ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 7 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 535.231

О НЕЛИНЕЙНОМ АНАЛОГЕ ЗАКОНА КИРХГОФА

Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев

На основе универсальных флуктуационно-диссипационных соотношений, полученных авторами ранее как следствие принципа микроскопической обратимости, найдены обобщающие закон Кирхгофа соотношения между параметрами нелинейной матрицы рассеяния тела и статистическими характеристиками теплового излучения тела (в волновой зоне). Проведен полный учет негауссовости флуктуаций в ее связи с нелинейностью вещества. Рассмотрены примеры.

1. Классический закон Кирхгофа связывает между собой (пропорциональной зависимостью) интенсивность теплового излучения тела на некоторой частоте ω и коэффициент линейного поглощения (по мощности) тела на той же частоте (см., например, [1,2]). В квантовой теории фактор пропорциональности — температура тела T — заменяется на $\Theta(\omega; T)=(\hbar\omega/2)\operatorname{cth}(\hbar\omega/2T)$. Важно подчеркнуть, что закон Кирхгофа в своей физически строгой форме автоматически учитывает наличие внешнего теплового поля, поскольку эквивалентен условию детального баланса радиационных потоков тепла — от тела к окружению и обратно — в термодинамическом равновесии. В такой форме закон Кирхгофа справедлив и для тела с нелинейными свойствами, т. е. и при учете ангармонизма вещества.

Однако обычно закон Кирхгофа относят к собственному тепловому излучению тела в пустоту. Поскольку излучение в пустоту — принципиально неравновесный процесс, закон Кирхгофа становится теперь приближенным утверждением [1,2]. Этой трудностью можно пренебречь, если рассматривать времена, меньшие времени нарушения внутреннего термодинамического равновесия тела.

В нелинейном случае появляется трудность другого рода, связанная с тем, что понятия собственного теплового излучения тела и его коэффициента поглощения становятся неопределенными (так же, как, например, нельзя однозначно разделить собственные и вынужденные колебания ангармоничного осциллятора). Иными словами, как поглощательные свойства нелинейного тела, так и статистические характеристики его флуктуационного излучения зависят от внешнего, падающего на тело поля. Например, если внешнее поле неслучайно (когерентная волна), то оно влияет на интенсивность случайного теплового излучения тела (см. ниже). С другой стороны, наличие приходящего от окружения теплового случайного поля изменит коэффициент поглощения (и спектр линейного поглощения) заданной когерентной волны в результате нелинейных (многофотонных, на квантовом языке) процессов*.

* Это обстоятельство проливает свет на так называемый «двухфотонный парадокс» [3]: спектр линейного поглощения тела в вакууме дискретен, в то время как связанная с двухфотонными процессами компонента теплового излучения имеет сплошной спектр, в кажущемся противоречии с ФДТ. В действительности противоречие исчезает (см. ниже), если учесть, что ФДТ должна относиться к полной системе «тело + окружение» и линейный отклик должен рассчитываться в присутствии внешнего теплового поля с температурой тела.

Отсюда следует вывод, что в нелинейном случае строгие соотношения, обобщающие закон Кирхгофа (в том или ином смысле), можно получить лишь при явном учете статистической зависимости собственного излучения тела от падающего на него излучения. Только после этого можно будет рассмотреть частную ситуацию — когда падающее излучение отсутствует.

Кроме того, в нелинейном случае флуктуационное поле тела негауссово. Действительно, нелинейные (многофотонные) процессы приводят к статистической зависимости разночастотных спектральных составляющих поля (к корреляции фотонов). В то же время, в силу теоремы Винера — Хинчина, квадратичная корреляция спектральных компонент стационарного случайного процесса отсутствует. Следовательно, корреляция спектральных компонент может фиксироваться только в высших кумулянтных функциях случайного процесса, т. е. приводит к его негауссовости.

Однако закон Кирхгофа не несет никакой информации о высших статистических характеристиках теплового поля — кумулянтах, вероятностных распределениях — и о их связи с нелинейными характеристиками поглощения. Такую связь можно установить на основе универсальных нелинейных флуктуационно-диссипационных соотношений (ФДС) [4, 7], что и составляет задачу настоящей работы. ФДС для квадратичной и кубичной нелинейностей впервые рассматривались Ефремовым [5] и Стратоновичем [6]. В [4] авторами была получена полная (бесконечная) совокупность ФДС как простое следствие инвариантности законов динамики относительно обращения времени. В [7] эти соотношения были обобщены на термически возмущенные, т. е. внутренне неравновесные системы. Использование этих соотношений позволяет вместо моментов флуктуаций рассматривать их вероятностные характеристики, т. е. полностью учесть негауссовость.

В настоящей работе общие результаты [4, 7] применяются к анализу взаимодействия тела (макроскопического) с окружающим его излучением. При рассмотрении излучения лишь в волновой зоне достаточно минимальной информации о теле. Получающиеся для вероятностей различных процессов (или для высших кумулянтов амплитуд падающего и трансформированного полей) ФДС, справедливые при любой нелинейности, можно назвать нелинейным аналогом закона Кирхгофа. Некоторые, выведенные при специальных предположениях, соотношения для низших моментов рассматривались Клышко [3, 8] и Стратоновичем [9].

2. Пусть на тело, окруженное тепловым полем, падает также заданное излучение $E^{\text{ex}}(t, r)$, нарушающее термодинамическое равновесие. В стационарном режиме исходное производящее ФДС имеет вид [4]

$$\begin{aligned} &\operatorname{Sp}\{\exp[\textstyle\int u(t, r)E(t, r)d^3r dt]\exp(-\beta N - \beta H_0)\}_{E^{\text{ex}}(t,r)} = \\ &= \operatorname{Sp}\{\exp[\textstyle\int u(-t, r)E(t, r)d^3r dt]\exp(-\beta H_0)\}_{E^{\text{ex}}(-t,r)}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $E(t, r)$ — полное электрическое поле, $u(t, r)$ — произвольные пробные функции, H_0 — гамильтониан системы «тело (вещество) + поле», $\beta = T^{-1}$ — равновесная обратная температура системы,

$$N = \int j(t, r)E^{\text{ex}}(t, r)d^3r\, dt \tag{2}$$

— энергия внешнего поля, поглощенная веществом или рассеянная на бесконечность, $j(t, r)$ — полная плотность тока в веществе тела, нижний значок у шпура показывает, при каком внешнем условии берется неравновесное среднее, $E(t, r)$, $j(t, r)$ — операторы (в квантовом случае) в гейзенберговском представлении. Здесь и далее поляризационные индексы для простоты опущены.

В волновой зоне поле однозначно разбивается на падающие $(\overleftarrow{E})$ и уходящие $(\overrightarrow{E})$ волны. Для падающего поля имеем

$$\overleftarrow{E}(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{\varepsilon_k} \, \{\overleftarrow{A}_k \exp[-i(\omega_k t - kr)] + \text{э. с.}\} d^3 k, \tag{3}$$

где $\omega_k = c|k|$, $\varepsilon_k = \hbar\omega_k$. Нормировка амплитуд $\overleftarrow{A}_k$ такова, что в квантовом случае коммутатор

$$[\overleftarrow{A}_k, \overleftarrow{A}^*_{k'}] = \delta(k - k').$$

Аналогично записывается уходящее поле. Оно складывается из нерассеянного падающего поля и поля, излученного токами вещества (как индуцированными, так и спонтанными).

Амплитуды (операторы) уходящих волн $\overrightarrow{A}_k$ нетрудно выразить через фурье-компоненты тока $j(\omega; k)$ (для этого удобно перейти на время от плоских волн к сферическим):

$$2\pi \sqrt{\varepsilon_k} (\overrightarrow{A}^*_k - \overleftarrow{A}^*_k) = -j(\omega_k; k). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2), исключим из оператора поглощенной энергии переменные вещества:

$$N = -\int \varepsilon_k \{A^{\text{ex}*}_k (\overrightarrow{A}_k - \overleftarrow{A}_k) + \text{э. с.}\} d^3 k. \tag{5}$$

Очевидно, оператор (5) описывает упругое рассеяние на нулевой угол. Таким образом, соотношение (5) представляет собой обобщенную форму оптической теоремы, справедливую и в нелинейном случае.

3. Рассмотрим классический вариант задачи (для частот $\hbar\omega \ll T$). Здесь шпур в (1) означает интеграл по фазовому пространству. Из (1) для совместного вероятностного распределения W комплексных амплитуд $\overleftarrow{A}_k$, $\overrightarrow{A}_k$ получим формулу симметрии

$$W[\overrightarrow{A}_k; \overleftarrow{A}_k; A^{\text{ex}}_k] \exp(-N/T) = W[\overleftarrow{A}^*_{-k}; \overrightarrow{A}^*_{-k}; A^{\text{ex}*}_{-k}]. \tag{6}$$

Далее введем условное распределение V амплитуд уходящих волн при фиксированных амплитудах падающих волн:

$$W[\overrightarrow{A}_k; \overleftarrow{A}_k; A^{\text{ex}}_k] = V[\overrightarrow{A}_k | \overleftarrow{A}_k] \, W_0 [\overleftarrow{A}_k - A^{\text{ex}}_k]; \tag{7}$$

$$W_0 [\overleftarrow{A}_k] \sim \exp\{-(1/T) \int \varepsilon_k |\overleftarrow{A}_k|^2 d^3 k\}. \tag{8}$$

Формула (8) — это гауссово распределение амплитуд равновесного падающего (приходящего от окружения) поля.

Подчеркнем, что условное распределение V описывает неравновесную ситуацию. Если тело макроскопическое, то при тех же условиях, при которых к неравновесной ситуации применяется закон Кирхгофа, можно рассматривать V как автономную характеристику тела. Тогда, в частности, можно интерпретировать $V(\overrightarrow{A}|0)$ как вероятностное распределение собственного излучения тела (когда «на входе» ничего нет). С другой стороны,

$$\langle \overrightarrow{A}_{k_0} \rangle = \int \overrightarrow{A}_{k_0} V(\overrightarrow{A} | \overleftarrow{A}) \, d\overrightarrow{A} = U_{k_0}(\overleftarrow{A}) \tag{9}$$

будет иметь смысл нелинейной матрицы рассеяния тела. Однако такая интерпретация, строго говоря, всегда приближенна, в то время как исходное и основное соотношение симметрии (6) является точным как в математическом, так и в физическом смысле (и применимо даже к отдельному атому).

Вместо V можно рассматривать кумулянты «уходящих» амплитуд, которые определяются формулой (введем для простоты цифровую дискретную индексацию)

$$\int \exp(u_1\vec{A}_1) V(\vec{A}\,|\,\overleftarrow{A})\, d\vec{A} = \\ = \exp\{u_1 U_1(\overleftarrow{A}) + (1/2!)\, u_1 u_2 D_{12}(\overleftarrow{A}) + (1/3!)\, u_1 u_2 u_3 D_{123}(\overleftarrow{A}) + \ldots\}. \tag{10}$$

Вторые кумулянты $D_{12}(\overleftarrow{A})$ и кумулянты высшего порядка $D_{123}(\overleftarrow{A})$, ..., $D_{1\,.\,n}(\overleftarrow{A})$ описывают стохастичность уходящих волн при фиксированных, т. е. неслучайных, падающих волнах. Иначе говоря, эти кумулянты описывают тепловое излучение тела.

Подставляя выражения (5), (7), (8) в (6), получим формулу симметрии для условной вероятности

$$V[\vec{A}_k\,|\,\overleftarrow{A}_k]\, W_0[\overleftarrow{A}_k] = V[\overleftarrow{A}^*_{-k}\,|\,\vec{A}^*_{-k}]\, W_0[\vec{A}^*_{-k}], \tag{11}$$

имеющую смысл условия детального баланса. Формула (11) в совокупности с (10) является производящей для бесконечной цепочки универсальных соотношений, связывающих $D_{1\,..\,n}(\overleftarrow{A})$ как с параметрами нелинейной матрицы рассеяния (9), так и между собой и обобщающих закон Кирхгофа.

4. Рассмотрим некоторые простейшие из этих соотношений в предположении слабой нелинейности. Мы будем интересоваться только их принципиальной структурой, поэтому для простоты будем обращаться с $\overleftarrow{A}_k$ как с действительными переменными. Кроме того, перейдем к переменным $X = \{\sqrt{\varepsilon_k}\,\overleftarrow{A}_k\}$, $Y = \{\sqrt{\varepsilon_k}\,\vec{A}_k\}$, переопределив соответственно функции (9), (10).

В чисто линейном случае, когда

$$Y_1 = U_1(X) = U_1^2 X_2,$$

следствием (11) является гауссовость V. В этом случае $D_{1\ldots n} = 0$ при $n \geqslant 3$, и из (10), (11) находим

$$D_{12} = T(\delta_{12} - U_1^3 U_2^3), \tag{12}$$

т. е. «обычный» закон Кирхгофа. Наоборот, нелинейность (9) неизбежно влечет негауссовость излучения.

Учтем слабую квадратичную нелинейность:

$$\langle Y_1\rangle = U_1(X) = U_1^2 X_2 + U_1^{23} X_2 X_3 + \ldots,$$

$$D_{12}(X) = D_{12} + D_{12}^3 X_3 + \ldots,$$

$$D_{123}(X) = D_{123} + \ldots$$

Теперь следствием (11) являются соотношения

$$D_{12}^3 = 2T(U_3^{12} - U_2^{34} U_1^4 - U_1^{34} U_2^4),$$

$$D_{123} = 2T^2\{(U_1^{45} U_2^4 U_3^5 - U_4^{23} U_1^4) + \text{перестановки}\}.$$

Таким образом, третий кумулянт собственного излучения определяется однозначно квадратичной частью матрицы рассеяния, так же как и поправка $D^3_{12}X_3$ к корреляционной функции теплового излучения тела при наличии заданного (когерентного) внешнего поля. Отметим, что формула (12) в этом приближении справедлива по-прежнему.

Пусть имеется слабая кубичная нелинейность. Для этого случая рассмотрим лишь некоторые из следствий (11). Полагая

$$U_1(X) = U_1^2 X_2 + U_1^{234} X_2 X_3 X_4 + \ldots,$$

$$D_{12}(X) = D_{12} + \ldots,$$

получим вместо (12) соотношение

$$D_{12} = T(\delta_{12} - U_1^3 U_2^3) - 3T^2 (U_1^{344} U_2^3 + U_2^{344} U_1^3) + \ldots, \tag{13}$$

где не выписаны члены более высокого порядка по малому параметру нелинейности. Таким образом, «обычный» закон Кирхгофа нарушается («двухфотонный парадокс» [3]). В частности, если тело прозрачно и его коэффициент близок к единице (т. е. если $U_1^2 = \delta_{12}$), то

$$D_{12} = -3T^2 (U_1^{233} + U_2^{133}) + \ldots$$

Отсюда видно, что положительная определенность матрицы D_{12} налагает ограничения на вид кубичной нелинейности прозрачного тела.

Заметим также, что (13) вовсе не противоречит флуктуационно-диссипационной теореме (ФДТ). Действительно, в строгую формулу ФДТ входит реакция на внешнее возмущение первоначально равновесной системы. В нашем случае это — тело в радиационном равновесии с окружением. Определяя линейный отклик на внешнюю волну Z_2, найдем, с учетом теплового поля от окружения,

$$\langle Y_1 \rangle = \tilde{U}_1^{(2)} Z_2, \quad \tilde{U}_1^2 \equiv U_1^2 + 3TU_1^{233}. \tag{14}$$

Из (13), (14) видим, что с прослеженной точностью матрица собственного излучения равна

$$D_{12} = T(\delta_{12} - \tilde{U}_1^3 \tilde{U}_2^3)$$

в соответствии с ФДТ.

5. Рассмотрим квантовый случай. Поскольку падающие и уходящие фотоны могут, в принципе, детектироваться независимо (с помощью детекторов, основанных соответственно на излучении и поглощении), в квантовом описании операторы уничтожения $\overleftarrow{A}_k$ и операторы рождения $\overrightarrow{A}_k^{\dagger}$ должны коммутировать. Но в реальном состоянии имеется корреляция между ними, которая и характеризует взаимодействие тела с излучением. Стратонович предложил описывать эту корреляцию «феноменологическими» уравнениями вида $\overrightarrow{A}_k = \Phi_k(\overleftarrow{A}) + \xi_k$, где Φ_k — нелинейный функционал, ξ_k — случайная, спонтанная, добавка [9]. Однако из предыдущего понятно, что в нелинейном случае ξ_k неизбежно зависит от падающего поля, а функционал Φ_k содержит элемент случайности. Кроме того, указанное представление может войти в противоречие с коммутационными свойствами оператора поля.

Естественный способ полного статистического описания процесса — это введение совместной матрицы плотности для падающего и уходящего излучения. Обозначим ее через R_{ab}^{mn}, относя верхние индексы к уходящим фотонам. Здесь и далее

$$n \equiv | k_1 k_2 \ldots k_n \rangle, \qquad \bar{n} \equiv | -k_1 - k_2 \ldots - k_n \rangle.$$

— состояния, в которых имеется n (уходящих или приходящих) фотонов с волновыми векторами k_i. Точнее, нужно говорить не о состоянии, а о процессе, в котором участвует в течение определенного интервала времени указанное количество фотонов. Таким образом, R_{aa}^{nn} есть вероятность процесса, в котором «пришли» a фотонов с волновыми векторами $k_1, \dots, k_a$ и «ушли» n фотонов с волновыми векторами $k'_1, \dots, k'_n$.

Из (1) вытекает аналогичное (6) основное квантовое соотношение

$$\ln R\,[\vec{A}_k;\ \overleftarrow{A}_k;\ A_k^{ex}] + \beta \int \varepsilon_k \{A_k^{ex*}(\vec{A}_k - \overleftarrow{A}_k) + \text{э. с.}\}\, d^3k = \\ = \ln R^T\,[\overleftarrow{A}_{-k}^*;\ \vec{A}_{-k}^*;\ A_{-k}^{ex*}], \tag{15}$$

где матрица плотности записана в виде функции операторов поля.

При рассмотрении только моментов распределения электрического поля, которые выражаются симметризованными комбинациями операторов, удобно перейти к диагональному когерентному представлению Вигнера (см., например, [10]). Тогда, рассматривая A_k как классические переменные, из (15) получим формулы (6), (11), где, однако, вместо (8) имеем

$$W_0\,[\overleftarrow{A}_k] \sim \exp\left\{-\int \varepsilon_k\, \Theta^{-1}(\omega_k; T)\, |\overleftarrow{A}_k|^2\, d^3k\right\}.$$

В отличие от этих формул соотношение (15) полностью учитывает квантовые эффекты. Оно позволяет проанализировать общие, не зависящие от природы тела, взаимосвязи между вероятностями различных многофотонных процессов, корреляциями фотонов и реакцией тела на внешнее когерентное излучение A_k^{ex}.

Рассмотрим подробнее равновесную ситуацию ($A^{ex} = 0$). Введя совместные вероятности $p(n;\ m) = R_{mm}^{nn}$ и условные вероятности $p(n|m) = p(n;\ m)/p(m)$, из (15) для них получим

$$p(n;\ m) = p(\overline{m};\ \overline{n}), \quad p(n|m) = p(\overline{m}|\overline{n}) \exp(\beta\varepsilon_m - \beta\varepsilon_n), \\ p(n|0) = p(0|n)\exp(-\beta\varepsilon_n) \quad \left(\varepsilon_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \hbar c\, |k_i|\right). \tag{16}$$

Из (16) видно, в частности, что статистика собственного (в отсутствие падающих фотонов) излучения полностью определяет статистику диссипации (и обратно).

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике — М: Наука, 1967.
2. Рытов С. М, Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2 — М.: Наука, 1978.
3. Клышко Д. Н. — ДАН СССР, 1979, **244**, с. 563.
4. Бочков Г. Н., Кузовлев Ю. Е. — ЖЭТФ, 1977, **72**, с. 238; 1979, **76**, с. 1071.
5. Ефремов Г. Ф. — ЖЭТФ, 1966, **51**, с. 156; 1968, **55**, с. 2322.
6. Стратонович Р. Л. — ЖЭТФ, 1970, **58**, с. 1612
7. Bochkov G. N., Kuzovlev Yu. E. — Physica A., 1981, **106**, p. 443; 480; Бочков Г. Н, Кузовлев Ю.Е. — Препринт № 138 НИРФИ, Горький, 1980.
8. Клышко Д. Н. Квантовая электроника, 1977, **4**, с. 134
9. Стратонович Р. Л — ДАН СССР, 1979, **245**, с 354.
10. Перина Я Когерентность света — М: Мир, 1974

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 16 мая 1980 г.

THE NONLINEAR ANALOG OF KIRCHHOFF LAW

G. N. Bochkov, Yu. E. Kuzovlev

Based on universal fluctuation-dissipation relations obtained by the authors earlier, as a consequence of macroscopic reversibility principle, relations have been derived between parameters of the nonlinear matrix of the body scattering and statistical characteristics of the thermal radiation of a body (in the wave zone) which generalized the Kirchhoff law. A complete consideration of nongaussian fluctuations is made and its relation with the matter nonlinearity. Examples have been considered.