Том XXIV, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1981*

УДК 538.563 : 623.372.55

АДАПТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. А. Мальцев, И. Е. Позументов

Предлагается использовать нелинейный адаптивный дискретный фильтр на линии задержки для оптимальной фильтрации нелинейных функционалов гауссовых случайных процессов. Получены явные выражения для весовых коэффициентов фильтра, минимизирующего средний квадрат ошибки, при дельта-коррелированных входных воздействиях. Показано, что при включении на входе фильтра импульсного формирователя его характеристики существенно улучшаются.

1. Проблема адаптивной оптимальной фильтрации нелинейных функционалов гауссовых случайных процессов возникает при решении целого ряда практически важных задач: радиосвязи, радио- и гидролокации, выделения сигналов из шумов [1], идентификации и моделирования неизвестных систем [2, 3], компенсации нелинейных искажений сигналов [4] и т. п.

Определяющим фактором при построении оптимального фильтра является выбор критерия качества его работы. В настоящей статье для синтеза адаптивного фильтра воспользуемся критерием минимума среднеквадратичной ошибки (см. рис. 1):

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle \equiv \langle [y(t) - \hat{y}(t)]^2 \rangle = \min. \tag{1}$$

Здесь

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{E^n} h_n(u_1, \ldots, u_n) \prod_{i=1}^{n} x(t - u_i)\, du_i \tag{2}$$

— нелинейный функционал случайного процесса $x(t)$, представленный в виде конечного ряда Вольтерра; $h_n(u_1, \ldots, u_n)$ — некоторые априори неизвестные импульсные переходные характеристики n-го порядка; знак $\int_{E^n}$ обозначает n-кратный интеграл от 0 до ∞.

Выходной сигнал нелинейного адаптивного фильтра $\hat{y}(t)$ запишем в следующем виде:

$$\hat{y}(t) = w^0 + \sum_{n=1}^{N_F} \sum_{k_1=0}^{M} \cdots \sum_{k_n=0}^{M} w_{k_1,\ldots,k_n} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_n}, \tag{3}$$

где N_F — порядок нелинейного фильтра, $\xi_{k_i} = \xi(t - k_i\Delta t)$, $\xi(t) = x(t) + \eta(t)$, $\eta(t)$ — аддитивный шум, не коррелированный с $x(t)$. Таким образом, адаптивный нелинейный фильтр строится на базе линии задержки с $(M+1)$ отводами через одинаковые интервалы времени ΔT. Весовые коэффициенты фильтра $w_{k_1,\ldots,k_n}$ подстраиваются адаптивным образом так, чтобы минимизировать величину среднеквадратичной ошибки (1).

Для автоматической настройки $w_{k_1,\dots,k_n}$ воспользуемся градиентным алгоритмом, согласно которому адаптация весовых коэффициентов происходит в соответствии с дифференциальным уравнением

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\nabla_w \varepsilon^2(t) = \gamma\varepsilon(t)\,\xi(t). \tag{4}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$w^T = (w^0, w_{k_1}, w_{k_1k_2}, \dots, w_{k_1,\dots,k_{N_F}}),$$

$$k_i = 0, \dots, M, \quad i = 1, \dots, N_F.$$

$$\xi^T = (1, \xi_{k_1}, \xi_{k_1}\xi_{k_2}, \dots, \xi_{k_1} \dots \xi_{k_{N_F}}),$$

$$k_i = 0, \dots, M, \quad i = 1, \dots, N_F.$$

Решение усредненного уравнения (4) в стационарном состоянии имеет вид

$$\langle \varepsilon(t)\,\xi(t)\rangle = \langle (y(t) - \hat{y}(t))\,\xi(t)\rangle = 0 \tag{5}$$

или

$$w^* = \langle \xi(t)\,\xi^T(t)\rangle^{-1}\langle y(t)\,\xi(t)\rangle. \tag{6}$$

Отсюда видно, что для определения оптимальных значений весовых коэффициентов w^* необходимо обращать корреляционную матрицу размерности $\left[\left(\sum\limits_{i=0}^{N_F}(M+1)^i\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{N_F}(M+1)^i\right)\right]$, что в общем случае вызывает большие вычислительные трудности. Поэтому для нахождения w^* рассмотрим непосредственно уравнение (5).

Подстановка (2), (3) в (5) приводит к следующим выражениям для определения оптимальных весовых коэффициентов дискретного фильтра:

$$w^{0*}\left\langle \prod_{j=1}^{r}\xi_{k_j}\right\rangle + \sum_{n=1}^{N_F}\sum_{k_1=0}^{M}\dots\sum_{k_n=0}^{M} w^*_{k_1,\dots,k_n}\left\langle \prod_{i=1}^{n}\xi_{k_i}\prod_{j=1}^{r}\xi_{k_j}\right\rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\int_{E^n} h_n(u_1,\dots,u_n)\left\langle \prod_{i=1}^{n} x(t-u_i)\prod_{j=1}^{r}\xi_{k_j}\right\rangle du_i, \tag{7}$$

$$1 \leqslant r \leqslant N.$$

Предполагая далее входное воздействие $x(t)$ и аддитивный шум $\eta(t)$ гауссовыми случайными процессами с нулевыми средними значениями, можно выразить высшие моментные функции, входящие в (7), через авто- и взаимно-корреляционные функции $K_{xx}[\tau]$, $K_{\xi\xi}[\tau]$, $K_{x\xi}[\tau]$ процессов $x(t)$ и $\xi(t)$ (см., например, [5]). В результате преобразуем (7) к следующему виду*:

$$w^{0*} = \sum_{\substack{p=2\\ p\text{—четн}}}^{[N]}\frac{p!}{2^{p/2}(p/2)!}\int_{E^p} h_p(u_1,\dots,u_p)\prod_{i=1}^{p/2}K_{xx}[u_i -$$

* Заметим, что ранее в [3] были получены выражения для ядер непрерывного нелинейного оптимального фильтра, аналогичные (8), (9).

$$
- u_{p/2+i}]\, du_1 \dots du_p - \sum_{\substack{p=2\\ p\text{—четн}}}^{[N_F]} \frac{p!}{2^{p/2}(p/2)!} \sum_{k_1=0}^{M} \cdots \sum_{k_p=0}^{M} w^*_{k_1 \dots k_p} \times
$$

$$
\times \prod_{i=1}^{p/2} K_{\xi\xi}\,[(k_i - k_{p/2+i})\,\Delta T]; \tag{8}
$$

$$
\sum_{k_1=0}^{M} \cdots \sum_{k_n=0}^{M} w^*_{k_1 \dots k_n} \prod_{i=1}^{n} K_{\xi\xi}\,[(k_i - m_i)\,\Delta T] = \sum_{\substack{p=0\\ p\text{—четн}}}^{[N-n]} \frac{(p+n)!}{2^{p/2}(p/2)!\,n!} \times
$$

$$
\times \int_{E^{p+n}} h_{p+n}(u_1, \dots, u_{p+n}) \prod_{i=1}^{p/2} K_{xx}\,[u_i - u_{p/2+i}] \prod_{i=1}^{n} K_{x\xi}\,[u_{p+i} -
$$

$$
- m_i \Delta T]\, du_1 \dots du_{p+n} - \sum_{\substack{p=2\\ p\text{—четн}}}^{[N_F - n]} \frac{(p+n)!}{2^{p/2}(p/2)!\,n!} \sum_{k_1=0}^{M} \cdots \sum_{k_{p+n}=0}^{M} \times \tag{9}
$$

$$
\times w^*_{k_1 \dots k_{p+n}} \prod_{i=1}^{p/2} K_{\xi\xi}\,[(k_i - k_{p/2+i})\,\Delta T] \prod_{i=1}^{n} K_{\xi\xi}\,[(k_{p+i} - m_i)\,\Delta T]
$$

$$
(n = 1, 2, \dots, N),
$$

где $[N]$ — максимальное четное число, не превосходящее N.

Полученные выражения дают точную связь стационарных значений весовых коэффициентов адаптивного фильтра с импульсными переходными характеристиками нелинейного функционала $y(t)$. Отметим, что близость $w^*_{k_1 \dots k_n}$ к $h_n(u_1, \dots, u_n)$ характеризует точность адаптивной фильтрации сигнала $y(t)$ из смеси с аддитивным шумом $\eta(t)$ (в смысле (1)).

2. Проанализируем выражения (8), (9), когда $x(t)$ и $\eta(t)$ представляют собой статистически независимые δ-коррелированные случайные процессы*:

$$
\begin{gathered}
K_{xx}[\tau] = K_{x\xi}[\tau] = D_x\,\delta(\tau), \quad K_{\eta\eta}[\tau] = D_\eta\,\delta(\tau), \\
K_{\xi\xi}[\tau] = (D_x + D_\eta)\,\delta(\tau),
\end{gathered} \tag{10}
$$

где $D = 2\sigma^2\tau_{\text{кор}}$ — интенсивность случайного процесса, σ^2 — его дисперсия.

С учетом (10) выражения (8), (9) примут следующий вид:

$$
w^{0*} = \sum_{\substack{p=2\\ p\text{—четн}}}^{[N]} \frac{p!}{2^{p/2}(p/2)!} D_x^{p/2} \int_{E^{p/2}} h_p(u_1, \dots, u_{p/2}, u_1, \dots, u_{p/2}) \times
$$

$$
\times du_1 \dots du_{p/2} - \sum_{\substack{p=2\\ p\text{—четн}}}^{[N_F]} \frac{p!}{2^{p/2}(p/2)!} (\sigma_x^2 + \sigma_\eta^2)^{p/2} \times \tag{11}
$$

$$
\times \sum_{k_1=0}^{M} \cdots \sum_{k_{p/2}=0}^{M} w^*_{k_1, \dots, k_{p/2}, k_1, \dots, k_{p/2}};
$$

---

* Дельта-коррелированность здесь понимается в «физическом» смысле, когда $\tau_{\text{кор}} \ll \tau_c$, τ_c — характерный масштаб спадания $h_n(u_1, \dots, u_n)$, $n = 1, \dots, N$. Дисперсия случайного процесса σ^2 в этом случае является ограниченной величиной [5]

$$
\begin{gathered}
\left(\sigma_x^2+\sigma_\eta^2\right)^n w^*_{m_1,\ldots,m_n} = \sum_{\substack{p=0\\ p-\text{четн}}}^{[N-n]} \frac{(p+n)!}{2^{p/2}(p/2)!\,n!} D_x^{p/2+n}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_{0,m_i}} \times \\
\times \int\limits_{E^{p/2}} h_{p+n}(u_1,\ldots,u_{p/2},u_1,\ldots,u_{p/2},m_1\Delta T,\ldots,m_n\Delta T)\times \\
\times du_1\ldots du_{p/2} - \sum_{\substack{p=0\\ p-\text{четн}}}^{[N_F-n]} \frac{(p+n)!}{2^{p/2}(p/2)!\,n!}\left(\sigma_x^2+\sigma_\eta^2\right)^{p/2+n}\times \\
\times \sum_{k_1=0}^{M}\cdots\sum_{k_{p/2}=0}^{M} w^*_{k_1,\ldots,k_{p/2},k_1,\ldots,k_{p/2},m_1,\ldots,m_n},
\end{gathered} \tag{12}
$$

где δ_{0,m_i} — символ Кронекера. Из (11), (12) следует, что при $N_F \geqslant N$ для $n = N$, $N-1$ весовые коэффициенты фильтра воспроизводят ядра функционала соответствующего порядка*:

$$
\begin{gathered}
w^*_{m_1,\ldots,m_N} = \left(\frac{D_x}{\sigma_x^2+\sigma_\eta^2}\right)^N \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{N}\delta_{0,m_i}} h_N(m_1\Delta T,\ldots,m_N\Delta T), \\
w^*_{m_1\ldots m_{N-1}} = \left(\frac{D_x}{\sigma_x^2+\sigma_\eta^2}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum\limits_{i=0}^{N-1}\delta_{0,m_i}} h_{N-1}(m_1\Delta T,\ldots,m_{N-1}\Delta T).
\end{gathered} \tag{13}
$$

Для весовых коэффициентов с номером $n < N-1$ выражения содержат дополнительные члены, обусловленные дискретностью адаптивного фильтра. Можно показать, что при сделанном предположении $\tau_{\text{кор}} \ll \tau_c$ они имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
w^*_{m_1\ldots m_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_{0,m_i}} \left(\frac{D_x}{\sigma_x^2+\sigma_\eta^2}\right)^n \sum_{\substack{p=0\\ p-\text{четн}}}^{[N-n]} \frac{(p+n)!}{2^{p/2}(p/2)!\,n!} D_x^{p/2}\times \\
\times \int\limits_{E^{p/2}} h_{p+n}(u_1,\ldots,u_{p/2},\ u_1,\ldots,u_{p/2},m_1\Delta T,\ldots,m_n\Delta T)\,du_1\ldots du_{p/2}, \\
w^{0*} = \sum_{\substack{p=2\\ p-\text{четн}}}^{[N]} \frac{p!}{2^{p/2}(p/2)!} D_x^{p/2} \int\limits_{E^{p/2}} h_p(u_1,\ldots,u_{p/2},\ u_1,\ldots,u_{p/2})\,du_1\ldots du_{p/2}.
\end{gathered} \tag{14}
$$

Выражения (14) представляют собой оптимальные значения весовых коэффициентов адаптивного фильтра, дающие минимальную величину среднеквадратичной ошибки (1) при гауссовых δ-коррелированных входных сигналах.

3. Покажем, что характеристики нелинейного адаптивного фильтра могут быть существенно улучшены путем дополнительной обработки входного сигнала. Для этого на входе адаптивного фильтра следует по-

---

* При $N_F < N$ выходной сигнал адаптивного фильтра $\hat{y}(t)$ представляет собой стохастическую аппроксимацию $y(t)$ функциональным рядом Тейлора порядка N_F.

ставить, например, импульсный формирователь (см. рис. 2) с импульсной переходной характеристикой*:

$$G(t) = \mu\,[\theta(t) - \theta(t - \Delta T)], \tag{15}$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Рис. 1.

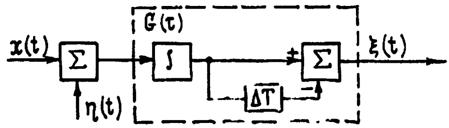

Рис. 2.

При этом, если $x(t)$ и $\eta(t)$ — взаимно независимые гауссовы случайные процессы, то авто- и взаимно-корреляционные функции имеют вид

$$K_{\xi\xi}[\tau] = \begin{cases} \mu^2 (D_x + D_\eta)(\Delta T - |\tau|), & |\tau| \leqslant \Delta T \\ 0, & |\tau| > \Delta T \end{cases}, \quad K_{x\xi}[\tau] = D_x G(\tau). \tag{16}$$

Подстановка (16) в (8), (9) приводит к следующим соотношениям для определения оптимальных весовых коэффициентов адаптивного фильтра:

$$w^{0*} = \sum_{\substack{p=2 \\ p-\text{четн}}}^{[N]} \frac{p!}{2^{p/2}(p/2)!} D_x^{p/2} \int\limits_{E^{p/2}} h_p(u_1, \ldots, u_{p/2}, \; u_1, \ldots, u_{p/2}) \, du_1 \ldots du_{p/2} -$$
$$- \sum_{\substack{p=2 \\ p-\text{четн}}}^{[N_F]} \frac{p!}{2^{p/2}(p/2)!} [\mu^2 (D_x + D_\eta) \Delta T]^{p/2} \sum_{k_1=0}^{M} \cdots \sum_{k_{p/2}=0}^{M} w^*_{k_1, \ldots, k_{p/2}, k_1, \ldots, k_{p/2}}; \tag{17}$$

$$\mu^{2n} (D_x + D_\eta)^n (\Delta T)^n w^*_{m_1, \ldots, m_n} = \sum_{\substack{p=0 \\ p-\text{четн}}}^{[N-n]} \frac{(p+n)!}{2^{p/2}(p/2)!\,n!} D_x^{p/2+n} \mu^n \times$$
$$\times \int\limits_{E^{p/2}} du_1 \ldots du_{p/2} \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{m_i \Delta T}^{(m_i+1)\Delta T} du_{p+i} h_{p+n}(u_1, \ldots, u_{p/2}, \; u_1, \ldots, u_{p/2},$$
$$u_{p+1}, \ldots, u_{p+n}) - \sum_{\substack{p=2 \\ p-\text{четн}}}^{[N_F-n]} \frac{(p+n)!}{2^{p/2}(p/2)!\,n!} [\mu^2 (D_x + D_\eta) \Delta T]^{p/2+n} \times \tag{18}$$
$$\times \sum_{k_1=0}^{M} \cdots \sum_{k_{p/2}=0}^{M} w^*_{k_1, \ldots, k_{p/2}, k_1, \ldots, k_{p/2}, m_1, \ldots, m_n}.$$

[1] С физической точки зрения введение импульсного формирователя с конечной импульсной переходной характеристикой на интервале времени ΔT позволяет сделать импульсную переходную характеристику адаптивного фильтра кусочно-непрерывной (ступенчатой в рассматриваемом случае) и тем самым улучшить аппроксимацию априори неизвестного непрерывного нелинейного функционала (2).

Из (18) при $N_F \geqslant N$ для $n = N,\ N-1,\ N-2$ соответственно имеем*

$$w^*_{m_1,\ldots,m_n} = \left[\frac{D_x}{\mu(D_x+D_\eta)}\right]^n \frac{1}{(\Delta T)^n} \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{m_i\Delta T}^{(m_i+1)\Delta T} du_i h_n(u_1, \ldots, u_n),$$

$$n = N, \quad N-1,$$

$$w^*_{m_1,\ldots,m_{N-2}} = \left[\frac{D_x}{\mu(D_x+D_\eta)}\right]^{N-2} \frac{1}{(\Delta T)^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} \int\limits_{m_i\Delta T}^{(m_i+1)\Delta T} du\,i \times$$

$$\times h_{N-2}(u_1, \ldots, u_{N-2}) + \frac{N(N-1)}{2} \frac{D_x^{N-1}}{\mu^{N-2}(D_x+D_\eta)^{N-2}} \frac{1}{(\Delta T)^{N-2}} \times \qquad (19)$$

$$\times \prod_{i=1}^{N-2} \int\limits_{m_i\Delta T}^{(m_i+1)\Delta T} du_{i+2} \left\{ \int\limits_{E_1} du_1\, h_N(u_1, u_1, u_3, \ldots, u_N) - \right.$$

$$\left. - \frac{D_x}{D_x+D_\eta} \frac{1}{\Delta T} \sum_{k_1=0}^{M} \int\limits_{k_1\Delta T}^{(k_1+1)\Delta T} du_1 \int\limits_{k_1\Delta T}^{(k_1+1)\Delta T} du_2\, h_N(u_1, \ldots, u_N) \right\}.$$

Рассмотрим полученные формулы в случае адаптивного фильтра на длинной линии задержки с частыми отводами: $\Delta T/\tau_c \ll 1$, $M\Delta T/\tau_c \gg 1$. Для оценки интегралов в фигурных скобках (19) воспользуемся методом прямоугольников. В результате получим

$$\int\limits_{E^1} du_1 h_N(u_1, u_1, u_3, \ldots, u_N) \approx \Delta T \sum_{k_1=0}^{M} h_N((k_1+1/2)\Delta T,$$

$$(k_1+1/2)\Delta T, u_3, \ldots, u_N) + O[(\Delta T/\tau_c)^3] + \int\limits_{M\Delta T}^{\infty} du_1 h_N(u_1, u_1, u_3, \ldots, u_N),$$

$$\sum_{k_1=0}^{M} \int\limits_{k_1\Delta T}^{(k_1+1)\Delta T} du_1 \int\limits_{k_1\Delta T}^{(k_1+1)\Delta T} du_2 h_N(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_N) \approx$$

$$\approx (\Delta T)^2 \sum_{k_1=0}^{M} h_N((k_1+1/2)\Delta T,\ (k_1+1/2)\Delta T,\ u_3, \ldots, u_N) + O[(\Delta T/\tau_c)^6].$$

Пренебрегая членами порядков малости $O[(\Delta T/\tau_c)^3]$ и выше, полагая, что малы ошибки усечения ($M\Delta T \gg \tau_c$), и считая аддитивный шум достаточно слабым, из (18) найдем

$$w^*_{m_1,\ldots,m_n} = \left[\frac{D_x}{\mu(D_x+D_\eta)}\right]^n \frac{1}{(\Delta T)^n} \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{m_i\Delta T}^{(m_i+1)\Delta T} du_i h_n(u_1, \ldots, u_n) \approx$$

$$\approx \left[\frac{D_x}{\mu(D_x+D_\eta)}\right]^n h_n((m_1+1/2)\Delta T,\ (m_2+1/2)\Delta T,\ \ldots,\ (m_n+1/2)\Delta T). \qquad (20)$$

---

* Заметим, что при $N_F < N$ выражения (17), (18) для $w^*_{m_1,\ldots,m_n}$ определяют дискретную статистическую аппроксимацию N_F-го порядка нелинейной непрерывной системы $y(t)$ (линейную $N_F = 1$, квадратичную $N_F = 2$ и т. д.).

Используя (20), можно получить выражение для величины среднеквадратичной ошибки фильтрации. Анализ последнего показывает, что она полностью определяется ошибками квантования по времени ($\sim (\Delta T/\tau_c)^3$), ошибками усечения и интенсивностью аддитивного шума $\eta(t)$. Выбор $\Delta T \ll \tau_c$ и $M\Delta T \gg \tau_c$ позволяет достичь высокой степени эффективности фильтрации нелинейного функционала гауссовых случайных процессов.

Таким образом, адаптивный дискретный фильтр на элементах запаздывания может эффективно использоваться для фильтрации нелинейных функционалов гауссовых случайных процессов при включении на входе фильтра импульсного формирователя. При этом сигнал на выходе адаптивного фильтра определяется набором $[(M+1)_F^{N+1} - 1]\, M^{-1}$ одновременно адаптируемых весовых коэффициентов. Однако при практической реализации фильтра, используя свойство симметрии $w_{k_1,\ldots,k_n}$ по отношению к любой перестановке индексов $k_1, k_2, \ldots, k_n$, это число может быть снижено.

Несложно показать, что необходимое число регулируемых коэффициентов нелинейного адаптивного фильтра порядка N_F на линии задержки с $(M+1)$ отводами равно $K \sum_{n=0}^{N_F} \frac{(M+n)!}{M!\ n!} = \sum_{n=0}^{N_F} C_{M+n}^{n}$.

Авторы выражают признательность А. Н. Малахову за внимание и полезное обсуждение результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кашкин В. Б. Препринт Ин-та физики СО АН СССР № 47Ф.— Красноярск, 1976.
2. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах.— М.: Наука, 1968.
3. Rudko M., Weiner D.— J. Franklin Inst., 1979, **308**, № 1, p. 57.
4. Мальцев А. А., Позументов И. Е.— Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 9, с. 1085.
5. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований.— М.: Сов. радио, 1977.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 11 июня 1980 г.

ADAPTIVE FILTRATION OF NONLINEAR FUNCTIONALS OF GAUSSIAN RANDOM PROCESSES

A. A. Mal'tsev, I. E. Pozumentov

A nonlinear adaptive filter at the time delay line are used for the optimal filtration of nonlinear functionals of Gaussian random processes. Exact expressions have been derived for weigths of the filter minimizing the mean square error with noncorrelated input signals. It is shown, that when there is an impulse shaper at the filter input its characteristics becomes better.