УДК 525.72

# О ЛИНЕАРИЗАЦИИ ОСНОВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ РАДИОТЕПЛОЛОКАЦИОННОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОФИЛЕЙ АТМОСФЕРЫ. II

*С. А. Жевакин*

При помощи аппарата функциональных производных линеаризуется основное интегральное уравнение, применяемое для восстановления температурных высотных профилей атмосферы при радиотеплолокационном визировании сверху (с самолета или из космоса). Полученное линеаризированное уравнение отличается от соответствующего (некорректного) линеаризированного уравнения, используемого в работах по радиодистанционному восстановлению температурных профилей в полосе длин волн молекулярного поглощения кислорода $\lambda \sim 5$ *мм*, которое не учитывает неизотермичности атмосферы и отличия друг от друга температуры земной поверхности $T_п$, температуры приповерхностной атмосферы $T_0$ и яркостной температуры атмосферы (для случая радиотеплолокации с земной поверхности) $\overline{T_я(\nu, \theta)}$. Выделяются два случая: полет над почвенной или растительной поверхностью и над водной поверхностью. В первом случае поправка на регуляризированную величину $\Delta_r T(h) = T_r(h) - \overline{T(h)}$ ($T_r(h)$ — восстанавливаемый регуляризированный высотный профиль температуры, $\overline{T(h)}$ — линейный среднестатистический профиль температуры) практически не зависит от частоты $\nu$ и зенитного угла визирования $\theta$ и определяется неизотермичностью атмосферы и величиной разности $T_п - T_0$; при $T_п - T_0 = 10°$ поправка может доходить до 7%. Во втором случае при $\nu \lesssim 52{,}5$ *ГГц* поправка может доходить до нескольких десятков процентов (из-за большой разницы между $\overline{T_я(\nu, \theta)}$ и $T_п$), при $\nu \gtrsim 53$ *ГГц* поправка получается около 10%.

1. Статья продолжает работу [1] (далее именуемую I) и ставит своей целью линеаризацию основного радиотеплолокационного уравнения для условий радиодистанционного зондирования системы Земля — атмосфера сверху (с самолета или из космоса).

Яркостная температура системы Земля — атмосфера при радиозондировании сверху в пренебрежении сферичностью равна, как известно,

$$T_я(\nu, \theta, \varphi) = [1 - R(\nu, \theta, \varphi)^2] T_п \exp\left\{- \mathrm{sc}\,\theta \int\limits_0^{H_1} \gamma[\nu, T(h), p(h)]\, dh\right\} + \mathrm{sc}\,\theta \int\limits_0^{H_1} T(h) \gamma[\nu, T(h), p(h)] \times$$
$$\times \exp\left\{- \mathrm{sc}\,\theta \int\limits_h^{H_1} \gamma[\nu, T(h'), p(h')]\, dh'\right\} dh + R(\nu, \theta, \varphi)^2 \times \tag{1}$$
$$\times\, \mathrm{sc}\,\theta \int\limits_0^{\infty} T(h) \gamma[\nu, T(h), p(h)] \exp\left\{- \mathrm{sc}\,\theta \left[\int\limits_0^{h} \gamma[\nu, T(h'), p(h')]\, dh' + \int\limits_0^{H_1} \gamma[\nu, T(h), p(h)]\, dh\right]\right\} dh,$$

где $R(\nu, \theta, \varphi)^2$ — коэффициент отражения радиоизлучения подстилающей поверхности Земли (по мощности), $\nu$ — частота радиоизлучения, $\theta$ — угол линии наблюдения с линией надира, $\varphi$ — азимутальный угол наблюдения, $T_п$ — температура подстилающей поверхности Земли, $\gamma[\nu, T, p]$ — коэффициент поглощения радиоизлучения атмосферой (по мощности), $h$ — высота над поверхностью Земли элементарного излучающего слоя атмосферы, $T(h)$ — высотный профиль температуры атмосферы, $p(h)$ — высотный профиль давления атмосферы, $H_1$ — высота точки наблюдения над поверхностью Земли (при наблюдении из космоса следует считать $H_1 = \infty$).

Коэффициент отражения от подстилающей поверхности $R(\nu, \theta, \varphi)^2$ в общем случае будет зависеть от азимутального угла $\varphi$ (например, при отражении от взволнованной поверхности моря или от пашни с бороздами) [2, 3]. При излучательной способности поверхности $J$, удовлетворяющей закону Ламберта $J = J_0 \cos\theta$, коэффициент отражения $R(\nu, \theta, \varphi)^2$ оказывается не зависящим от углов $\theta$, $\varphi$. Таким образом, зависимость коэффициента отражения $R(\nu, \theta, \varphi)^2$ от углов $\theta$, $\varphi$ характеризует степень отклонения излучения поверхности от закона Ламберта.

Поскольку в дальнейшем, как и в I, мы предполагаем, что радиозондирование осуществляется в диапазоне длин волн $\lambda \sim 5$ *мм*, в котором поглощением водяного пара можно пренебречь в сравнении с поглощением молекулярного кислорода, то мы будем отождествлять коэффициент поглощения $\gamma[\nu, T, p]$ с поглощением молекулярного кислорода: $\gamma[\nu, T, p] = \gamma_{O_2}[\nu, T, p]$.

В таком случае, полагая, как и в I,

$$\gamma[\nu, T(h), p(h)] = f(\nu, h)\, T^{-n(\nu,h)} p^{m(\nu,h)}, \tag{2}$$

мы для показателей $n(\nu, h)$, $m(\nu, h)$ можем пользоваться табл. 1, 2 работы I.

Представим температурный профиль атмосферы $T(h)$ в виде $T(h) = \overline{T(h)} + \Delta T(h)$, где $\overline{T(h)}$ есть некоторый средний температурный профиль атмосферы, получаемый, например, по бортовому измерению температуры (при радиометрировании с самолета) или (при радиометрировании из космоса) каким-либо иным способом. При этом, в отличие от работы I, мы будем с самого начала предполагать, что средний профиль температуры $\overline{T(h)}$ линейный: $\overline{T(h)} = T_0 - ah$, где $a = \mathrm{const}$, $T_0 = T(0)$ — температура атмосферы у поверхности Земли. Обозначим также $\delta T_я(\nu, \theta, \varphi) = T_я(\nu, \theta, \varphi) - \overline{T_я(\nu, \theta, \varphi)}$, где $\overline{T_я(\nu, \theta, \varphi)}$ есть яркостная температура атмосферы при наблюдении под углом визирования $\theta$, $\varphi$ с высоты $H_1$ вниз, получающаяся для среднего профиля температуры, $\overline{p(h)}$, согласно барометрической формуле, — функционал от $\overline{T(h')}$ $(h' < h)$, $\overline{\gamma(h)}$ — профиль коэффициента поглощения радиоизлучения для «средней» модели атмосферы с профилем $\overline{T(h)}$,

$$\tau = \tau(h) = \int_0^h \overline{\gamma(h')}\, dh', \quad \tau_1 = \tau(H_1) = \int_0^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, dh', \quad \tau_0 = \int_0^{\infty} \overline{\gamma(h)}\, dh.$$

Тогда, согласно (1), выражение для $\delta T_я(\nu, \theta, \varphi)$ может быть записано в виде

$$\delta T_я(\nu, \theta, \varphi) = T_п\, \delta \exp\left\{- \sec\theta \int_0^{H_1} \gamma[\nu, T(h), p(h)]\, dh \right\} +$$

$$+ \sec\theta\, \delta \int_0^{H_1} T(h)\, \gamma[\nu, T(h), p(h)] \exp\left\{- \sec\theta \int_h^{H_1} \gamma[\nu, T(h'),\right.$$

$$p(h')]\,dh'\Big\}\,dh + R(\nu,\ \theta,\ \varphi)^2\Big\{-T_{\text{п}}\delta\exp\Big\{-\sec\theta\int\limits_0^{H_1}\gamma\,[\nu,\ T(h),\ p(h)]\,dh\Big\} +$$

$$+\,\delta\exp\Big\{-\sec\theta\int\limits_0^{H_1}\gamma\,[\nu, T(h),\ p(h)]\,dh\Big\}\sec\theta\int\limits_0^{\infty}\overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)}\times \tag{3}$$

$$\times\exp\Big[-\sec\theta\int\limits_0^{h}\overline{\gamma(h')}\,dh'\Big] + \exp\Big(-\sec\theta\int\limits_0^{H_1}\overline{\gamma(h)}\,dh\Big)\times$$

$$\times\sec\theta\delta\int\limits_0^{\infty}T(h)\gamma\,[\nu,\ T(h),\ p(h)]\exp\Big\{-\sec\theta\int\limits_0^{h}\gamma\,[\nu,\ T(h'),\ p(h')]\,dh'\Big\}\,dh\Big\}.$$

Мы выполнили здесь группировку членов с множителем $R(\nu,\ \theta,\ \varphi)^2$ и одновременно провели линеаризацию уравнения (1) соответственно последующему разложению по степеням $\Delta T(h)/\overline{T(h)}$ с удержанием лишь членов, линейных по $\Delta T(h)/\overline{T(h)}$ (об оправданности такой линеаризации можно судить по данным табл. 3 работы I). При этом знак функционального дифференциала $\delta$ имеет тот смысл, что $\delta\,\Phi[T(h)] = \Phi[T(h) + \Delta T(h)] - \Phi[T(h)]$ ($\Phi[T(h)]$ — функционал); при написании (3) мы использовали также известное свойство $\delta(\Phi_1\Phi_2) = \delta\Phi_1\cdot\Phi_2 + \Phi_1\delta\Phi_2$.

Выполняя указанное разложение фактически и используя при этом уравнение (2) и барометрическую формулу

$$p(h) = p_0\exp\Big(-\int\limits_0^{h}\frac{g\,dh'}{R_{\text{в}}T(h')}\Big),$$

получаем вместо (3)

$$\delta T_{\text{я}}(\nu,\ \theta,\ \varphi) = T_{\text{п}}e^{-\tau_1\sec\theta}\sec\theta\int\limits_0^{H_1}\overline{\gamma(h)}\Big[n(\nu,\ h)\frac{\Delta T(h)}{\overline{T(h)}} -$$

$$-\,m(\nu,\ h)\int\limits_0^{h}\frac{g\,\Delta T(h')}{R_{\text{в}}\overline{T(h')}}\Big]\,dh + \sec\theta\int\limits_0^{H_1}\overline{\gamma(h)}\exp\Big[-\sec\theta\int\limits_h^{H_1}\overline{\gamma(h')}\,dh'\Big]\times$$

$$\times\Big\{(1 - n(\nu,\ h))\,\Delta T(h) + \sec\theta\,\overline{T(h)}\int\limits_h^{H_1}\overline{\gamma(h')}\,n(\nu,\ h')\frac{\Delta T(h')}{\overline{T(h')}}\,dh' +$$

$$+\,m(\nu,\ h)\,\overline{T(h)}\int\limits_0^{h}\frac{g\,\Delta T(h')}{R_{\text{в}}\overline{T(h')}^2}\,dh' - \overline{T(h)}\sec\theta\int\limits_h^{H_1}\overline{\gamma(h')}\,m(\nu,\ h')\times \tag{4}$$

$$\times\Big[\int\limits_0^{h'}\frac{g\,\Delta T(h'')}{R_{\text{в}}\overline{T(h'')}^2}\,dh''\Big]\,dh'\Big\}\,dh + R(\nu,\ \theta,\ \varphi)^2e^{-\tau_1\sec\theta}\times$$

$$\times\Big\{(\overline{T_{\text{я}}(\nu,\ \theta)} - T_{\text{п}})\sec\theta\int\limits_0^{H_1}\overline{\gamma(h)}\Big[n(\nu,\ h)\frac{\Delta T(h)}{\overline{T(h)}} - m(\nu,\ h)\times$$

$$\times\int\limits_0^{h}\frac{g\,\Delta T(h')}{R_{\text{в}}\overline{T(h')}}\,dh'\Big]\,dh + \sec\theta\int\limits_0^{\infty}\overline{\gamma(h)}\,e^{-\tau\sec\theta}K(\nu,\ \theta,\ h)\,\Delta T(h)\,dh\Big\},$$

где

$$\overline{T_я(\nu,\theta)} = \sec\theta \int_0^\infty \overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)} \exp\left(-\sec\theta \int_0^h \overline{\gamma(h')}\,dh'\right) dh =$$

$$= \left[T_0 - aH_\gamma \frac{s(\tau_0 \sec\theta)}{e^{\tau_0 \sec\theta} - 1}\right](1 - e^{-\tau_0 \sec\theta})$$

есть яркостная температура «средней» атмосферы при наблюдении с поверхности Земли под зенитным углом $\theta$, а корректирующий множитель $K(\nu, \theta, h)$ определяется выражением (13) работы I. Разумеется, при этом для «средней» модели атмосферы принимается линейное изменение температуры с высотой и экспоненциальное уменьшение коэффициента поглощения $\overline{\gamma(h)}$:

$$\overline{T(h)} = T_0 - ah \quad (a = \text{const}), \qquad \overline{\gamma(h)} = \gamma_0 e^{-h/H_\gamma}.$$

Значения характеристических высот поглощения $H_\gamma$ приведены в табл. 4 работы I; там же продемонстрирована достаточно высокая точность экспоненциальной аппроксимации коэффициента поглощения.

2. Преобразования входящих в выражение (4) интегралов к виду

$$\int_0^{H_1} [\ldots] \Delta T(h)\,dh$$

выполняем с применением аппарата функциональных производных. При этом мы принимаем, что в выражении (2) показатель $m(\nu, h)$ не зависит от высоты: $m(\nu, h) = m_0(\nu)$. Высокая степень точности этого предположения следует из табл. 1, 2 работы I. Именно оно позволит нам, как и в I, выразить окончательные результаты в замкнутой форме через интегральную показательную функцию $\mathrm{Ei}(x)$. В результате получаем

$$\delta T_я(\nu, \theta, \varphi) = T_п e^{-\tau_1 \sec\theta} \sec\theta \int_0^{H_1} \frac{\overline{\gamma(h)}}{\overline{T(h)}} \Bigg[ n(\nu, h) -$$

$$- \frac{g m_0(\nu)}{R_в \overline{T(h)}} H_\gamma \frac{\tau_1 - \tau}{\tau_0 - \tau}\Bigg] \Delta T(h)\,dh + e^{-\tau_1 \sec\theta} \int_0^{H_1} \Bigg\{ \sec\theta\, \overline{\gamma(h)} e^{\tau \sec\theta} +$$

$$+ \frac{T_0}{\overline{T(h)}} (e^{\tau_0 \sec\theta} - 1) \sec\theta \left[\overline{\gamma(h)} n(\nu, h) - \frac{g m_0(\nu)}{R_в \overline{T(h)}} (\tau_1 - \tau)\right] -$$

$$- \sec\theta\, \overline{\gamma(h)} n(\nu, h) e^{\tau_0 \sec\theta} + \frac{g m_0(\nu)}{R_в \overline{T(h)}} \sec\theta (\tau_0 - \tau) e^{\tau_0 \sec\theta} - \frac{T_1}{\overline{T(h)}} \frac{g m_0(\nu)}{R_в \overline{T(h)}} \times$$

$$\times \sec\theta (\tau_0 - \tau_1) e^{\tau_0 \sec\theta} - \frac{a H_\gamma}{\overline{T(h)}} \Bigg\{ \Bigg[ - \sec\theta\, \overline{\gamma(h)} n(\nu, h) +$$

$$+ \frac{g m_0(\nu)}{R_в \overline{T(h)}} \sec\theta (\tau_1 - \tau) \Bigg] (e^{\tau_0 \sec\theta} - 1) \frac{s(-\tau_0 \sec\theta)}{1 - e^{-\tau_0 \sec\theta}} +$$

$$+ \left[\sec\theta\, \overline{\gamma(h)} n(\nu, h) - \frac{g m_0(\nu)}{R_в \overline{T(h)}} \sec\theta (\tau_0 - \tau)\right] (e^{\tau_0 \sec\theta} - e^{\tau \sec\theta}) \times$$

$$\times \frac{s(-[\tau_0-\tau]\,\mathrm{sc}\,\theta)}{1-e^{-[\tau_0-\tau]\,\mathrm{sc}\,\theta}} + \frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}}\overline{T(h)}}\,\mathrm{sc}\,\theta(\tau_0-\tau_1)\times \tag{5}$$

$$\times(e^{\tau_0\,\mathrm{sc}\,\theta}-e^{\tau_1\,\mathrm{sc}\,\theta})\frac{s(-[\tau_0-\tau_1]\,\mathrm{sc}\,\theta)}{1-e^{-[\tau_0-\tau_1]\,\mathrm{sc}\,\theta}} - \frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}}\overline{T(h)}}\times$$

$$\times e^{\tau\,\mathrm{sc}\,\theta} + \frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}}\overline{T(h)}}e^{\tau_1\,\mathrm{sc}\,\theta}\Bigg\}\Bigg\}\Delta T(h)\,dh + R(\nu,\ \theta,\ \varphi)^2\times$$

$$\times e^{-\tau_1\,\mathrm{sc}\,\theta}\Bigg((\overline{T_{\text{я}}(\nu,\theta)}-T_{\text{п}})\,\mathrm{sc}\,\theta\int\limits_0^{H_1}\frac{\overline{\gamma(h)}}{\overline{T(h)}}\left[n(\nu,\ h)-\frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}}\overline{T(h)}}H_\gamma\frac{\tau_1-\tau}{\tau_0-\tau}\right]\times$$

$$\times\Delta T(h)\,dh + \mathrm{sc}\,\theta\int\limits_0^\infty K(\nu,\ \theta,\ h)\overline{\gamma(h)}e^{-\tau\,\mathrm{sc}\,\theta}\,\Delta T(h)\,dh\Bigg).$$

Здесь $\overline{T_1}=\overline{T(H_1)}$ — «средняя» температура атмосферы на уровне полета (для космоса $T(H_1)=0$),

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{kk!}=\mathrm{Ei}(x)-\ln x-C,$$

$$x>0,$$

$$s(-x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{kk!}=\mathrm{Ei}(-x)-\ln x-C,$$

где $C$ — постоянная Эйлера, а интегральная показательная функция $\mathrm{Ei}(x)$ и $-\mathrm{Ei}(-x)$ табулированы [4].

Для иллюстрации вычислений, приводящих выражение (4) к виду (5), покажем, например, как преобразуется с использованием функциональной производной один из входящих в (4) интегралов:

$$A=\mathrm{sc}\,\theta\int\limits_0^{H_1}\overline{\gamma(h)}\exp\left[-\mathrm{sc}\,\theta\int\limits_h^{H_1}\overline{\gamma(h')}\,dh'\right]\overline{T(h)}\,\mathrm{sc}\,\theta\int\limits_h^{H_1}\overline{\gamma(h')}\,m(\nu,h')\times \tag{6}$$

$$\times\left[\int\limits_0^{h'}\frac{g\,\Delta T(h'')}{R_{\text{в}}\overline{T(h'')}^2}\,dh''\right]dh'dh.$$

Примем, что $\Delta T(h)=0$ всюду, за исключением тонкого слоя $h_i$, $h_i+\Delta h_i$, в котором $\Delta T(h)=\Delta T_i\neq 0$, а $\overline{T(h)}=T_i$. В таком случае выражение (6) перейдет в $A(\Delta T_i)$, которое запишем в виде

$$A(\Delta T_i)=\mathrm{sc}\,\theta\int\limits_0^{h_i}\overline{\gamma(h)}\exp\left[-\mathrm{sc}\,\theta\int\limits_h^{H_1}\overline{\gamma(h')}\,dh'\right]\overline{T(h)}\,\mathrm{sc}\,\theta\times$$

$$\times\int\limits_h^{H_1}\overline{\gamma(h')}\,m(\nu,\ h')\left[\int\limits_0^{h'}\frac{g\,\Delta T(h'')}{R_{\text{в}}\overline{T(h'')}^2}\,dh''\right]dh'dh+$$

$$+\mathrm{sc}\,\theta\int\limits_{h_i}^{H_1}\overline{\gamma(h)}\exp\left[-\mathrm{sc}\,\theta\int\limits_h^{H_1}\overline{\gamma(h')}\,dh'\right]\overline{T(h)}\,\mathrm{sc}\,\theta\int\limits_h^{H_1}\overline{\gamma(h')}\,m(\nu,\ h')\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^{h'}\frac{g\,\Delta T(h'')}{R_{\text{в}}\overline{T(h'')}^2}\,dh''\right]dh'dh=\mathrm{sc}\,\theta\int\limits_0^{h_i}\overline{\gamma(h)}\exp\left[-\mathrm{sc}\,\theta\int\limits_h^{H_1}\overline{\gamma(h')}\,dh'\right]\times$$

$$
\begin{aligned}
&\times \overline{T(h)}\,\mathrm{sc}\,\theta \int_{h_i}^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, m(\nu,\ h') \left[\int_0^{h'} \frac{g\,\Delta T(h'')}{R_{\text{в}}\overline{T(h'')}^2}\, dh''\right] dh'dh + \\
&+ \mathrm{sc}\,\theta \int_{h_i}^{H_1} \overline{\gamma(h)} \exp\left[-\mathrm{sc}\,\theta \int_h^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, dh'\right] \mathrm{sc}\,\theta\, \overline{T(h)} \int_h^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, m(\nu,\ h') \times \\
&\times \left[\frac{g}{R_{\text{в}}T_i^2}\,\Delta T_i \Delta h_i\right] dh'dh = \mathrm{sc}\,\theta \int_0^{h_i} \overline{\gamma(h)} \exp\left[-\mathrm{sc}\,\theta \int_h^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, dh'\right] \times \\
&\times \mathrm{sc}\,\theta\, \overline{T(h)} \int_{h_i}^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, m(\nu,\ h')\, \frac{g}{R_{\text{в}}T_i^2}\,\Delta T_i \Delta h_i dh'dh + \\
&+ \frac{\mathrm{sc}\,\theta^2 g}{R_{\text{в}}T_i^2}\,\Delta T_i \Delta h_i \int_{h_i}^{H_1} \overline{\gamma(h)} \exp\left[-\mathrm{sc}\,\theta \int_h^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, dh'\right] \overline{T(h)} \times \\
&\times \int_h^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, m(\nu,\ h')\, dh'dh = \frac{\mathrm{sc}\,\theta^2 g}{R_{\text{в}}T_i^2}\,\Delta T_i \Delta h_i m_0(\nu)\, [\,\tau(H_1) - \tau(h_i)\,] \times \\
&\times \int_0^{h_i} \overline{\gamma(h)} \exp\left[-\mathrm{sc}\,\theta \int_h^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, dh'\right] \overline{T(h)}\, dh + \frac{\mathrm{sc}\,\theta^2 g}{R_{\text{в}}T_i^2}\,\Delta T_i \Delta h_i m_0(\nu) \times \\
&\times \int_{h_i}^{H_1} \overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)} \exp\left[-\mathrm{sc}\,\theta \int_h^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, dh'\right] [\tau(H_1) - \tau(h)]\, dh = \\
&= \frac{\mathrm{sc}\,\theta^2 g}{R_{\text{в}}T_i^2}\, m_0(\nu)\, \Delta T_i\, \Delta h_i \tau(H_1) \int_0^{H_1} \overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)} \exp\left[-\mathrm{sc}\,\theta \int_h^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, dh'\right] dh - \\
&- \frac{\mathrm{sc}\,\theta^2 g}{R_{\text{в}}T_i^2}\, m_0(\nu)\, \Delta T_i\, \Delta h_i\, \tau(h_i) \int_0^{h_i} \overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)} \exp\left[-\mathrm{sc}\,\theta \int_h^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, dh'\right] dh - \\
&- \frac{\mathrm{sc}\,\theta^2 g}{R_{\text{в}}T_i^2}\, m_0(\nu)\, \Delta T_i\, \Delta h_i \int_{h_i}^{H_1} \overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)} \exp\left[-\mathrm{sc}\,\theta \int_h^{H_1} \overline{\gamma(h')}\, dh'\right] \tau(h)\, dh.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Мы использовали здесь то обстоятельство, что, согласно табл. 1, 2 работы I, $m(\nu,\ h)$ практически не зависит от $h$: $m(\nu,\ h) = m_0(\nu)$.

Делая в формулах (12) работы I замену $\mathrm{sc}\,\theta \to -\mathrm{sc}\,\theta$, находим

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sc}\,\theta \int_{h_i}^{\infty} \overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)}\, \exp\left[+\mathrm{sc}\,\theta \int_0^h \overline{\gamma(h')}\, dh'\right] dh = \\
&= \left[\overline{T(h_i)} + aH_\gamma \frac{s(-[\tau_0 - \tau(h_i)]\,\mathrm{sc}\,\theta)}{1 - \exp(-[\tau_0 - \tau(h_i)]\,\mathrm{sc}\,\theta)}\right] (e^{\tau_0\,\mathrm{sc}\,\theta} - e^{\tau(h_i)\,\mathrm{sc}\,\theta});
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sc}\,\theta^2 \int_{h_i}^{\infty} \overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)} \exp\left[+\mathrm{sc}\,\theta \int_0^h \overline{\gamma(h')}\, dh'\right] \tau(h)\, dh = \\
&= \overline{T(h_i)}\, [(1 - \tau(h_i)\,\mathrm{sc}\,\theta)\, e^{\tau(h_i)\,\mathrm{sc}\,\theta} - (1 - \tau_0\,\mathrm{sc}\,\theta) e^{\tau_0\,\mathrm{sc}\,\theta}] + \\
&+ aH_\gamma (e^{\tau(h_i)\,\mathrm{sc}\,\theta} - e^{\tau_0\,\mathrm{sc}\,\theta}) \left[1 + (1 - \tau_0\,\mathrm{sc}\,\theta) \frac{s(-[\tau_0 - \tau(h_i)]\,\mathrm{sc}\,\theta)}{1 - \exp(-[\tau_0 - \tau(h_i)]\,\mathrm{sc}\,\theta)}\right].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Используя интегралы (8), (9) для вычисления выражения (7) и переходя от $A(\Delta T_i)$ к $A$ в результате интегрирования по $\Delta h_i \to dh$, найдем окончательно

$$A = \frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}}} \int\limits_0^{H_1} \frac{\Delta T(h)\,dh}{\overline{T(h)}^2} \Big\{ e^{-\tau_1 \sec\theta} T_0 \sec\theta (\tau_1 - \tau)(e^{\tau_0 \sec\theta} - 1) +$$

$$+ \overline{T}_1 e^{-\tau_1 \sec\theta} [(\tau_0 \sec\theta - \tau_1 \sec\theta - 1) e^{\tau_0 \sec\theta} + e^{\tau_1 \sec\theta}] -$$

$$- \overline{T(h)} e^{-\tau_1 \sec\theta} [(\tau_0 \sec\theta - \tau \sec\theta - 1) e^{\tau_0 \sec\theta} + e^{\tau \sec\theta}] -$$

$$- aH_\gamma e^{-\tau_1 \sec\theta} \Big[ - \sec\theta (\tau_1 - \tau)(e^{\tau_0 \sec\theta} - 1) \frac{s(-\tau_0 \sec\theta)}{1 - e^{-\tau_0 \sec\theta}} -$$

$$- (e^{\tau_0 \sec\theta} - e^{\tau_1 \sec\theta})(\tau_0 \sec\theta - \tau_1 \sec\theta - 1) \frac{s(-[\tau_0 - \tau_1]\sec\theta)}{1 - \exp(-[\tau_0 - \tau_1]\sec\theta)} +$$

$$+ (e^{\tau_0 \sec\theta} - e^{\tau \sec\theta})(\tau_0 \sec\theta - \tau \sec\theta - 1) \frac{s(-[\tau_0 - \tau]\sec\theta)}{1 - \exp(-[\tau_0 - \tau]\sec\theta)} +$$

$$+ e^{\tau \sec\theta} - e^{\tau_1 \sec\theta} \Big] \Big\}.$$

Для условий наблюдения из космоса выражение для $\delta T_{\text{я}}(\nu, \theta, \varphi)_{\text{косм}}$ может быть получено из общей формулы (5), если положить в ней $H_1 = \infty$:

$$\delta T_{\text{я}}(\nu, \theta, \varphi)_{\text{косм}} = T_{\text{п}} e^{-\tau_0 \sec\theta} \sec\theta \int\limits_0^\infty \frac{\overline{\gamma(h)}}{\overline{T(h)}} \Big[ n(\nu, h) -$$

$$- \frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}} \overline{T(h)}} H_\gamma \Big] \Delta T(h)\,dh + e^{-\tau_0 \sec\theta} \int\limits_0^\infty \Big\{ \sec\theta\, \overline{\gamma(h)} e^{\tau \sec\theta} +$$

$$+ \frac{T_0}{\overline{T(h)}} (e^{\tau_0 \sec\theta} - 1) \sec\theta \Big[ \overline{\gamma(h)} n(\nu, h) -$$

$$- \frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}} \overline{T(h)}} (\tau_0 - \tau) \Big] - \sec\theta\, \overline{\gamma(h)} n(\nu, h) e^{\tau_0 \sec\theta} +$$

$$+ \frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}} \overline{T(h)}} \sec\theta (\tau_0 - \tau) e^{\tau_0 \sec\theta} - \frac{aH_\gamma}{\overline{T(h)}} \Big\{ \Big[ - \sec\theta\, \overline{\gamma(h)} n(\nu, h) + \qquad (10)$$

$$+ \frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}} \overline{T(h)}} \sec\theta (\tau_0 - \tau) \Big] (e^{\tau_0 \sec\theta} - 1) \frac{s(-\tau_0 \sec\theta)}{1 - e^{-\tau_0 \sec\theta}} +$$

$$+ \Big[ \sec\theta\, \overline{\gamma(h)} n(\nu, h) - \frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}} \overline{T(h)}} \sec\theta (\tau_0 - \tau) \Big] \times$$

$$\times (e^{\tau_0 \sec\theta} - e^{\tau \sec\theta}) \frac{s(-[\tau_0 - \tau]\sec\theta)}{1 - \exp(-[\tau_0 - \tau]\sec\theta)} - \frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}} \overline{T(h)}} e^{\tau \sec\theta} +$$

$$+ \frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}} \overline{T(h)}} e^{\tau_0 \sec\theta} \Big\} \Big\} \Delta T(h)\,dh + R(\nu, \theta, \varphi)^2 e^{-\tau_0 \sec\theta} \Big( \overline{T_{\text{я}}(\nu, \theta)} - T_{\text{п}} \Big) \times$$

$$\times \sec\theta \int\limits_0^\infty \frac{\overline{\gamma(h)}}{\overline{T(h)}} \Big[ n(\nu, h) - \frac{gm_0(\nu)}{R_{\text{в}} \overline{T(h)}} H_\gamma \Big] \Delta T(h)\,dh +$$

$$+ \sec\theta \int_0^\infty K(\nu, \theta, h)\overline{\gamma(h)}\, e^{-\tau \sec\theta} \Delta T(h)\, dh \Big)$$

3. При линеаризации уравнения (1) в работе [5] вместо уравнения (5) получалось, как видно из выражения (1) работы [5], уравнение

$$\delta T_я(\nu, \theta, \varphi) = e^{-\tau_1 \sec\theta} \int_0^{H_1} \sec\theta\, \overline{\gamma(h)}\, e^{\tau \sec\theta} \Delta T(h)\, dh + \\ + R(\nu, \theta, \varphi)^2 e^{-\tau_1 \sec\theta} \sec\theta \int_0^\infty \overline{\gamma(h)} e^{-\tau \sec\theta} \Delta T(h)\, dh, \qquad (11)$$

по мнению авторов [5] являющееся аналогом рецепта обычной «линеаризации» при радиотеплолокации с поверхности Земли (см., например, уравнение (6) работы I). Уравнение (11) получается из уравнения (1), если в последнем всюду положить $\gamma[\nu, T, p] \equiv \overline{\gamma(h)}$. Представляет интерес выяснить точность приближенной «линеризации» согласно уравнению (11) и границы ее применимости.

С этой целью рассмотрим два случая.

1) $R(\nu, \theta, \varphi)^2 = 0$.

Этот случай можно считать осуществляющимся для почвенных и растительных покровов, для которых $R(\nu, \theta, \varphi)^2 = 0 \div 0{,}05$ ввиду сравнительно малого отличия их комплексной диэлектрической проницаемости на миллиметровых волнах от единицы [6, 7]; лишь для воды $R(\nu, \theta, \varphi)^2 \approx 0{,}5$ из-за ее большой диэлектрической проницаемости [8].

В этом случае при $T_п = T_0$ и при изотермической атмосфере, когда $T_1 = T_0$, $a = 0$, легко убедиться, что уравнение (5) приводится к уравнению (11), притом при любых значениях зенитного угла $\theta$ и частоты . Таким образом, точное уравнение (5) дает при $R(\nu, \theta, \varphi)^2 = 0$ поправку к уравнению (11) за счет неизотермичности атмосферы и за счет возможного отличия приповерхностной температуры атмосферы $T_0$ от температуры поверхности Земли $T_п$. Принимая во внимание, что эффективная температура слоя атмосферы, заключенного между $h = 0$ и $h = H_1$, при визировании сверху равна

$$T_0 - aH_1 + \frac{1}{2} a H_1 \frac{s(\tau_1 \sec\theta)}{e^{\tau_1 \sec\theta} - 1},$$

нетрудно сообразить, что эта поправка по порядку величины составит долю

$$\frac{T_п - \left(T_0 - aH_1 + \frac{1}{2} a H_1 \frac{s(\tau_1 \sec\theta)}{e^{\tau_1 \sec\theta} - 1}\right)}{T_0} \approx \frac{T_п - T_0 + \frac{1}{2} aH_1}{T_0} \qquad (12)$$

от члена $e^{-\tau_1 \sec\theta} \sec\theta\, \overline{\gamma(h)}\, e^{\tau \sec\theta}$. Таким образом, поправка на восстанавливаемую величину (регуляризированную) $\Delta_r T = T_r(h) - \overline{T(h)}$ будет определяться выражением (12).

Из выражения (12) видно, что при $a > 0$ поправка будет наибольшей в том случае, когда температура поверхности $T_п$ превышает температуру $T_0$ приповерхностной атмосферы. При $a = 6$ *град/км*, $T_п - T_0 = 10°$, $T_0 = 288{,}3°$, $H_1 = 3$ *км* получаем, согласно (12), величину поправки 0,067, т. е. 6,7%.

2) $R(\nu, \theta, \varphi)^2 = 1$.

В этом случае величина поправки будет существенно зависеть от значений $\overline{T_я}(\nu, \theta)$ (см. табл. 1) и корректирующего множителя $K(\nu, \theta, h)$ (см. табл. 5 работы I), т. е. от частоты $\nu$ и зенитного угла $\theta$. При этом величину поправки следует относить к сумме обоих членов формулы (11), т. е. к

$$e^{-\tau_1 \mathrm{sc}\theta} \mathrm{sc}\,\theta\,\overline{\gamma(h)}\,(e^{\tau \mathrm{sc}\theta} + R(\nu, \theta, \varphi)^2 e^{-\tau \mathrm{sc}\theta}) \approx 2e^{-\tau_1 \mathrm{sc}\theta} \mathrm{sc}\,\theta\,\overline{\gamma(h)}\, e^{\tau \mathrm{sc}\theta}.$$

Таблица 1

**Значения яркостной температуры атмосферы**
**$\overline{T_я}(\nu, \theta)$ при $T_0 = 288{,}3°$, $a = 6$ *град/км***

| $\nu$, *ГГц* | $\mathrm{sc}\theta = 1$ | $\mathrm{sc}\theta = 2$ | $\mathrm{sc}\theta = 3$ |
|---|---|---|---|
| 52,0 | 126,3 | 195,1 | 232,7 |
| 53,0 | 189,4 | 249,9 | 270,4 |
| 53,5 | 225,4 | 269,1 | 279,3 |

Поправка составит от этой суммы долю

$$d(\nu, \theta, h) = \frac{1}{2}\left[\frac{\overline{T_я(\nu, \theta)} - T_п}{T_0} + K(\nu, \theta, h) - 1\right].$$

Принимая опять $T_0 = T_п = 288{,}3°$, $a = 6$ *град/км* и пользуясь табл. 1 настоящей работы и табл. 5 работы I, находим значения $K(\nu, \theta, h)$. Эти значения слабо зависят от высоты $h$ (через зависимость $d(\nu, \theta, h)$ от $h$); значения $d(\nu, \theta)$ в пренебрежении этой зависимостью помещены в табл. 2.

Таблица 2

**Значения величины $d(\nu, \theta)$**
**при $T_0 = T_п = 288{,}3°$, $a = 6$ *град/км***

| $\nu$, *ГГц* | $\mathrm{sc}\theta = 1$ | $\mathrm{sc}\theta = 2$ | $\mathrm{sc}\theta = 3$ |
|---|---|---|---|
| 52,0 | −0,89 | −0,28 | −0,17 |
| 53,0 | −0,19 | −0,08 | −0,04 |
| 53,5 | −0,12 | −0,04 | −0,002 |

Из табл. 2 видно, что при $R(\nu, \theta, \varphi)^2 = 1$ на частоте $\nu = 52$ *ГГц* поправка на восстановленное по уравнению (11) регуляризированное значение $\Delta_r T(h)$ может составить несколько десятков процентов, на частотах $\nu \gtrsim 53$ *ГГц* эта поправка оказывается порядка 10%.

В случае, промежуточном между случаями $R(\nu, \theta, \varphi)^2 = 0$ и $R(\nu, \theta, \varphi)^2 = 1$ (например, при полете над водной поверхностью, когда $R(\nu, \theta, \varphi)^2 \approx 0{,}5$), величина поправки окажется промежуточной между величинами поправок для случаев $R(\nu, \theta, \varphi)^2 = 0$ и $R(\nu, \theta, \varphi)^2 = 1$.

Итак, точное уравнение (5) дает поправки к приближенному уравнению (11) за счет учета неизотермичности атмосферы и за счет учета отличия друг от друга температуры земной поверхности $T_п$, температуры приповерхностной атмосферы $T_0$ и яркостной температуры атмосферы (для случая радиотеплолокации с земной поверхности) $\overline{T_я}(\nu, \theta)$. При $R(\nu, \theta, \varphi)^2 \approx 0$ (полет над почвенным или растительным покровами) поправка (регуляризированная) определяется только неизотермичностью атмосферы и возможным отличием величины $T_п$ от величины $T_0$. Она практически не зависит от частоты $\nu$ и зенитного угла $\theta$ и при $|T_п - T_0| \approx 10°$ не превышает 10%. При $R(\nu, \theta, \varphi)^2 \approx 0{,}5 \div 1$ (полет над водной поверхностью) поправка определяется неизотермичностью атмосферы и отличием друг от друга величин $T_п$, $T_0$ и $\overline{T_я(\nu, \theta)}$. При $\nu \gtrsim 53$ *ГГц* эта поправка (регуляризированная) не превышает 10%, но при $\nu \lesssim 52{,}5$ *ГГц* она может достигать нескольких десятков процентов за счет сильного уменьшения яркостной температуры атмосферы $\overline{T_я(\nu, \theta)}$ в сравнении с величиной $T_п$.

Выполненная в работе корректная линеаризация основного интегрального уравнения радиотеплолокации может представлять интерес не только для температурного зондирования земной атмосферы с самолета или из космоса, но и при исследовании планетных атмосфер.

Отметим также, что при такой линеаризации часто применяемый при решении обратных задач температурного зондирования процесс итераций делается, разумеется, излишним (это относится не только к случаю зондирования с самолета или из космоса, но и к случаю зондирования с поверхности Земли).

Итак, восстановление температурных профилей атмосферы при зондировании с самолета либо из космоса следует проводить по уравнению (5) либо по уравнению (10).

Автор благодарен И. А. Раковой за помощь в расчетах.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Жевакин С. А. — Изв вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 6, с. 688.
2. Богородский В. В, Козлов А И., Тучков Л Т Радиотепловое излучение земных покровов — Л.: Гидрометеоиздат, 1977.
3. Башаринов А. Е, Гурвич А С, Егоров С. Т. Радиоизлучение Земли как планеты — М: Наука, 1974
4. Таблицы интегральной показательной функции. — М: АН СССР, 1954
5. Китай Ш. Д, Сумин М. И., Троицкий А. В — Изв АН СССР Сер Физика атмосферы и океана, 1978, **14**, № 11, с 1131.
6. Андреев Г. А, Мериакри В В, Рубцов С Н, Ушаткин Е Ф — Радиотехника, 1979, **34**, № 5, с 84.
7. Башаринов А. Е, Зотова Е. Н, Наумов М Н, Чухланцев А А — Радиотехника, 1979, **34**, № 5, с. 16
8. Chamberlain J. E., Chantry G. W, Gebbie H A., Stone N. W, Taylor T. B, Wyllie G. — Nature, 1966, **210**, № 5038, p 790


Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 28 марта 1980 г.

## LINEARIZATION OF THE BASIC INTEGRAL EQUATION IN REMOTE RESTORATION OF ATMOSPHERE TEMPERATURE PROFILES. II

*S. A Zhevakin*

By an apparatus of functional derivatives the basic integral equation is linearized which is used for the restoration of the atmosphere height temperature profiles by the remote sensing from above (from an aircraft or from the cosmos). The linearized equation obtained differs from the corresponding (uncorrect) linearized equation used in works on remote restoration of height temperature profiles in wavelength band of molecule oxygen absorption at $\lambda \sim 5$ mm. The latter does not take into account the nonisothermality of the atmosphere and difference of the earth surface temperature $T_п$ from the surface temperature of the atmosphere $T_0$ and from the brightness temperature of the atmosphere (for the case of remote sensing from the earth surface) $T_я(\nu, \theta)$. Two cases are isolated: a flight above the solid or foliage surface and above the water surface. In the first case a correction for the regularized value $\Delta_r T(h) = T_r(h) - \overline{T(h)}$ ($T_r(h)$ is the restorated regularized height temperature profile, $\overline{T(h)}$ is the linear root mean square profile of the temperature) is practically independent on the frequency $\nu$ and the zenith angle of sensing $\theta$ and is defined by the atmosphere isothermality and the value of the difference $T_п - T_0$; for $T_п - T_0 = 10°$ a correction may achieve 7%. In the second case for $\nu \lesssim 52.5$ GHz a correction may reach several dozens of per cents (due to a large difference between $T_я(\nu, \theta)$ and $T_п$); for $\nu \gtrsim 53$ GHz a correction is of near 10%.