ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 6 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 536.758

НАХОЖДЕНИЕ ЧЕТЫРЕХИНДЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ В МАРКОВСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ

А. В. Толстопятенко

В линейно-кубическом случае, в приближении слабой негауссовости марковского процесса найдены и исследованы выражения для всех неквантовых четырехиндексных функций. Рассмотрен пример применения полученных результатов к расчету флуктуаций энергии в колебательном контуре.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наблюдается повышение интереса к изучению нелинейных явлений. При этом наиболее важным представляется изучение систем с нелинейностью низших порядков (второго и третьего). Вследствие относительной малости тепловых флуктуаций нелинейность системы приводит к слабой негауссовости флуктуаций, что в первом приближении дает ненулевые значения трех- и четырехиндексных корреляторов и других функций. Пусть имеются такие четырехиндексные функции:

$$K_{1,234}=\frac{\delta^3}{\delta h_1\delta h_2\delta h_3}\langle B_1\rangle\bigg|_{h=0},\quad K_{12,34}=\frac{\delta^2}{\delta h_3\delta h_4}\langle B_1, B_2\rangle\bigg|_{h=0},$$
$$K_{123,4}=\frac{\delta}{\delta h_4}\langle B_1, B_2, B_3\rangle|_{h=0},\quad K_{1234}=\langle B_1, B_2, B_3, B_4\rangle|_{h=0}. \tag{1.1}$$

Угловыми скобками с запятыми внутри мы обозначили кумулянтные функции внутренних термодинамических параметров $\{B_\alpha(T)\}$ (например, $\langle B_1, B_2\rangle=\langle B_1B_2\rangle-\langle B_1\rangle\langle B_2\rangle$) и ввели сокращенное обозначение l для пары (α_l, t_l), $(B_l\equiv B_{\alpha_l}(t_l))$. Символ $\delta/\delta h_l$ означает вариационную производную по внешней силе $h_{\alpha_l}(t_l)$.

Кроме четырехиндексных функций, определяемых формулами (1.1), мы будем использовать также четырехиндексные функции для производных от внутренних термодинамических параметров (так называемых «токов» $J_\alpha(t)=dB_\alpha(t)/dt$). Они соответствуют замене B_α на J_α в (1.1) и обозначаются буквой Y с соответствующими индексами, например, адмитансная функция заменяется на $Y_{1,234}=\frac{\delta^3}{\delta h_2\delta h_3\delta h_4}\langle J_1\rangle\Big|_{h=0}$.

В данной работе мы проведем расчет четырехиндексных функций, предполагая квадратичную нелинейность отсутствующей. (В радиотехнике, например, это соответствует случаю линейно-кубической аппроксимации характеристики нелинейного элемента.) Все четырехиндексные функции (записанные для «токов») оказываются связанными между собой простыми соотношениями, в точности совпадающими для частного случая $t_1\gg t_2\gg t_3\gg t_4$ с соответствующими соотношениями немарковской теории, приведенными в работе [1].

Четырехиндексные функции (1.1) могут быть использованы для нахождения первых трех неравновесных кумулянтов (при наличии внешних сил $h(t)$) и четвертого равновесного кумулянта. Так, например, в рассматриваемом приближении (при отсутствии квадратичных нелинейностей)

$$K_1(h) = K_{1,2}h_2 + \frac{1}{3!}K_{1,234}h_2h_3h_4 + \cdots,$$

$$K_{12}(h) = K_{12} + \frac{1}{2}K_{12,34}h_3h_4 + \cdots, \tag{1.2}$$

$$K_{123}(h) = K_{123,4}h_4 + \cdots, \quad K_{1234}(h) = K_{1234} + \cdots$$

Здесь и далее по совпадающим индексам подразумевается суммирование по α_l и интегрирование по t_l.

Самостоятельный интерес представляет выражение, полученное для четырехвременного кумулянта (см. также [2]), которое может рассматриваться как обобщение результатов работы [3] на многокомпонентный случай и может быть применено, наряду с остальными четырехиндексными функциями, для расчета флуктуаций в радиотехнических цепях. Аналогичное выражение для трехвременного момента было получено ранее в работе [4].

2. ВВЕДЕНИЕ МАЛОГО ПАРАМЕТРА В МАРКОВСКОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ КУМУЛЯНТОВ

В данной работе мы будем считать, что внутренние термодинамические параметры $\{B_\alpha(t)\}$ (например, потенциалы, заряды, напряженности электромагнитных полей и т. п.) образуют марковский флуктуационный процесс. В этом случае, как известно, плотность распределения вероятностей $w(\boldsymbol{B})$ удовлетворяет марковскому кинетическому уравнению

$$\dot{w}(\boldsymbol{B}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial B_{\alpha_1}\ldots\partial B_{\alpha_n}}[K_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{h})\, w(\boldsymbol{B})], \tag{2.1}$$

в котором кинетические коэффициенты $K_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{h})$ явно от времени не зависят, $\boldsymbol{h} \equiv \boldsymbol{h}(t)$ — зависящие от времени внешние силы. Аналогичное уравнение имеет место и для условной плотности распределения вероятностей $w(\boldsymbol{B}\,|\boldsymbol{B}(t_0))$.

Вместо уравнения (2.1) удобнее рассматривать уравнение для характеристической функции

$$\theta(i\boldsymbol{v}|\boldsymbol{B}^0) = \int e^{i\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(t)}\, w(\boldsymbol{B}(t)|\boldsymbol{B}^0)\, d\boldsymbol{B}(t) \quad (\boldsymbol{B}^0 \equiv \boldsymbol{B}(t_0)), \tag{2.2}$$

которое имеет вид

$$\dot{\theta}(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{B}^0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_n}}{n!}K_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}}, \boldsymbol{h}\right)\theta(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{B}^0). \tag{2.3}$$

Аналогичный вид имеет и уравнение для безусловной характеристической функции $\theta(\boldsymbol{u})$.

Для решения уравнения (2.3) будем считать, что роль нелинейных членов в релаксационном уравнении или, что эквивалентно, в разложении функции $K_\alpha(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{h})$ по $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{h}$ относительно мала. Ограничиваясь линейно-кубическим приближением, введем малый параметр μ в разложение

$$K_\alpha(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{h}) = K_\alpha + (\partial_\beta B_\beta + \partial_{\bar\beta} h_{\bar\beta}) K_\alpha + \frac{\mu}{3!}(\partial_\beta B_\beta + \partial_{\bar\beta} h_{\bar\beta})^3 K_\alpha^1 + O(\mu^2). \tag{2.4}$$

Здесь и далее мы обозначили через ∂_α и $\partial_{\bar\alpha}$ операторы дифференцирования по $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{h}$ соответственно. Операторы действуют на кинетические коэффициенты $K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{h})$, взятые после дифференцирования в нулевой точке ($\boldsymbol{B} = \boldsymbol{h} = 0$), что мы будем отмечать опусканием аргументов у кинетических коэффициентов. $\Bigl($Например, $\partial_\alpha \partial_\beta \partial_{\bar\gamma} K_\rho \equiv \equiv \dfrac{\partial^3}{\partial B_\alpha \partial B_\beta \partial h_{\bar\gamma}} K_\rho(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{h})|_{B=0, h=0} \equiv K_{\rho,\alpha\beta\bar\gamma}.\Bigr)$

В том же приближении мы будем иметь

$$\begin{gathered} K_{\alpha\beta}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{h}) = K_{\alpha\beta} + \frac{\mu}{2!}(\partial_\gamma B_\gamma + \partial_{\bar\gamma} h_{\bar\gamma})^2 K_{\alpha\beta}^1 + O(\mu^2), \\ K_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{h}) = K_{\alpha\beta\gamma} + \mu(\partial_\sigma B_\sigma + \partial_{\bar\sigma} h_{\bar\sigma}) K_{\alpha\beta\gamma}^1 + O(\mu^2), \\ K_{\alpha\beta\gamma\delta}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{h}) = K_{\alpha\beta\gamma\delta} + O(\mu^2), \end{gathered} \tag{2.5}$$

причем в (2.4), (2.5) следует полагать

$$K_\alpha = K_\alpha^0 + \mu K_\alpha^1, \quad K_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}^0 + \mu K_{\alpha\beta}^1. \tag{2.6}$$

В разложении (2.6) есть некоторая неопределенность. В рамках марковской нелинейной термодинамики, задавшись равновесной характеристической функцией $\theta_{\text{рав}}(i\boldsymbol{v}) = \int e^{i\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}} w_{\text{рав}}(\boldsymbol{B})\, d\boldsymbol{B}$ в виде

$$\theta_{\text{рав}}(\boldsymbol{u}) = \exp\left(\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + \frac{\mu}{4!} S_{\alpha\beta\gamma\delta} u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta\right), \tag{2.7}$$

мы можем получить следующие соотношения [2]:

$$\begin{gathered} K_\alpha^0 = K_\alpha^1 = 0, \quad K_{\alpha,\beta}^1 = -\frac{1}{2} K_{\alpha,\beta\mu\nu}^1 R_{\mu\nu}, \\ K_{\alpha,\bar\beta}^1 = -\frac{1}{2} K_{\alpha,\bar\beta\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad K_{\alpha\beta}^1 = -\frac{1}{2} K_{\alpha\beta,\mu\nu}^1 R_{\mu\nu}, \end{gathered} \tag{2.8}$$

которые эту неопределенность уничтожают.

Возвращаясь к уравнению (2.3), будем искать его решение в форме

$$\theta(\boldsymbol{u} | \boldsymbol{B}^0) = \exp\Bigl\{m_\alpha(tt_0 | \boldsymbol{B}^0) u_\alpha + \frac{1}{2} k_{\alpha\beta}(tt_0 | \boldsymbol{B}^0) u_\alpha u_\beta + \frac{\mu}{3!} l_{\alpha\beta\gamma}(tt_0 | \boldsymbol{B}^0) u_\alpha u_\beta u_\gamma + \ldots\Bigr\}, \tag{2.9}$$

где m_α, $k_{\alpha\beta}$, $l_{\alpha\beta\gamma}$ зависят от времени как явно, так и через силы $h(t)$ и удовлетворяют начальным условиям

$$m_\alpha(t_0 t_0 | \boldsymbol{B}^0) = B_\alpha^0, \quad k_{\alpha\beta}(t_0 t_0 | \boldsymbol{B}^0) = 0, \quad l_{\alpha\beta\gamma}(t_0 t_0 | \boldsymbol{B}^0) = 0. \tag{2.10}$$

Подстановка (2.9) в (2.3) дает в рассматриваемом приближении уравнение

$$\dot{m}_\alpha u_\alpha + \frac{1}{2}\dot{k}_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + \frac{\mu}{3!}\dot{l}_{\alpha\beta\gamma} u_\alpha u_\beta u_\gamma = u_\alpha \theta^{-1}(u\,|\,B^0) \times$$

$$\times K_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial u}, h\right)\theta(u\,|\,B^0) + \frac{1}{2} u_\alpha u_\beta \theta^{-1}(u\,|B^0) K_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial u}, h\right)\theta(u\,|\,B^0) +$$

$$+ \frac{\mu}{3!} u_\alpha u_\beta u_\gamma \theta^{-1}(u\,|B^0) K^1_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial u}, h\right)\theta(u\,|\,B^0).$$

Подставляя в него разложения (2.4)—(2.6) при учете соотношений (2.8), а также равенств $m_\alpha = m^0_\alpha + \mu m^1_\alpha$, $k_{\alpha\beta} = k^0_{\alpha\beta} + \mu k^1_{\alpha\beta}$, и приравнивая порознь члены нулевого и первого порядка малости при одинаковых степенях μ, получим уравнения нулевого приближения

$$\dot{m}^0_\alpha(tt_0\,|\,B^0) + D_{\alpha\beta} m^0_\beta(tt_0\,|\,B^0) = g_{\alpha\beta} h_\beta(t); \tag{2.11}$$

$$\dot{k}^0_{\alpha\beta}(tt_0\,|\,B^0) + 2\{D_{\alpha\rho} k^0_{\rho\beta}(tt_0\,|\,B_0)\}_s = K^0_{\alpha\beta}\,. \tag{2.12}$$

которые следует решать при начальных условиях

$$m^0_\alpha(t_0 t_0\,|\,B^0) = B^0_\alpha, \quad k^0_{\alpha\beta}(t_0 t_0\,|\,B^0) = 0 \tag{2.13}$$

(в (2.11) и далее для краткости обозначено $D_{\alpha\beta} = -K_{\alpha,\beta}$, $g_{\alpha\beta} = K_{\alpha,\overline{\beta}}$), а также уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \dot{m}^1_\alpha(tt_0\,|\,B^0) + D_{\alpha\beta} m^1_\beta(tt_0\,|\,B^0) = \frac{1}{3!}(\partial_\beta m_\beta(tt_0\,|\,B^0) +\\ + \partial_{\overline{\beta}} h_{\overline{\beta}}(t))^3 K^1_\alpha + \frac{1}{2}(\partial_\beta m^0_\beta(tt_0|\,B^0) +\\ + \partial_{\overline{\beta}} h_{\overline{\beta}}(t)) K^1_{\alpha,\mu\nu}(k^0_{\mu\nu}(tt^0\,|\,B^0) - R_{\mu\nu}); \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \dot{k}^1_{\alpha\beta}(tt_0\,|\,B^0) + 2\,\{D_{\alpha\rho} k^1_{\rho\beta}(tt_0\,|\,B^0)\}_s = \frac{1}{2}\,[(\partial_\gamma m^0_\gamma(tt_0\,|\,B^0) + \partial_{\overline{\gamma}} h_{\overline{\gamma}}(t))^2 +\\ + \partial_\mu \partial_\nu (k^0_{\mu\nu}(tt_0\,|\,B^0) - R_{\mu\nu})]\,(K^1_{\alpha\beta} + 2\,\{K^1_{\alpha,\rho} k^0_{\rho\beta}(tt_0\,|\,B^0)\}_s); \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} \dot{l}^1_{\alpha\beta\gamma} + 3\,\{D_{\alpha\rho} l^1_{\rho\beta\gamma}\}_s = (\partial_\sigma m^0_\sigma(tt_0\,|\,B^0) +\\ + \partial_{\overline{\sigma}} h_{\overline{\sigma}}(t))\,(K_{\alpha\beta\gamma} + 3\,\{K^1_{\alpha\beta,\rho} k^0_{\rho\gamma}(tt_0\,|\,B^0)\}_s +\\ + 3\,\{K_{\alpha,\mu\nu} k^0_{\mu\beta}(tt_0\,|\,B^0)\, k^0_{\nu\gamma}(tt_0\,|\,B^0)\}_s) \end{aligned} \tag{2.16}$$

с нулевыми — в силу (2.10) и (2.13) — начальными условиями.

Фигурные скобки, введенные нами в уравнениях (2.12)—(2.16), означают симметризацию по свободным индексам (по которым не производится суммирования). Например, $\{\varphi_{\alpha\beta\gamma}\}_s = \frac{1}{6}(\varphi_{\alpha\beta\gamma} + \varphi_{\beta\gamma\alpha} + \varphi_{\gamma\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha\gamma} + \varphi_{\alpha\gamma\beta} + \varphi_{\gamma\beta\alpha})$.

Решение уравнений (2.11), (2.12) с начальными условиями (2.13) находится элементарно:

$$m^0_\alpha(tt_0\,|B^0) = V^{t-t_0}_{\alpha\rho} B^0_\rho + \int_{t_0}^{t} V^{t-\tau}_{\alpha\rho}\, g_{\rho\beta} h_\beta(\tau)\, d\tau \equiv V^{t-t_0}_{\alpha\rho} B^0_\rho + \overline{m}^0_\alpha(tt_0\,|\,B^0); \tag{2.17}$$

$$k^0_{\alpha\beta}\,(tt_0\,|\,\boldsymbol{B}^0) = R_{\alpha\beta} - V^{t-t_0}_{\alpha\mu} V^{t-t_0}_{\beta\nu} R_{\mu\nu}. \tag{2.18}$$

Здесь и далее мы обозначили

$$V^{t-\tau}_{\alpha\rho} = (e^{-D(t-\tau)})_{\alpha\rho}\,\eta\,(t-\tau),$$

$$\eta\,(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 0, & t < \tau \end{cases},$$

а $R_{\alpha\beta}$ — равновесный второй момент, связанный с матрицей $K^0_{\alpha\beta}$ соотношением

$$2\,\{D_{\alpha\rho}\,R_{\rho\beta}\}_s = K^0_{\alpha\beta}. \tag{2.19}$$

Нетрудно получить также решения уравнений (2.14)—(2.16), они имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} m^1_\alpha\,(tt_0\,|\,\boldsymbol{B}^0) = \frac{1}{3!}\int\limits_{t_0}^{t} V^{t-\tau}_{\alpha\rho}\,(\partial_\nu\, m^0_\nu\,(\tau t_0\,|\,\boldsymbol{B}^0) + \partial_{\bar\nu}\, h_{\bar\nu}\,(\tau)) \times \\ \times\,[(\partial_\beta\, m^0_\beta\,(\tau t_0\,|\,\boldsymbol{B}^0) + \partial_{\bar\beta}\, h_{\bar\beta}\,(\tau))^2 - 3\partial_\gamma\,\partial_\sigma V^{\tau-t_0}_{\gamma\mu} V^{\tau-t_0}_{\sigma\nu}\, R_{\mu\nu}]\, K^1_\rho\, d\tau; \end{gathered} \tag{2.20}$$

$$\begin{gathered} k^1_{\alpha\beta}\,(tt_0\,|\,\boldsymbol{B}^0) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} V^{t-\tau}_{\alpha\rho} V^{t-\tau}_{\beta\sigma}\,[(\partial_\gamma\, m^0_\gamma\,(\tau t_0\,|\,\boldsymbol{B}^0) + \partial_{\bar\gamma}\, h_{\bar\gamma}\,(\tau))^2 - \\ - \partial_\varphi\,\partial_\chi V^{\tau-t_0}_{\varphi\mu} V^{\tau-t_0}_{\chi\nu} R_{\mu\nu}]\,(K^1_{\rho\sigma} + 2\,\{K^1_{\rho,\mu}\, k^0_{\mu\sigma}\,(\tau t_0\,|\,\boldsymbol{B}^0)\}_s)\, d\tau; \end{gathered} \tag{2.21}$$

$$\begin{gathered} l^1_{\alpha\beta\gamma}\,(tt_0\,|\,\boldsymbol{B}^0) = \int\limits_{t_0}^{t} V^{t-\tau}_{\alpha\rho} V^{t-\tau}_{\beta\mu} V^{t-\tau}_{\gamma\nu}\,(\partial_\sigma\, m^0_\sigma\,(\tau t_0\,|\,\boldsymbol{B}^0) + \\ + \partial_{\bar\sigma}\, h_{\bar\sigma}\,(\tau))\,[K^1_{\rho\mu\nu} + 3\,\{K^1_{\rho\mu,\varphi}\, k^0_{\varphi\sigma}\,(\tau t_0\,|\,\boldsymbol{B}_0)\}_s + \\ + 3\,\{K^1_{\rho,\varphi\chi}\, k^0_{\varphi\mu}\,(\tau t_0\,|\,\boldsymbol{B}^0)\, k^0_{\chi\nu}\,(\tau t_0\,|\,\boldsymbol{B}^0)\}_s]\, d\tau. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Аналогичный вид имеет и решение для кумулянтов, определяющих безусловную характеристическую функцию. Чтобы перейти к ним от (2.17), (2.18), (2.20)—(2.22), достаточно положить в этих формулах $t_0 = -\infty$. Тогда, например, в нулевом приближении мы будем иметь

$$m^0_\alpha\,(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} V^{t-\tau}_{\alpha\rho}\, g_{\rho\beta}\, h_\beta\,(\tau)\, d\tau; \tag{2.23}$$

$$k^0_{\alpha\beta}\,(t) = R_{\alpha\beta}. \tag{2.24}$$

Аналогично можно получить и формулы первого приближения для «безусловных» кумулянтов.

3. НАХОЖДЕНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ МНОГОВРЕМЕННЫХ КУМУЛЯНТОВ

Воспользовавшись легко выводимой формулой

$$\int f\,(\boldsymbol{B})\, e^{c^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}}\, w\,(\boldsymbol{B})\, d\boldsymbol{B} = f\,(\partial/\partial c^{\mathrm{T}})\,\theta\,(c),$$

нетрудно получить с учетом (2.2) следующие выражения для многовременных характеристических функций:

$$\theta_{t_1,t_2}\,(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}) = \theta_{t_1 t_2}\left(\boldsymbol{x}\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\right)\theta_{t_2}(\boldsymbol{y}) \qquad \text{при } t_1 \geqslant t_2; \tag{3.1}$$

$$\theta_{t_1,t_2,t_3}(x,y,z)=\theta_{t_1t_2}\left(x\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\theta_{t_2t_3}\left(y\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\theta_{t_3}(z)\qquad \text{при } t_1\geqslant t_2\geqslant t_3; \tag{3.2}$$

$$\theta_{t_1,t_2,t_3,t_4}(x,y,z,u)=\theta_{t_1t_2}\left(x\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\theta_{t_2,t_3,t_4}(y,z,u)=\theta_{t_1t_2}\left(x\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\times$$
$$\times\,\theta_{t_2t_3}\left(y\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\theta_{t_3t_4}\left(z\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial u}\right)\theta_{t_4}(u)\qquad \text{при } t_1\geqslant t_2\geqslant t_3\geqslant t_4. \tag{3.3}$$

Дифференцируя их в нулевой точке ($x=0$, $y=0$, ...), мы получим выражения для многовременных кумулянтов, из которых по формулам (1.1) найдем искомые четырехиндексные функции. Характеристическая функция $\theta_{t_4}(u)$, входящая в (3.3), определяется при $h=0$ выражением (2.7). Остальные характеристические функции, входящие в (3.1)—(3.3), мы возьмем в форме (2.9) с кумулянтами, определяемыми формулами (2.17), (2.18), (2.20)—(2.22) для условной характеристической функции, а также аналогичными формулами для безусловной характеристической функции (например, (2.23), (2.24) в нулевом приближении).

Опуская несложные выкладки и обозначая

$$\Pi_\alpha^{\tau-t}=\varepsilon_\alpha V_{\alpha\rho}^{\tau-t}D_{\rho\beta}\varepsilon_\beta\bar{\partial}_\beta+\partial_{\bar{\alpha}}\delta(\tau-t), \tag{3.4}$$

где $\varepsilon_\alpha=1$ для временно-четных и $\varepsilon_\alpha=-1$ для временно-нечетных переменных, приведем окончательные симметризованные по времени выражения:

$$K_{1,234}=\int V_{\alpha_1\rho}^{t_1-\tau}\Pi_{\alpha_2}^{\tau-t_2}\Pi_{\alpha_3}^{\tau-t_3}\Pi_{\alpha_4}^{\tau-t_4}K_\rho^1\,d\tau; \tag{3.5}$$

$$K_{12,34}=2\int\{V_{\alpha_1\rho}^{t_1-\tau}\bar{V}_{\alpha_2\mu}^{\tau-t_2}\bar{\partial}_\mu\}_{12}\Pi_{\alpha_3}^{\tau-t_3}\Pi_{\alpha_4}^{\tau-t_4}K_\rho^1\,d\tau+$$
$$+\int V_{\alpha_1\rho}^{t_1-\tau}V_{\alpha_2\mu}^{t_2-\tau}\Pi_{\alpha_3}^{\tau-t_3}\Pi_{\alpha_4}^{\tau-t_4}N_{\rho\mu}^1\,\partial\tau; \tag{3.6}$$

$$K_{123,4}=3\int\{V_{\alpha_1\rho}^{t_1-\tau}\bar{V}_{\alpha_2\mu}^{\tau-t_2}\bar{V}_{\alpha_3\nu}^{\tau-t_3}\bar{\partial}_\mu\bar{\partial}_\nu\}_{123}\Pi_{\alpha_4}^{\tau-t_4}K_\rho^1\,d\tau+$$
$$+3\int\{V_{\alpha_1\rho}^{t_1-\tau}V_{\alpha_2\mu}^{t_2-\tau}\bar{V}_{\alpha_3\nu}^{\tau-t_3}\bar{\delta}_\nu\}_{123}\Pi_{\alpha_4}^{\tau-t_4}N_{\rho\mu}^1\,d\tau+ \tag{3.7}$$
$$+\int V_{\alpha_1\rho}^{t_1-\tau}V_{\alpha_2\mu}^{t_2-\tau}V_{\alpha_3\nu}^{t_3-\tau}\Pi_{\alpha_4}^{\tau-t_4}L_{\rho\mu\nu}\,d\tau;$$

$$K_{1234}=\Big\{4\int V_{\alpha_1\rho}^{t_1-\tau}\bar{V}_{\alpha_2\mu}^{\tau-t_2}\bar{V}_{\alpha_3\nu}^{\tau-t_3}\bar{V}_{\alpha_4\varphi}^{\tau-t_4}\bar{\partial}_\mu\bar{\partial}_\nu\bar{\partial}_\varphi K_\rho^1\,d\tau+$$
$$+6\int V_{\alpha_1\rho}^{t_1-\tau}V_{\alpha_2\mu}^{t_2-\tau}\bar{V}_{\alpha_3\nu}^{\tau-t_3}\bar{V}_{\alpha_4\varphi}^{\tau-t_4}\bar{\partial}_\nu\bar{\partial}_\varphi N_{\rho\mu}\,d\tau+ \tag{3.8}$$
$$+4\int V_{\alpha_1\rho}^{t_1-\tau}V_{\alpha_2\mu}^{t_2-\tau}V_{\alpha_3\nu}^{t_3-\tau}\bar{V}_{\alpha_4\varphi}^{\tau-t_4}\bar{\partial}_\varphi L_{\rho\mu\nu}\,d\tau\Big\}_s.$$

Здесь цифры при фигурных скобках означают индексы, по которым идет симметризация, в том случае, когда она выполняется не по всем свободным индексам. Причем перестановка индекса l означает одновременную перестановку пары (α_l, t_l).

Для сокращения записи в (3.5)—(3.8) мы также обозначили

$$N_{\alpha\beta}=K_{\alpha\beta}+2\{\bar{\partial}_\beta K_\alpha\}_s; \tag{3.9}$$

$$L_{\alpha\beta\gamma}=K_{\alpha\beta\gamma}+3\{\bar{\partial}_\gamma K_{\alpha\beta}\}_s+3\{\bar{\partial}_\beta\bar{\partial}_\gamma K_\alpha\}_s; \tag{3.10}$$

$$\bar{V}_{\alpha\rho}^{\tau-t}=\varepsilon_\alpha V_{\alpha\rho}^{\tau-t}\varepsilon_\rho \tag{3.11}$$

и воспользовались соотношением $R^{-1}VR = \varepsilon V^{\mathrm{r}}\varepsilon$, вытекающим из инвариантности второго равновесного момента по отношению к обращению времени.

Из (3.4) мы видим, что в выражения (3.5)—(3.8) входят производные от кинетических коэффициентов как по $a_\alpha = R^{-1}_{\alpha\beta} h_\beta$, так и по внешним силам $\boldsymbol{h}$. Если действие внешних сил описывается гамильтонианом взаимодействия, линейным по внешним силам, то, воспользовавшись флуктуационно-диссипационными соотношениями, можно выразить производные по $\boldsymbol{h}$ через производные по $\boldsymbol{a}$.

Для этого надо перейти к неравновесным средним $\varkappa_\alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = K_\alpha(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{h})\, w_a(\boldsymbol{B}) d\boldsymbol{B}, (w_a(\boldsymbol{B}) \sim e^{a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}} w(\boldsymbol{B}))$, которые с учетом (2.2) и (2.7) можно записать в виде

$$\varkappa_\alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \theta^{-1}_{\text{рав}}(\boldsymbol{a}) K_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}}, \boldsymbol{h}\right) \theta_{\text{рав}}(\boldsymbol{a}) \qquad (3.12)$$

($\theta_{\text{рав}}(\boldsymbol{a})$ — определена выражением (2.7)).

Предположим для простоты вывода, что $\varkappa_\alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \varkappa_\alpha(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{h})$, т. е. функция (3.12) зависит лишь от разности своих аргументов. Это имеет место в отдельных случаях [5] и находится в согласии с общими соотношениями марковской термодинамики, хотя и не вытекает из них. Из этих соотношений (см. также [2, 6]) при учете (3.12), (3.9), (3.10) и сделанном предположении вытекают следующие равенства, которыми мы воспользуемся:

$$\begin{gathered}\overline{\partial}_\sigma L_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\sigma \overline{\partial}_\alpha \overline{\partial}_\beta \overline{\partial}_\gamma K^1_\sigma - \varepsilon_\sigma D_{\sigma\rho} \varepsilon_\rho S_{\rho\alpha\beta\gamma} + 3\{D_{\alpha\rho} S_{\rho\beta\gamma\sigma}\}_{\alpha\beta\gamma}, \\ \overline{\partial}_\gamma \overline{\partial}_\delta N_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta,\gamma\delta} + 2\{D_{\alpha\rho} S_{\rho\beta\gamma\delta}\}_{\alpha\beta}.\end{gathered} \qquad (3.13)$$

Здесь $c_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \varkappa_{\alpha\beta,\gamma\delta} - \varkappa_{\alpha,\beta\gamma\delta} - \varkappa_{\beta,\alpha\gamma\delta}$ — единственная диссипационно неопределяемая матрица в четырехиндексной марковской теории, удовлетворяющая соотношению

$$c_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta c_{\gamma\delta,\alpha\beta}. \qquad (3.14)$$

Переходя к модифицированным четырехиндексным функциям Y (см. выше), нетрудно показать, что все они выражаются через две функции $Y_{1,234}$ и $C_{12,34}$ согласно соотношениям

$$Y_{12,34} = Y_{1,234} + Y_{2,134} + C_{12,34}; \qquad (3.15)$$

$$Y_{123,4} = 3\{Y_{1,234}\}_{123} + \widetilde{Y}_{4,123} + 3\{C_{12,34}\}_{123}; \qquad (3.16)$$

$$Y_{1234} = 4\{Y_{1,234}\}_s + 4\{\widetilde{Y}_{1,234}\}_s + 6\{C_{12,34}\}_s. \qquad (3.17)$$

Здесь волной сверху мы обозначили временное сопряжение

$$\widetilde{Y}_{1,234} \equiv \widetilde{Y}^{t_1,t_2t_3t_4}_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = \varepsilon_{\alpha_1} \varepsilon_{\alpha_2} \varepsilon_{\alpha_3} \varepsilon_{\alpha_4} Y^{-t_1,-t_2-t_3-t_4}_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\alpha_4}. \qquad (3.18)$$

Функция $Y_{1,234}$ в (3.15)—(3.17) есть не что иное, как модифицированная адмитансная функция, определяемая из релаксационного уравнения.

Функция $C_{12,34}$, определяемая выражением

$$C_{12,34} = \frac{d^4}{dt_1\, dt_2\, dt_3\, dt_4} \int V^{t_1-\tau}_{\alpha_1\rho} V^{t_2-\tau}_{\alpha_2\mu} V^{\tau-t_3}_{\alpha_3\nu} V^{\tau-t_4}_{\alpha_4\varphi} \times$$

$$\times c_{\rho\mu,\nu\varphi}\, d\tau - \left(\frac{d}{dt_1} + \frac{d}{dt_2}\right) \int U^{t_1-\tau}_{\alpha_1\rho}\, U^{t_2-\tau}_{\alpha_2\mu}\, \overline{U}^{\tau-t_3}_{\alpha_3\nu}\, \overline{U}^{\tau-t_4}_{\alpha_4\varphi}\, S_{\rho\mu\nu\varphi}\, d\tau \times$$

$$\left(U^{t-\tau}_{\alpha\rho} \equiv V^{t-\tau}_{\alpha\mu} D_{\mu\rho}, \qquad \overline{U}^{t-\tau}_{\alpha\rho} = \varepsilon_\alpha U^{t-\tau}_{\sigma\rho} \varepsilon_\rho\right), \tag{3.19}$$

является диссипационно-неопределяемой и удовлетворяет в силу (3.14) и (3.11), а также равенства $S_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ важному соотношению

$$C_{12,34} = \widetilde{C}_{34,12}. \tag{3.20}$$

Волна сверху в (3.20) имеет тот же смысл, что и в (3.18).

Приведем также выражение для функции $Y_{1,234}$:

$$Y_{1,234} = -\frac{d^4}{dt_1 dt_2 dt_3 dt_4} \int V^{t_1-\tau}_{\alpha_1\rho}\, \overline{V}^{\tau-t_2}_{\alpha_2\mu}\, \overline{V}^{\tau-t_3}_{\alpha_3\nu}\, \overline{V}^{\tau-t_4}_{\alpha_4\varphi}\, \overline{\partial}_\mu \overline{\partial}_\nu \overline{\partial}_\varphi K^1_\rho\, d\tau +$$

$$+ \frac{d}{dt_1}\left[3\left\{U^{t_{12}}_{\alpha_1\rho}\, \overline{U}^{t_{23}}_{\alpha_3\mu}\, \overline{U}^{t_{24}}_{\alpha_4\nu}\, S_{\rho\alpha_2\mu\nu}\right\}_{234} + 3\left\{U^{t_{12}}_{\alpha_1\rho}\, \overline{U}^{t_{24}}_{\alpha_4\mu}\, \delta(t_{32})\, S_{\rho\alpha_2\alpha_3\mu}\right\}_{234} + \right. \tag{3.21}$$

$$\left. + U^{t_{12}}_{\alpha_1\rho}\, \delta(t_{23})\, \delta(t_{24})\, S_{\rho\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\right] \quad (t_{ik} = t_i - t_k).$$

Наиболее простой вид выражения (3.13), (3.21) имеют в случае гауссова начального распределения $(S_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0)$. Входящие в них интегралы можно вычислить явно и получить

$$Y_{1,234} = -\frac{d^4}{dt_1 dt_2 dt_3 dt_4}\left[\overline{V}^{t_{12}}_{\alpha_2\mu}\, \overline{V}^{t_{13}}_{\alpha_3\nu}\, \overline{V}^{t_{14}}_{\alpha_4\varphi}\, G_{\alpha_1,\mu\nu\varphi} - 3\left\{V^{t_{12}}_{\alpha_1\rho}\, \overline{V}^{t_{23}}_{\alpha_3\nu}\, \overline{V}^{t_{24}}_{\alpha_4\varphi}\, G_{\rho,\alpha_2\nu\mu}\right\}_{234}\right]; \tag{3.22}$$

$$C_{12,34} = \frac{d^4}{dt_1 dt_2 dt_3 dt_4}\left[2\left\{V^{t_{12}}_{\alpha_1\rho}\, \overline{V}^{t_{23}}_{\alpha_3\mu}\, \overline{V}^{t_{24}}_{\alpha_4\nu}\, F_{\rho\alpha_2,\mu\nu}\right\}_{12} - \right.$$

$$\left. - 2\left\{V^{t_{13}}_{\alpha_1\rho}\, V^{t_{23}}_{\alpha_2\mu}\, \overline{V}^{t_{34}}_{\alpha_4\nu} F_{\rho\mu,\alpha_3\nu}\right\}_{34}\right] \quad (\text{при } S_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0), \tag{3.23}$$

если ввести матрицы F и G, удовлетворяющие системе линейных алгебраических уравнений:

$$D_{\alpha\rho} G_{\rho,\beta\gamma\delta} - 3\left\{\varepsilon_\beta D_{\beta\mu} \varepsilon_\mu G_{\alpha,\mu\gamma\delta}\right\}_{\alpha\beta\gamma} = \overline{\partial}_\beta \overline{\partial}_\gamma \overline{\partial}_\delta K^1_\alpha; \tag{3.24}$$

$$2\left\{D_{\alpha\rho} F_{\rho\beta,\gamma\delta}\right\}_{\alpha\beta} - 2\left\{\varepsilon_\gamma D_{\gamma\mu} \varepsilon_\mu F_{\alpha\beta,\mu\delta}\right\}_{\gamma\delta} = c_{\alpha\beta,\gamma\delta}. \tag{3.25}$$

4. ПРИМЕР *RLC*-КОНТУР С НЕЛИНЕЙНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Для простоты возьмем схему, показанную на рис. 1. Обозначим через x_1 напряжение на емкости C и положим $x_2 = \rho I$, где I — ток, протекающий через индуктивность, $\rho = \sqrt{L/C}$. В переменных x_1, x_2 уравнения «движения» будут иметь следующий вид:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -x_2, \qquad \frac{dx_2}{d\tau} = x_1 - \mu(x_2)\, x_2. \tag{4.1}$$

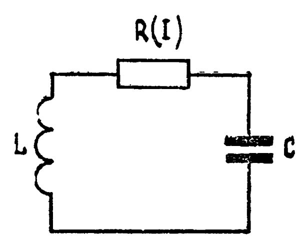

Рис. 1. Колебательный контур с нелинейным сопротивлением.

Здесь мы ввели безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ $(\omega_0 = 1/\sqrt{LC})$ и безразмерный коэффициент затухания $\mu(x) = \rho^{-1} R(x/\rho)$.

Аппроксимируя характеристику нелинейного сопротивления линейно-кубической зависимостью, можно записать

$$\mu(x)\,x = \mu x + \frac{\lambda}{3!}x^3 \quad (\mu \equiv \mu(0)). \tag{4.2}$$

Подстановка (4.2) в (4.1) позволяет выписать непосредственно матрицу D (напомним, что $D_{\alpha\beta} = -K_{\alpha,\beta}$):

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

а также определить кинетические коэффициенты

$$K_{\alpha,\beta\gamma\delta} = -\lambda\delta^{2222}_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv -\lambda\delta_{\alpha 2}\,\delta_{\beta 2}\,\delta_{\gamma 2}\,\delta_{\delta 2} \qquad \left(\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases}\right). \tag{4.4}$$

Поскольку диссипация энергии в нашей схеме связана только с переменной x_2, то разумно предположить, что кинетические коэффициенты, определяющие шумовые свойства, равны:

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= K_{22}\,\delta^{22}_{\alpha\beta} \equiv K_{22}\,\delta_{\alpha 2}\,\delta_{\beta 2}, \\ K_{\alpha\beta,\gamma\delta} &= K_{22,22}\,\delta^{2222}_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \gamma\delta^{2222}_{\alpha\beta\gamma\delta}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Так как стационарное распределение в отсутствие внешних сил является гауссовым, $w_{\text{рав}} \sim \exp\left(-C/2kT\,(x_1^2 + x_2^2)\right)$,

$$R_{\alpha\beta} = (kT/C)\,\delta_{\alpha\beta}. \tag{4.6}$$

Подставляя (4.3) и (4.6) в (2.19), находим

$$K_{22} = 2\mu\,(kT/C). \tag{4.7}$$

Постоянная же γ в (4.5) является диссипационно-неопределяемой.

Считая контур высокодобротным ($\mu \ll 1$), удобно перейти к медленно меняющимся переменным

$$\begin{aligned} z_1 &= A\cos\Phi = x_1\cos t + x_2\sin t, \\ z_2 &= A\sin\Phi = -x_1\sin t + x_2\cos t. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Для них из (4.1), (4.2) следуют уравнения

$$\dot{z}_1 = -\left(\mu x_2 + \frac{\lambda}{3!}x_2^3\right)\sin t,$$

$$\dot{z}_2 = -\left(\mu x_2 + \frac{\lambda}{3!}x_2^3\right)\cos t.$$

Подставляя сюда выражение для x_2 из обратного по отношению к (4.8) преобразования

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1\cos t - z_2\sin t, \\ x_2 &= z_1\sin t + z_2\cos t \end{aligned} \tag{4.9}$$

и проводя усреднение по периоду, получим

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{\lambda}{8}z^2\right)z_1, \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{\lambda}{8}z^2\right)z_2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Используя (4 10) и (4 8), (4.9), а также аналогичные преобразования шумовых источников, которые можно ввести в уравнения (4.1) по методу Ланжевена, нетрудно найти (после усреднения по периоду) матрицы $D_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ и $K_{\alpha,\beta\gamma\delta}$, $K_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ в новой системе координат:

$$D_{\alpha\beta} = (\mu/2)\,\delta_{\alpha\beta}, \quad R_{\alpha\beta} = (kT/C)\,\delta_{\alpha\beta}, \qquad K_{\alpha\beta} = \mu\,(kT/C)\,\delta_{\alpha\beta}; \tag{4.11}$$

$$K_{\alpha,\beta\gamma\delta} = -\frac{3\lambda}{8}\left(\delta^{1111}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \delta_{\alpha_1}\left\{\delta^{122}_{\beta\gamma\delta}\right\}_{\beta\gamma\delta} + \delta_{\alpha_2}\left\{\delta^{112}_{\beta\gamma\delta}\right\}_{\beta\gamma\delta} + \delta^{2222}_{\alpha\beta\gamma\delta}\right),$$
$$K_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \frac{\gamma}{8}\left(3\delta^{1111}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \delta^{1122}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \delta^{2211}_{\alpha\beta\gamma\delta} + 3\,\delta^{2222}_{\alpha\beta\gamma\delta} + 4\left\{\delta^{12}_{\alpha\beta}\right\}_{\alpha\beta}\left\{\delta^{12}_{\gamma\delta}\right\}_{\gamma\delta}\right). \tag{4.12}$$

Подставив (4.11), (4.12) в (3.9), (3.13), найдем

$$c_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \frac{\gamma - 2\,(kT/C)\,\lambda}{8}\left(\frac{kT}{C}\right)^2\left(3\,\delta^{1111}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \delta^{1122}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \delta^{2211}_{\alpha\beta\gamma\delta} + 3\,\delta^{2222}_{\alpha\beta\gamma\delta} + 4\{\delta_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta}\,\{\delta_{\gamma\delta}\}_{\gamma\delta}\right). \tag{4.13}$$

Теперь можно перейти к расчету четырехиндексных функций (в медленно меняющихся переменных z_1, z_2). Для нахождения функции $Y_{1,234}$ решим уравнение (3.24), используя диагональность матрицы D. Находим матрицу

$$G_{\alpha,\beta\gamma\delta} = -\,\mu^{-1}\,(kT/C)^3\,K_{\alpha,\beta\gamma\delta},$$

подстановка которой в (3.22) приводит к следующему выражению для функции $Y_{1,234}$:

$$Y_{1,234} = \frac{d^4}{dt_1dt_2dt_3dt_4}\,\mu^{-1}\left(\frac{kT}{C}\right)^3 K_{\alpha,\beta\gamma\delta}\left(\exp\left[-\frac{\mu}{2}(3t_1 - t_2 - t_3 - t_4)\right]\times \eta_{12}\,\eta_{13}\,\eta_{14} - 3\left\{\exp\left[-\frac{\mu}{2}(t_1 + t_2 - t_3 - t_4)\right]\eta_{12}\,\eta_{23}\,\eta_{24}\right\}_{234}\right) \tag{4.14}$$

$$\left(\eta_{lk} \equiv \eta\,(t_l - t_k) = \begin{cases} 1, & t_l > t_k \\ 0, & t_l < t_k \end{cases}\right).$$

Уравнение (3.25) для матрицы $F_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ в данном случае неприменимо, и функцию $C_{12,34}$ найдем непосредственно из ее определения (3.19):

$$C_{12,34} = \frac{d^4}{dt_1dt_2dt_3dt_4}\exp\left(-\frac{\mu}{2}(t_1 + t_2 - t_3 - t_4)\right)\times c_{\alpha\beta,\gamma\delta}\,(\min(t_1,\ t_2) - \max(t_3,\ t_4)). \tag{4.15}$$

Подставляя (4.14) и (4.15), при учете (4.12), (4.13), в формулы (3.15)—(3.17), можно определить все четырехиндексные функции. Для примера найдем среднеквадратичные флуктуации энергии

$$\langle E\,(t+\tau),\ E\,(t)\rangle = (kT/2)^2\,\langle B_\alpha\,(t+\tau)\,R^{-1}_{\alpha\beta}\,B_\beta\,(t+\tau),\ B_\gamma\,(t)\,R^{-1}_{\gamma\delta}\,B_\delta\,(t)\rangle. \tag{4.16}$$

Переходя в (4.16) к медленным переменным с помощью преобразований (4 9), получим

$$\langle E(t+\tau),\ E(t)\rangle = C^2/4 \sum_{\alpha,\beta} \langle z_\alpha^2(t+\tau),\ z_\beta^2(t)\rangle =$$
$$= C^2/4 \sum_{\alpha,\beta} \langle z_\alpha(t+\tau),\ z_\alpha(t+\tau),\ z_\beta(t),\ z_\beta(t)\rangle + C^2/2 \sum_{\alpha,\beta} \langle z_\alpha(t+\tau),\ z_\beta(t)\rangle^2. \quad (4.17)$$

Применяя к (4.17) формулу (3.17), в которой надо предварительно произвести четырехкратное интегрирование по t_1, t_2, t_3, t_4, и используя (4.14) и (4.15), при учете (4.13) находим

$$\langle E(t+\tau),\ E(t)\rangle = 2(kT/2)^2 e^{-\mu|\tau|} + (kT/2)^2(\gamma - 2(kT/C)\lambda)\,|\tau|\,e^{-\mu|\tau|}. \quad (4.18)$$

Анализируя полученное выражение, мы видим, что нелинейные члены, не проявляя себя при малых временах τ (что связано, по-видимому, с гауссовостью начального распределения), дают наибольший вклад в флуктуации энергии, равный $(kT/2)^2\,[\gamma - 2(kT/C)\lambda]/\mu e$ при временах порядка $|\tau| \sim 1/\mu$. При достаточно малых μ (например, вблизи порога возбуждения) он может намного превышать вклад линейных членов. Однако обсуждение этого уже лежит вне пределов применимости данной теории, связанной как раз с малостью отношения $(\gamma - 2(kT/C)\lambda)/\mu$.

Интересно сравнить также полученное нами выражение (4.18) с выражением для аналогичного случая, найденным в работе [2] более сложным методом, без перехода к медленно меняющимся переменным. В наших обозначениях оно имеет вид

$$\langle E(t+\tau),\ E(t)\rangle = 2(kT/2)^2 e^{-\mu|\tau|} + (kT/2)^2(\gamma - 2(kT/C)\lambda) \times$$
$$\times |\tau|\,e^{-\mu|\tau|}\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2\tau + \frac{5}{2}\,\frac{\sin 2\tau}{2\tau}\right) \quad (4.19)$$

и отличается наличием осцилляционных членов на второй гармонике.

В заключение автор выражает признательность Р. Л. Стратоновичу за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочков Г. Н., Кузовлев Ю. Е. — ЖЭТФ, 1977, 72, с. 238.
2. Толстопятенко А. В Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 2289-80. Деп. от 9 июня 1980 г.
3. Крупенников Н А.— Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, № 3, с. 383.
4. Стратонович Р Л, Толстопятенко А. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 8, с. 956.
5. Стратонович Р. Л., Толстопятенко А. В.— Вестник МГУ. Сер. Физика, астрономия, 1980, № 2, с. 46.
6. Стратонович Р. Л.— Вестник МГУ. Сер. Физика, астрономия, 1970, № 5, с. 479; № 6, с. 699.

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Поступила в редакцию 19 мая 1980 г.

DETECTION OF FOUR-INDEX FUNCTIONS IN MARKOV NONLINEAR NONEQUILIBRIUM THERMODYNAMICS

A. V. Tolstopyatenko

In a linear-cubic case, in the approximation of weak nongaussian Markov process, expressions have been found and studied for all nonquantum four-index functions. An example is considered for the application of results obtained to the calculation of the energy fluctuations in an oscillation contour.