготовлен из проводника с магнитной проницаемостью, близкой к проницаемости вакуума μ_0 (например, из меди), можно вместо решения краевой задачи магнитостатики в ограниченной области решать первое уравнение (8) в свободном про-

странстве [8]. В этом предположении, следовательно, заряженное кольцо рассматривается как бесконечный соленоид, у которого отлична от нуля лишь азимутальная компонента плотности тока j_θ .

Однородное фокусирующее магнитное поле H_0 , направленное вдоль оси z , выбирается так, чтобы для электронов, вращающихся в начальный момент $t = 0$ с частотой ω и скоростью v_0 , центробежные силы уравновешивались магнитной фокусировкой. Без учета собственного статического поля

$$H_0 = -\omega m_0 \gamma / (e\mu_0), \quad v_0 = \omega \times r. \quad (10)$$

Скорость v_0 в этой формуле берется на внешнем радиусе r_2 электронного кольца. Используя решения (8), можно получить также более точное значение H_0 с учетом собственного поля.

В начальный момент можно полагать, что в резонаторе имеются лишь статические (фокусирующее и собственное) поля и включается возбуждающий (усиливаемый) СВЧ сигнал в виде неоднородного краевого условия. При таком способе задания начальных условий некоторое машинное время расходуется на распространение сигнала от границы до потока. В результате моделирование замедляется, интенсивный кольцевой поток иногда распадается, прежде чем успевают заметно сгруппироваться, усиление падает. Поэтому в проводимых далее расчетах принято, что в начальный момент поле складывается из статических полей и поля на собственной частоте «холодного» резонатора ω_0 . Частота ω_0 и конфигурация соответствующего собственного колебания предварительно вычисляются конечно-разностным методом и сохраняются в памяти ЭВМ. Начальная амплитуда собственного колебания может варьироваться. Физически такой способ задания начальных условий соответствует инжекции электронного кольца в «затрабочное» СВЧ поле резонатора.

Помимо поперечных компонент скорости $v_{x\alpha}$, $v_{y\alpha}$ все электроны обладают одинаковой продольной компонентой $v_{z\alpha} = v_z = \text{const}$, которая учитывается в их множителях γ_α . В приборе кольцевой поток, перемещаясь вдоль области взаимодействия, выводится затем на коллектор. В модели длина области взаимодействия полагается неограниченной, определение оптимальной длины — одна из задач моделирования.

3. Программа моделирования реализована на языке Фортран, расчеты выполнены на ЭВМ БЭСМ-6. Для модели, имеющей 3×1000 сеточных узлов и 216 частиц, длительность счета временного шага составляет около 9 с. Это время можно существенно сократить, исключив некоторые выдачи, так как большую часть времени занимает подготовка результатов к печати и печать.

На рис. 2—4 представлены некоторые результаты моделирования, полученные при $N = 216$, $\Delta t = 0,04 \pi / \omega_0$ (т. е. 0,02 периода собственной частоты «холодного» резонатора ω_0). В начальный момент $t = 0$ частицы образуют однослойное равномерно заряженное кольцо, вращающееся с угловой скоростью ω и линейной скоростью v_0 . Продольная скорость принята $v_z = 0,5 v_0$. Моделирование выполнялось примерно за 1000 временных шагов Δt . На рис. 2 изображены частицы пучка в различные моменты времени с интервалом в два периода частоты ω_0 , крестиком отмечен центр кольца в момент $t = 0$, начальная скорость $\omega = \omega_0$ (для наглядности показаны лишь 42 частицы). Из рисунка видна группировка частиц в тормозящей фазе электрического поля, образование (при $\omega_0 t \leq 12 \pi$) и последующее разрушение (при $\omega_0 t > 20 \pi$) сгустка.

Амплитуду $A_H(t)$ магнитного поля собственного колебания на частоте ω_0 удобно характеризовать огибающей функции

$$\psi(t) = \left| \int_{(V)} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) dV \right|, \quad (11)$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0)$ — решение соответствующей конечно-разностной проблемы собственных значений. Поскольку собственные колебания ортогональны, функция $\psi(t)$ выделяет собственное колебание частоты ω_0 .

На рис. 3, 4 показаны электромагнитная энергия в резонаторе

$$W_{em} = W_e + W_m, \quad W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{(V)} E^2 dV, \quad W_m = \frac{\mu_0}{2} \int_{(V)} H^2 dV, \quad (12)$$

кинетическая энергия потока

$$W_k = \sum_{\alpha=1}^N (\gamma_\alpha - 1) m_0 c^2 \quad (13)$$

и амплитуда A_H , вычисленная с помощью формулы (11), при различных расстройках частоты вращения (возбуждения) ω и собственной частоты ω_0 . На рисунках $\omega = \omega_0$ для кривой 1, $\omega = 1,025 \omega_0$ для кривой 2, $\omega = 0,975 \omega_0$ для кривой 3, $\omega = 0,777 \omega_0$ для кривой 4.

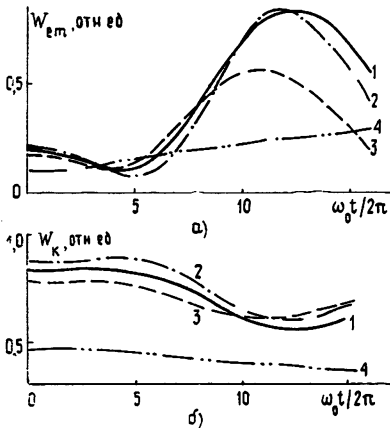


Рис. 3.

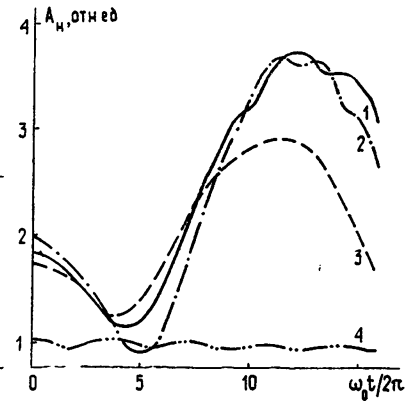


Рис. 4.

В начале процесса происходит группировка частиц под действием СВЧ электромагнитного поля, энергия поля W_{em} несколько убывает, кинетическая энергия потока W_k возрастает (кривые 1—3). Далее наблюдается рост электромагнитной энергии (усиление) за счет кинетической энергии потока. Максимум W_{em} соответствует оптимальной длине прибора, на которой кольцевой поток должен выводиться из области взаимодействия, так как далее энергия W_{em} вновь уменьшается. Как видно из рис. 3, расстройка частот влияет на эффективность взаимодействия и оптимальную длину резонатора.

В ходе моделирования равенство

$$A_H(t)/A_H(0) \approx [W_{em}(t)/W_{em}(0)]^{1/2} \quad (14)$$

для кривых 1—3 на рис. 3, 4 выполняется с погрешностью 3—8%. Отсюда можно заключить, что при малой расстройке пучок, в основном, взаимодействует с собственным колебанием частоты ω_0 и в модели нет значительного накопления вычислительных погрешностей. При большей расстройке взаимодействие с собственным колебанием практически отсутствует (кривая 4 на рис. 4).

Помимо колебаний на основной частоте ω_0 электронный поток возбуждает колебания и на других собственных частотах. Перекачкой энергии между различными собственными колебаниями могут объясняться пульсации, наблюдаемые на некоторых кривых рис. 4. Амплитуды этих колебаний можно выделить аналогично амплитуде основного колебания.

Наблюдаемые группировка пучка и усиление электромагнитного поля являются чисто релятивистскими эффектами. При решении тестовой задачи с нерелятивистскими уравнениями движения эти эффекты не наблюдались. Приведенные результаты моделирования хорошо согласуются с физическими представлениями о характере процессов в электронных приборах с криволинейными релятивистскими потоками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике — М.: Сов. радио, 1973
2. Кураев А. А. Сверхвысокочастотные приборы с периодическими электронными потоками.— Минск: Наука и техника, 1971.
3. Релятивистская высокочастотная электроника /Под ред. А. В. Гапонова-Грехова.— Горький: ИПФ АН СССР, 1979
4. Рошаль А. С. Моделирование заряженных пучков.— М.: Атомиздат, 1979.
5. Рошаль А. С., Лейтан В. А.—Численные методы механики сплошной среды, 1976, 7, № 7, с. 63.
6. Рождественский Б. Л.—Численные методы механики сплошной среды, 1974, 5, № 2, с. 96
7. Ильин В. П. Численное решение задач электрооптики—Новосибирск: Наука, 1974—С. 90.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред—М.: Гостехиздат, 1957.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
24 июля 1979 г.

COMPUTER SIMULATION OF NONLINEAR PROCESSES IN ELECTRON DEVICES WITH CURVILINEAR RELATIVISTIC STREAMS

A. S. Roshal', V. A. Leitan

An effective method is described for computer simulation of nonlinear interaction between a relativistic electron stream and electrodynamic structures. Properties and possibilities of the method are discussed. Results of the device simulation of the gyro-monotrone type with a rotating stream are presented.

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ

Т. XX, № 4, 1980 г.

Ю. В. Березин, А. Н. Талицкий. Пространственная корреляция поляризационных характеристик векторного частично рассеянного поля

Найдены основные соотношения, определяющие пространственные корреляционные функции модуля и аргумента фазора. Показано, что пространственная корреляция поляризации векторного поля определяется параметрами двумерных угловых спектров ортогональных компонент поля, взаимными пространственными корреляционными функциями, а также степенью рассеяния этих компонент. Сделана оценка пространственной корреляции поляризации волны, отраженной от слоя $F2$.