ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1981*

УДК 525 7

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ ОСНОВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ РАДИОТЕПЛОЛОКАЦИОННОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОФИЛЕЙ АТМОСФЕРЫ. I

С. А. Жевакин

При помощи аппарата функциональных производных линеаризируется основное интегральное уравнение, применяемое при радиотеплолокационном восстановлении температурных профилей атмосферы с земной поверхности. Ядро полученного линеаризированного уравнения отличается от соответствующего ядра приближенного линеаризированного уравнения, используемого обычно в работах по радиотеплолокационному восстановлению температурных профилей в полосе длин волн молекулярного поглощения кислорода $\lambda \sim 5$ *мм*, корректирующим множителем. Вследствие этого восстановленная величина $\Delta_r T(h) = T_r(h) - \overline{T(h)}$, где $T_r(h)$ — восстановленный регуляризированный высотный профиль температуры атмосферы, $\overline{T(h)}$ — некоторый средний статистический профиль, на частотах восстановления $\nu < 52{,}5$ *ГГц* в $1{,}2 \div 1{,}5$ раза превышает (по модулю) значение $\Delta_r T(h)$, получаемое по прежнему способу «линеаризации»; на частотах $\nu \gtrsim 53$ *ГГц* для высот $h = 0 \div 3$ *км* исправление увеличивает $\Delta_r T(h)$ (по модулю) только на $2 \div 4\%$. Устанавливается, что ошибка в определении величины $\Delta_r T(h)$, связанная с линеаризацией, не превышает 15% при $\Delta T(h) < 20°$; при $h < 5$ *км* и $\Delta T(h) < 10°$ она уменьшается до 3%.

1. В статье линеаризируется основное интегральное уравнение, применяемое при радиотеплолокационном восстановлении температурных профилей атмосферы с земной поверхности. Линеаризация даст возможность, в особенности при дальнейшем повышении точности измерений яркостной температуры, несколько повысить качество восстановления температурных профилей. В границах ее применимости результаты восстановления, в отличие от того, что имело место при прежнем способе «линеаризации», не будут зависеть от конкретного выбора исходного профиля температуры $\overline{T(h)}$. Это позволит в качестве $\overline{T(h)}$ использовать наиболее удобный и простой профиль, например, линейный. Вместе с тем полученные результаты позволяют оценить точность применяемого до настоящего времени во всех известных нам работах по радиотеплолокационному восстановлению температурных профилей [1–16] приближенного способа линеаризации.

При восстановлении температурного высотного профиля атмосферы с поверхности Земли при достаточно малых оптических толщах $\tau_0(\nu) \sec\theta$ ($\tau_0(\nu)$ — оптическая толща атмосферы на частоте радиометра ν при визировании в зенит, θ — зенитный угол визирования), осуществляющихся, например, при частотах $\nu < 52{,}5$ *ГГц*, линеаризация может привести к увеличению (по модулю) регуляризированных тем или иным способом (например, по А. Н. Тихонову) значений $\Delta_r T(h) = T_r(h) - \overline{T(h)}$ ($T_r(h)$ — восстановленный (регуляризированный) искомый температурный профиль, $\overline{T(h)}$ — некоторый средний статистический профиль, определяемый, например, методом оптимальной экстраполяции) в 1,2—1,5 раза в сравнении с получаемым по прежнему приближенному способу линеаризации (см. ниже)*. На частотах же $\nu \gtrsim 53$ *ГГц* для высот $h = 0 \div 4$ *км* соответствующее увеличение (по модулю) составляет только 2—4%.

При восстановлении же температурного профиля атмосферы сверху (со спутника или самолета, см. ч. II) при полете над сушей исправленные значения $\Delta_r T(h)$ будут отличаться от прежних, получающихся при линеаризации по рецепту работы [16], лишь на несколько процентов (независимо от значения частоты ν), тогда как при полете над водной поверхностью это отличие на частотах $\nu \gtrsim 53$ *ГГц* получается около 10%, а при $\nu < 52{,}5$ *ГГц* может составить уже несколько десятков процентов.

Таким образом, результаты настоящей работы и работы II, помимо их значения для обоснования метода температурной радиотеплолокации, могут иметь интерес при восстановлении температурного профиля атмосферы снизу или при восстановлении сверху при полете над водной поверхностью в тех случаях, когда $\tau_0(\nu)\,\mathrm{sc}\,\theta$ достаточно мало, например, при $\nu < 52{,}5$ *ГГц*.

Впрочем, если согласно ряду авторов принять корень из среднеквадратичной ошибки восстановления температурного профиля в 1°C, то при получающейся обычно величине $T(h) - \overline{T(h)} \sim 5 \div 10°$ (см., например, графики работ [14, 15]) уточнение на 10% дает уже поправку в 0,5 — 1°, т. е. будет иметь реальное значение и при зондировании на частотах $\nu \gtrsim 52{,}5$ *ГГц*.

2. Рассмотрим сначала случай восстановления температурного профиля атмосферы с поверхности Земли (случай восстановления сверху будет рассмотрен в работе II).

Яркостная температура плоской атмосферы при наблюдении с Земли на частоте ν в направлении зенитного угла θ равна

$$T_{\text{я}}(\nu,\ \theta) = \mathrm{sc}\,\theta \int\limits_0^\infty T(h)\,\gamma\,[T(h),\ p\,\{T(h)\},\ \nu] \times$$
$$\times \exp\left\{-\,\mathrm{sc}\,\theta \int\limits_0^h \gamma\,[T(h'),\ p\,\{T(h')\},\ \nu]\,dh'\right\}dh, \tag{1}$$

где $T(h)$, $p\{T(h)\}$ — соответственно высотные истинные профили температуры и давления атмосферы (скобкой $\{\ \}$ мы обозначаем то обстоятельство, что атмосферное давление $p(h)$ есть функционал от $T(h')$, $h' < h$), $\gamma\,[T(h),\ p\{T(h)\},\ \nu]$ — коэффициент атмосферного поглощения. В дальнейшем мы будем отождествлять коэффициент атмосферного поглощения γ с коэффициентом поглощения атмосферного кислорода γ_{O_2}, ибо в линии поглощения молекулярного кислорода $\lambda \sim 5$ *мм* поглощением водяного пара можно пренебречь (см., например, соответствующие оценки в работах [15, 17]).

Выполняя измерения $T_{\text{я}}(\nu,\ \theta)$ при различных углах θ или различных частотах ν, в результате решения получающегося для $T(h)$ нелинейного интегрального уравнения, в принципе, возможно восстановление температурного профиля $T(h)$, если функции $p\{T(h)\}$ и $\gamma\,[T(h),$ $p\{T(h)\}$, $\nu]$ считаются известными.

Обычно утверждается, что вследствие слабой зависимости ядра интегрального уравнения (1)

---

* Здесь и при дальнейшем обсуждении величины ошибок из-за приближенной линеаризации имеется в виду, разумеется, тот идеальный случай, когда ошибки восстановления величины $\Delta_r T(h)$ из-за неточности измерений величины $\delta T_{\text{я}}(\nu,\ \theta)$ отсутствуют

$$\gamma[T(h), p\{T(h)\}, \nu] \exp\left\{-\sec\theta \int_0^h \gamma[T(h'), p\{T(h')\}, \nu]\, dh'\right\}$$

от $T(h)$ (см., например, стр. 977 работы [9]) нелинейное относительно $T(h)$ уравнение (1) может быть в результате замены в этом выражении величин $T(h)$, $p\{T(h')\}$ на некоторые средние значения $\overline{T(h)}$, $\overline{p(h)}$, получаемые, например, по приземным значениям $T(0) = T_0$, $p(0) = p_0$ методом оптимальной экстраполяции [18], приведено к линейному уравнению

$$T_я(\nu, \theta) = \sec\theta \int_0^\infty T(h)\gamma[\overline{T(h)}, \overline{p(h)}, \nu] \times \exp\left\{-\sec\theta \int_0^h \gamma[\overline{T(h')}, \overline{p(h')}, \nu]\, dh'\right\} dh, \tag{2}$$

после чего для восстановления высотного профиля $T(h)$ можно использовать вместо уравнения (1) уравнение (2). Аналогичные утверждения о возможности восстановления профиля температуры $T(h)$ по «линеаризованному» уравнению (2) содержатся также и в остальных работах [1–8, 10–15].

Мы покажем, однако, что сведение нелинейного уравнения (1) к линейному уравнению (2) при восстановлении высотного профиля температуры с поверхности Земли на частотах $\nu < 52{,}5$ *ГГц* приводит к неправильным результатам — занижению величины $\Delta_r T(h)$ (регуляризированной) для интервала высот $h = 0 \div 3$ *км* в 1,2—1,5 раза, как о том уже говорилось выше. На частотах же $\nu \geqslant 53$ *ГГц* такая линеаризация приводит для высот $h = 0 \div 3$ *км* к занижению восстанавливаемой снизу величины $\Delta_r T(h)$ лишь на 2—4%.

Прежде чем приступать к линеаризации уравнения (1) (правильной!), представим коэффициент поглощения атмосферы $\gamma(T, p, \nu) = \gamma_{O_2}(T, p, \nu)$ в удобной форме:

$$\gamma(T, p, \nu) = f(\nu, h) T^{-n(\nu, h)} p^{m(\nu, h)}. \tag{3}$$

Здесь предполагается использование конкретной модели атмосферы, задающей изменения давления и температуры с высотой (в этой связи в выражении (3) и появляется зависимость от высоты h). В качестве таковой была принята модель ВСА-60 [19] (см. также [20], где эта модель воспроизведена).

Табл. 1, 2 содержат значения $n(\nu, h)$ и $m(\nu, h)$, найденные для модели атмосферы ВСА-60 (лето и зима) из соотношений

$$n(\nu, h) = -\frac{d\ln\gamma(T, p, \nu)}{d\ln T}, \quad m(\nu, h) = \frac{d\ln\gamma(T, p, \nu)}{d\ln p}.$$

Коэффициент поглощения кислорода O_2 рассчитывался по формулам работ [20, 21] с уменьшенными на $\sim 30\%$ значениями полуширин комплекса линий O_2 на уровне моря $\Delta\nu_{O_2}$ согласно результатам работ [22–24]. Мы видим, что показатели степеней $n(\nu, h)$ и $m(\nu, h)$ мало зависят от времени года, а следовательно, и от выбора той или иной модели атмосферы.

Давление p с высотой меняется по закону [25]

$$p(h) = p_0 \exp\left[-\int_0^h \frac{g\,dh'}{R_в T(h')}\right], \tag{4}$$

где $g = 980{,}64$ *см/с²*, $R_в = 2{,}8704 \cdot 10^6(1 + 0{,}378\ e/p)$ (e — парциальное давление водяного пара). С достаточной для наших целей точ-

Значения показателей $n(\nu, h)$ (верхнее число) и $m(\nu, h)$ (нижнее число) в зависимости от высоты h (*км*) и частоты ν (*ГГц*) для летней модели атмосферы ВСА-60

h, км	ν, *ГГц*								
	51	52	53	53,5	54	55	56	57	58
0	2,10	1,57	1,04	0,888	0,849	1,08	1,51	1,81	2,30
	1,87	1,76	1,56	1,45	1,33	1,16	0,945	0,911	0,98
1	2,10	1,53	0,953	0,791	0,755	1,03	1,51	1,77	2,34
	1,87	1,76	1,56	1,44	1,33	1,17	0,966	0,900	1,03
2	2,09	1,49	0,850	0,675	0,644	0,962	1,52	1,72	2,38
	1,87	1,76	1,55	1,43	1,32	1,18	0,997	0,878	1,09
3	2,11	1,49	0,811	0,618	1,579	0,920	1,52	1,67	2,42
	1,87	1,76	1,55	1,43	1,32	1,20	1,02	0,862	1,13
4	2,14	1,50	0,761	0,544	0,498	0,869	1,53	1,61	2,45
	1,86	1,76	1,55	1,43	1,32	1,22	1,05	0,837	1,18
5	2,15	1,49	0,684	0,447	0,401	0,819	1,54	1,54	2,49
	1,86	1,76	1,54	1,42	1,32	1,25	1,09	0,804	1,23
6	2,17	1,50	0,630	0,365	0,314	0,771	1,56	1,47	2,53
	1,85	1,76	1,54	1,42	1,32	1,28	1,13	0,770	1,29
7	2,17	1,47	0,528	0,247	0,205	0,727	1,59	1,39	2,57
	1,84	1,75	1,52	1,40	1,32	1,31	1,19	0,727	1,35
8	2,19	1,50	0,480	0,168	0,120	0,682	1,61	1,31	2,60
	1,84	1,74	1,52	1,40	1,32	1,34	1,23	0,691	1,40
9	2,20	1,49	0,409	0,075	0,032	0,642	1,63	1,23	2,62
	1,82	1,73	1,50	1,39	1,33	1,38	1,28	0,654	1,44
10	2,20	1,48	0,329	−0,020	−0,053	0,606	1,66	1,16	2,64
	1,81	1,72	1,49	1,38	1,33	1,41	1,37	0,620	1,48
11	2,19	1,43	0,209	−0,141	−0,148	0,573	1,68	1,09	2,65
	1,80	1,70	1,47	1,37	1,34	1,44	1,37	0,588	1,52
12	2,13	1,28	−0,045	−0,353	−0,288	0,534	1,71	1,03	2,67
	1,76	1,66	1,42	1,35	1,34	1,48	1,43	0,553	1,56
13	2,11	1,23	−0,130	−0,423	−0,336	0,513	1,72	1,01	2,66
	1,75	1,64	1,41	1,34	1,35	1,49	1,45	0,545	1,57
14	2,05	1,06	−0,342	−1,576	−0,425	0,483	1,72	0,991	2,66
	1,72	1,60	1,37	1,33	1,36	1,51	1,48	0,538	1,58
15	1,96	0,845	−0,570	−0,725	−0,507	0,454	1,72	0,995	2,64
	1,69	1,55	1,33	1,32	1,37	1,52	1,50	0,543	1,59
16	1,87	0,607	−0,787	−0,860	−0,580	0,420	1,70	1,01	2,61
	1,65	1,50	1,31	1,32	1,38	1,52	1,51	0,558	1,58
17	1,76	0,363	−0,979	−0,974	−0,646	0,382	1,68	1,04	2,58
	1,61	1,44	1,28	1,32	1,38	1,52	1,50	0,580	1,56
18	1,65	0,093	−1,17	−1,08	−0,711	0,336	1,64	1,07	2,54
	1,57	1,39	1,27	1,32	1,38	1,50	1,49	0,612	1,54
19	1,52	−0,184	−1,33	−1,18	−0,772	0,283	1,60	1,11	2,49
	1,53	1,34	1,26	1,31	1,38	1,49	1,48	0,647	1,52
20	1,37	−0,477	−1,48	−1,27	−0,836	0,236	1,55	1,16	2,44
	1,48	1,29	1,25	1,31	1,37	1,46	1,45	0,687	1,49

ностью влиянием влажности на величину давления можно пренебречь.

Поскольку барометрическая формула (4), получаемая из статических соображений, явится фундаментом всех последующих результатов, уместно коснуться здесь вопроса о ее применимости в условиях нестатической атмосферы. Легко видеть, что горизонтальная компонента ветра вносит неощутимую поправку к барометрической формуле (см., например, [25], стр. 75). Что же касается вертикальных движений, скорость которых обычно не превышает 2—3 *м/с* и лишь в мощных грозовых облаках может достигать 15—20 *м/с* [26], то при турбулентной вертикальной скорости $v_h = 10$ *м/с* поправка к формуле (4) за турбулентное давление окажется только $\rho v_h^2 = 1$ *мбар*. Таким образом, барометрическая формула справедлива с достаточной для нас точностью и в условиях нестатической атмосферы.

Пусть $\overline{T(h)}$, $\overline{p(h)}$ есть высотные профили температуры и давления, полученные, например, методом оптимальной экстраполяции по при-

Таблица 2

Значение показателей $n(\nu, h)$ (верхнее число) и $m(\nu, h)$ (нижнее число) в зависимости от высоты h (*км*) и частоты ν (*ГГц*) для зимней модели атмосферы ВСА-60

h, *км*	ν, *ГГц*							
	51	52	53	54	55	56	57	58
0	2,30	1,87	1,32	0,988	1,10	1,46	1,76	2,23
	1,90	1,83	1,66	1,42	1,21	0,948	0,930	0,959
1	2,28	1,82	1,23	0,889	1,04	1,46	1,73	2,27
	1,89	1,82	1,65	1,41	1,21	0,963	0,921	0,999
2	2,27	1,77	1,13	0,780	0,972	1,47	1,69	2,32
	1,89	1,81	1,63	1,40	1,22	0,986	0,905	1,05
3	2,27	1,75	1,05	0,678	0,908	1,48	1,64	2,36
	1,89	1,81	1,63	1,39	1,23	1,02	0,883	1,11
4	2,28	1,75	0,990	0,579	0,846	1,49	1,57	2,41
	1,88	1,81	1,62	1,39	1,25	1,05	0,854	1,17
5	2,29	1,75	0,938	0,491	0,793	1,51	1,50	2,45
	1,88	1,81	1,62	1,38	1,28	1,09	0,823	1,22
6	2,29	1,74	0,864	0,384	0,737	1,53	1,41	2,49
	1,87	1,80	1,61	1,38	1,30	1,14	0,782	1,29
7	2,30	1,74	0,795	0,279	0,685	1,56	1,32	2,53
	1,86	1,79	1,60	1,37	1,34	1,19	0,738	1,35
8	2,31	1,75	0,746	0,191	0,640	1,59	1,24	2,56
	1,85	1,78	1,59	1,38	1,37	1,24	0,698	1,40
9	2,30	1,72	0,619	0,083	0,597	1,63	1,15	2,60
	1,83	1,77	1,57	1,37	1,40	1,30	0,653	1,46
10	2,28	1,68	0,530	−0,022	0,561	1,66	1,08	2,62
	1,82	1,75	1,54	1,37	1,44	1,35	0,615	1,50
11	2,24	1,57	0,336	−0,143	0,532	1,69	1,03	2,64
	1,80	1,72	1,50	1,37	1,46	1,39	0,580	1,54
12	2,21	1,48	0,184	−0,228	0,511	1,70	0,994	2,65
	1,78	1,69	1,47	1,37	1,48	1,43	0,560	1,56
13	2,12	1,26	−0,134	−0,371	0,476	1,72	0,968	2,65
	1,74	1,64	1,41	1,37	1,51	1,47	0,540	1,58
14	2,05	1,08	−0,353	−0,457	0,449	1,72	0,965	2,64
	1,71	1,59	1,38	1,37	1,52	1,49	0,539	1,59
15	1,96	0,859	−0,588	−0,544	0,412	1,71	0,974	2,61
	1,68	1,54	1,34	1,38	1,53	1,51	0,549	1,59
16	1,87	0,632	−0,795	−0,616	0,374	1,69	0,996	2,58
	1,64	1,49	1,32	1,39	1,53	1,51	0,569	1,57
17	1,77	0,373	−0,998	−0,687	0,328	1,65	1,03	2,54
	1,60	1,44	1,29	1,39	1,51	1,50	0,598	1,56
18	1,66	0,124	−1,17	−0,753	0,281	1,61	1,06	2,50
	1,56	1,39	1,28	1,39	1,50	1,49	0,631	1,53
19	1,53	−0,139	−1,38	−0,820	0,227	1,57	1,10	2,45
	1,51	1,34	1,27	1,38	1,48	1,47	0,669	1,50
20	1,41	−0,395	−1,47	−0,885	0,171	1,52	1,14	2,39
	1,47	1,30	1,26	1,37	1,45	1,44	0,708	1,47

земным значениям температуры T_0 и давления p_0. Представим истинный температурный профиль $T(h)$ в виде

$$T(h) = \overline{T(h)} + \Delta T(h).$$

Подставив в уравнение (1) выражения (3), (4), для каждой высоты h проведем в (1) разложение по степеням $\Delta T(h)/\overline{T(h)} \ll 1$ с точностью до первого порядка. Будем иметь

$$\delta T_я(\nu, \theta) = \sec\theta \int_0^\infty \overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)} \exp\left[-\sec\theta \int_0^h \overline{\gamma(h')}\,dh'\right] \times$$

$$\times \left[(1 - n(\nu, h)) \frac{\Delta T(h)}{\overline{T(h)}} + \sec\theta \int_0^h \overline{\gamma(h')}\, n(\nu, h') \frac{\Delta T(h')}{\overline{T(h')}}\, dh' + \right.$$

$$+ m(\nu, h) \int_0^h \frac{g}{R_{\text{в}} \overline{T(h')}} \frac{\Delta T(h')}{\overline{T(h')}} dh' - \sec\theta \int_0^h \overline{\gamma(h')} m(\nu, h') \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{h'} \frac{g}{R_{\text{в}} \overline{T(h'')}} \frac{\Delta T(h'')}{\overline{T(h'')}} dh'' \right\} dh' \Bigg] dh, \tag{5}$$

где $\delta T_{я}(\nu, \theta) = T_{я}(\nu, \theta) - \overline{T_{я}(\nu, \theta)}$, а $\overline{T_{я}(\nu, \theta)}$ и $\overline{\gamma(h)}$ означают соответственно яркостную температуру и коэффициент поглощения для среднестатистического профиля температуры, полученного, например, методом оптимальной экстраполяции.

Отметим, что по обычному рецепту [1–15] «линеаризации» уравнения (1) мы вместо уравнения (5) получили бы уравнение (2) или, что то же самое, уравнение

$$\delta T_{я}(\nu, \theta) = \sec\theta \int_0^\infty \overline{\gamma(h)} \exp\left(- \sec\theta \int_0^h \overline{\gamma(h')} dh' \right) \Delta T(h) dh. \tag{6}$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что в основной интеграл по dh уравнения (5) величина $T(h)$ входит как непосредственно, так и под знаками однократного и даже двукратного интегрирования (по dh' и по dh''). Поэтому не существует производной по температуре от интегранда уравнения (1) или производной по $\Delta T(h)$ от интегранда уравнения (5), которая выражалась бы лишь через $T(h)$ или $\Delta T(h)$, но не через (дополнительно) $dT(h)/dh$ или $d\Delta T(h)/dh$ — последнее привело бы как к повышению порядка уравнения, так и к появлению новой нелинейности (поскольку $dh/dT = 1/dT/dh$). Но, разумеется, можно пользоваться понятием вариационной или функциональной производной (сводку некоторых относящихся сюда формул можно найти в Приложении 1 монографии [27]).

Неправильная линеаризация привела авторов [10] к заключению о недопустимости какой бы то ни было линеаризации уравнения (1) из-за его якобы сильной нелинейности.

Таблица 3

h, *мк*	$\lim\limits_{\substack{\Delta T \to 0 \\ \Delta h \to 0}} \frac{(T_{я} - \overline{T}_{я})}{\Delta T \Delta h}$	$(T_{я} - \overline{T}_{я})/(\Delta T \Delta h)$		
		$\Delta T = 1°$	$\Delta T = 10°$	$\Delta T = 20°$
1	0,1574	0,1572	0,1557	0,1545
3	0,06277	0,06281	0,06355	0,06448
5	0,02912	0,02924	0,03048	0,03185
7	0,01594	0,01606	0,01728	0,1860
9	0,009700	0,009808	0,01088	0,01202
11	0,006937	0,007025	0,007892	0,008815

В действительности малость величины $\Delta T(h)/T(h) \approx 10°/300° = 1/30$ обеспечивает возможность линеаризации. Чтобы дать представление о величине нелинейной поправки (из-за конечности значения $\Delta T(h)$) к линеаризированному по $\Delta T(h)/\overline{T(h)}$ выражению (5), в табл. 3 помещены значения $(1/\Delta T \Delta h)\, [T_{я}(\nu, \theta) - \overline{T_{я}(\nu, \theta)}]$, вычисленные на ЭВМ для летней модели ВСА-60 при $\nu = 53$ *ГГц*, $\sec\theta = 1{,}5$. Вычисления проводились при $m(\nu, h) = 0$. Иными словами, при варьировании профиля температуры профиль давления оставлялся неизменным, что может, согласно принципу Ле Шателье, только увеличить роль нелинейности. Варьированная температура атмосферы принималась совпадающей с $\overline{T(h)}$ всюду за исключением слоя толщины $\Delta h = 0{,}01$ *км*, центрированного к значению $h = 1, 3, ..., 11$ *км*, где она отличалась от $\overline{T(h)}$ на величину ΔT. Из табл. 3 видно, что даже при $\Delta T = 20°$ поправка из-за нелинейности не превышает 15%; при $h < 5$ *км* и $\Delta T < 10°$ она уменьшается до 3%.

3. Приступим теперь к преобразованию линеаризированного интегрального уравнения (5). По сути дела это преобразование есть не что иное, как вычисление функциональной производной

$$\frac{\delta T_я(\nu, \theta)}{\delta T(h)} = \lim_{\substack{\delta T \to 0 \\ \Delta h \to 0}} \frac{\delta T_я(\nu, \theta)}{\delta T(h)\, \Delta h},$$

где $\delta T_я(\nu, \theta)$, а следовательно, и предел, вычисляются в том предположении, что в слое h, $h + \Delta h$ температура $T(h)$ получает приращение $\delta T(h) = \Delta T$, тогда как всюду вне этого слоя $\delta T(h) = 0$.

Здесь можно было бы идти двумя путями. Во-первых, можно представить правую часть уравнения (5) в виде предела при $\Delta h_i \to 0$, $\alpha \to \infty$ суммы по α дискретным слоям оптической толщины $\Delta\tau_i = \overline{\gamma(h_i)}\, \Delta h_i$ $(i = 1, 2, \dots, \alpha)$, где $\tau_i = \int\limits_0^h \overline{\gamma(h')}\, dh'$. Проводя перегруппировку этой дискретной суммы с выделением членов вида $[\dots]\, \Delta T_i \Delta h_i$ и снова в пределе $\Delta h_i \to 0$ возвращаясь к интегральной записи, мы и придем к искомому результату. Во-вторых (этот путь оказывается существенно проще), можно было бы вычислить функциональную производную.

Таблица 4

ν, *ГГц*	Лето	Зима
51	5,28	4,89
52	5,22	4,89
53	5,50	5,10
54	6,18	5,67
55	6,72	6,24
56	8,00	7,80
57	14,05	11,31
58	8,13	7,71

И в том и в другом случаях, чтобы учесть влияние неизотермичности атмосферы и прийти к простым формулам, следует использовать для среднего коэффициента поглощения атмосферы $\overline{\gamma(h)}$ экспоненциальную аппроксимацию:

$$\overline{\gamma(h)} = \gamma_0 \exp(-h H_\gamma). \tag{7}$$

В табл. 4 помещены значения H_γ, вычисленные для летней и зимней моделей ВСА-60 из требования минимизации интеграла $\int\limits_0^{30} |\gamma(h) - \gamma_0 \exp(-h H_\gamma)|\, dh$. Эти значения позволяют получать оптические толщины $\tau = \gamma_0 \int\limits_0^h \exp(-h'/H_\gamma)\, dh'$ на интересующих нас частотах $\nu = 51 \div 58$ *ГГц*, отличающиеся для всех высот не более чем на 2% от значений τ, рассчитанных непосредственно по моделям ВСА-60 Что касается значений $\overline{\gamma(h)}$, определяемых формулой (7), то в соответствии с соотношением $\overline{\gamma(h)} = (1/H_\gamma)(\tau_0 - \tau)$ процентная разница между ними и значениями, рассчитанными непосредственно по моделям ВСА-60, будет увеличиваться с высотой; на высотах $h \approx 7$ *км* она доходит до 10% (при разницах для величин τ меньше 2%). Однако, поскольку вклад атмосферных слоев в яркостную температуру быстро убывает с их высотой, точность наших расчетов, основанных на соотношении (7), следует считать совпадающей с точностью аппроксимации оптических толщ, а не величин $\overline{\gamma(h)}$, т. е. лучше 2%. Отметим, что и в случаях температурных высотных профилей, сильно отличающихся от профилей летней и зимней моделей ВСА-60 (например, в случае мощной приземной температурной инверсии) аппроксимация (7) будет продолжать оставаться хорошей.

Заметим, что в границах применимости линеаризации интегрального уравнения (1) допустимы будут любые профили $\overline{T(h)}$ (в том числе и нелинейные) — лишь бы значения $\overline{\gamma(h)}$ им точно соответствовали. Однако принятие экспоненциального закона (7) поведет, вообще говоря, к рассогласованию значений $\overline{T(h)}$ и $\overline{\gamma(h)}$ и появлению из-за этого соответствующей (вообще говоря, очень небольшой) ошибки. Учитывая, что, как будет видно из дальнейшего, значения интересующего нас корректирующего множителя $K(\nu, \theta, h)$ определяются только параметрами части атмосферы, лежащей над уровнем h, мы можем, в случае надобности, внести соответствующие уточнения, если, во-первых, для каждой высоты h будем определять свое значение $H_\gamma(h)$ из требования, например, минимизации интеграла

$$\int_h^{30} \left| \overline{\gamma(h)} \exp\left(-\frac{h'}{H_\gamma(h)}\right) - \overline{\gamma(h')} \right| \exp\left[-\frac{h' \sec\theta}{H_\gamma(h)}\right] dh' \tag{8}$$

(здесь $\overline{\gamma(h)}$ есть коэффициент поглощения, точно соответствующий принятому профилю температуры $\overline{T(h)}$), во-вторых, в целях приближения исходного температурного профиля к истинному профилю и уменьшения тем самым ошибки, связанной с линеаризацией интегрального уравнения, для вычисления $K(\nu, \theta, h)$ не обязательно брать линейный профиль $T(h) = T_0 - ah$, где $a = \mathrm{const}$ всюду в «средней» атмосфере, а для каждой высоты h вводить свой температурный градиент атмосферы $a(h)$, постоянный для части атмосферы, лежащей над уровнем h и определяемый от высоты h вверх хотя бы по рецепту

$$a(h)\,(\text{град/км}) = (\overline{T(h)} - \overline{T(h+h_0)})/h_0, \tag{9}$$

где $\overline{T(h)}$ есть принятый среднестатистический нелинейный профиль (определяемый, например, методом оптимальной экстраполяции по приземному значению T_0), а

$$h_0 = [H_\gamma(h)\, s([\tau_0 - \tau(h)] \sec\theta)] / \exp\{[\tau_0 - \tau(h)] \sec\theta\} - 1.$$

Здесь (см. ниже)

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{kk!}\, \mathrm{E_i}(x) - \ln x - C,$$

где C — постоянная Эйлера, а $\mathrm{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция, табулированная в [28].

Введение таких средних, но зависящих от h характеристических высот $H_\gamma(h)$ и средних градиентов температуры $a(h)$ для части атмосферы, расположенной над высотой h, позволяет при соблюдении линейного изменения аппроксимирующей температуры и экспоненциального изменения аппроксимирующего коэффициента поглощения над уровнем h (необходимых для выражения корректирующего множителя $K(\nu, \theta, h)$ в замкнутом виде, см. ниже) точнее описать ситуацию для того случая, когда изменение экстраполирующей температуры $\overline{T(h)}$ с высотой сильно отличается от линейного закона (температурная инверсия и пр.).

Из табл. 1, 2 видно, что по крайней мере для высот $h < 8$ *км* (только эти высоты атмосферы и дают реальный вклад в $T_я(\nu, \theta)$ при теплолокации с Земли) для частот 51—54 *ГГц* с точностью лучше 2% и с несколько худшей точностью для остальных частот можно считать, что $m(\nu, h)$ не зависит от высоты h:

$$m(\nu, h) = m_0(\nu). \tag{10}$$

Обозначив

$$\tau = \tau(h) = \int_0^h \overline{\gamma(h)}\,dh, \quad \tau_0 = \int_0^\infty \overline{\gamma(h)}\,dh,$$

с учетом (7)—(10) преобразуем выражение (5) в

$$\delta T_я(\nu, \theta) = \operatorname{sc}\theta \int_0^\infty \overline{\gamma(h)} \exp(-\tau \operatorname{sc}\theta) \Big\{ 1 + \Big(\frac{g m_0(\nu)}{R_в \overline{T(h)}} \frac{(\tau_0 - \tau)}{\overline{\gamma(h)}} -$$

$$- n(\nu, h) \Big) \exp[-(\tau_0 - \tau)\operatorname{sc}\theta] + \frac{a(h) H_\gamma(h)}{\overline{T(h)}} \{1 - \exp[-(\tau_0 - \tau)\operatorname{sc}\theta]\} \times \tag{11}$$

$$\times \Big[\Big(\frac{g m_0(\nu)}{R_в \overline{T(h)}} \frac{(\tau_0 - \tau)}{\overline{\gamma(h)}} - n(\nu, h) \Big) \frac{s([\tau_0 - \tau]\operatorname{sc}\theta)}{\exp[(\tau_0 - \tau)\operatorname{sc}\theta] - 1} -$$

$$- \frac{g m_0(\nu)}{R_в \overline{T(h)}} \frac{1}{\overline{\gamma(h)} \operatorname{sc}\theta} \Big] \Big\} \Delta T(h)\,dh.$$

Чтобы показать, как выполняются с использованием функциональной производной эти вычисления, проведем, например, преобразование входящего в (5) интеграла

$$A = \operatorname{sc}\theta \int_0^\infty \overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)} \exp\Big(\operatorname{sc}\theta \int_0^h \overline{\gamma(h')}\,dh'\Big) \operatorname{sc}\theta \times$$

$$\times \int_0^h \overline{\gamma(h')} m(\nu, h') \Big\{ \int_0^{h'} \frac{g}{R_в \overline{T(h'')}} \frac{\Delta T(h'')}{\overline{T(h'')}} dh'' \Big\} dh'\,dh.$$

С этой целью в исходном выражении для A везде, за исключением слоя h_i, $h_i + \Delta h_i$, будем считать $\Delta T(h) = 0$, а в самом слое h_i, $h_i + \Delta h_i$ примем $\Delta T(h_i) = \Delta T_i$. Переходя к пределу $\Delta T_i \to 0$, $\Delta h_i \to 0$, принимая во внимание, что $h > h' > h_i$, и учитывая (10), будем иметь

$$\lim_{\substack{\Delta T_i \to 0 \\ \Delta h_i \to 0}} \frac{A}{\Delta T_i \Delta h_i} = \lim_{\substack{\Delta T_i \to 0 \\ \Delta h_i \to 0}} \frac{1}{\Delta T_i \Delta h_i} \operatorname{sc}\theta \int_{h_i}^\infty \overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)} \exp\Big[-\operatorname{sc}\theta \times$$

$$\times \int_0^h \overline{\gamma(h')}\,dh' \Big] \operatorname{sc}\theta \int_{h_i}^h \overline{\gamma(h')} m(\nu, h') \frac{g \Delta T_i \Delta h_i}{R_в \overline{T}_i^2} dh'\,dh =$$

$$= \frac{g \operatorname{sc}\theta^2}{R_в \overline{T}_i^2} \int_{h_i}^\infty \overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)} \exp\Big[-\operatorname{sc}\theta \int_0^h \overline{\gamma(h')}\,dh' \Big] m_0(\nu) [\tau(h) - \tau(h_i)]\,dh.$$

Учитывая теперь, что $\Delta T(h)$ отлично от нуля не только в слое h_i, $h_i + \Delta h_i$, имеем

$$A = \frac{g m_0(\nu)}{R_в} \operatorname{sc}\theta^2 \int_0^\infty \frac{\Delta T(h)}{\overline{T(h)}^2} \int_h^\infty \overline{T(h')}\,\overline{\gamma(h')} \exp\Big[-\operatorname{sc}\theta \int_0^{h'} \overline{\gamma(h'')}\,dh'' \Big] \times$$

$$\times \tau(h')\,dh'\,dh - \frac{g m_0(\nu)}{R_в} \operatorname{sc}\theta^2 \int_0^\infty \frac{\Delta T(h)}{\overline{T(h)}^2} \int_h^\infty \overline{T(h')}\,\overline{\gamma(h')} \times$$

$$\times \exp\Big[-\operatorname{sc}\theta \int_0^{h'} \overline{\gamma(h'')}\,dh'' \Big] \tau(h)\,dh'\,dh.$$

Но

$$\operatorname{sc}\theta\int_h^\infty \overline{T(h')}\,\overline{\gamma(h')}\exp\left[-\operatorname{sc}\theta\int_0^{h'}\overline{\gamma(h'')}\,dh''\right]dh' = \left[\overline{T(h)} - a(h)\,H_\gamma(h)\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\frac{s([\tau_0-\tau]\operatorname{sc}\theta)}{\exp[(\tau_0-\tau)\operatorname{sc}\theta]-1}\right\}\right]\left(\exp[-\tau(h)\operatorname{sc}\theta]-\exp[-\tau_0\operatorname{sc}\theta]\right),$$

$$\operatorname{sc}\theta^2\int_h^\infty \overline{T(h')}\,\overline{\gamma(h')}\exp\left(-\operatorname{sc}\theta\int_0^{h'}\overline{\gamma(h'')}\,dh''\right)\times$$

$$\times\,\tau(h')\,dh' = \overline{T(h)}\,[(1+\tau(h)\operatorname{sc}\theta)\,e^{-\tau(h)\operatorname{sc}\theta} - (1+\tau_0\operatorname{sc}\theta)\,e^{-\tau_0\operatorname{sc}\theta}] + \tag{12}$$

$$+\,a(h)\,H_\gamma(h)\,(e^{-\tau(h)\operatorname{sc}\theta}-e^{-\tau_0\operatorname{sc}\theta})\times$$

$$\times\left\{1-(1+\tau_0\operatorname{sc}\theta)\,\frac{s([\tau_0-\tau(h)]\operatorname{sc}\theta)}{\exp[(\tau_0-\tau(h))\operatorname{sc}\theta]-1}\right\}.$$

Первый из этих интегралов может быть получен аналогично тому, как это было сделано в [29]. Второй интеграл получается интегрированием по частям. Разумеется, обе формулы имеют место при

$$\overline{\gamma(h')} = \overline{\gamma(h)}\exp[-(h'-h)/H_\gamma(h)], \quad \overline{T(h')} = \overline{T(h)} - a(h)(h'-h),$$

где при $h' > h$ величины $a(h)$ и $H_\gamma(h)$ постоянны.

Подставляя интегралы (12) в последнее выражение для A, получаем требуемый результат:

$$A = \frac{gm_0(\nu)}{R_\text{в}}\int_0^\infty \overline{\gamma(h)}\exp\left[-\operatorname{sc}\theta\int_0^h\overline{\gamma(h')}\,dh'\right]\frac{1}{\overline{\gamma(h)}}\times$$

$$\times\left\{1-\exp[-(\tau_0-\tau(h))\operatorname{sc}\theta]-\operatorname{sc}\theta\,[\tau_0-\tau(h)]\exp[-(\tau_0-\right.$$

$$-\,\tau(h))\operatorname{sc}\theta] + \frac{a(h)\,H_\gamma(h)}{\overline{T(h)}}\,\{1-\exp[-(\tau_0-\tau(h))\operatorname{sc}\theta]\}\times$$

$$\left.\times\left[\frac{s[(\tau_0-\tau(h)]\operatorname{sc}\theta)}{\exp[(\tau_0-\tau(h))\operatorname{sc}\theta]-1}(\tau(h)\operatorname{sc}\theta-\tau_0\operatorname{sc}\theta-1)+1\right]\right\}\frac{\Delta T(h)}{\overline{T(h)}}\,dh.$$

Принимая во внимание, что $\lim\limits_{x\to\infty} s(x)/(e^x-1) = 0$, легко показать, что из формулы (11) при $\tau_0\operatorname{sc}\theta \gg 1$ получается $\delta T_\text{я}(\nu,\theta) = \Delta T(h)$ для всех высот h, для которых $\tau(h)\operatorname{sc}\theta \ll 1$ (разумеется, при этом полагается, что на этих достаточно малых высотах температура $T(h)$ остается неизменной), как то и должно быть.

Итак, ядро линеаризированного интегрального уравнения (11) отличается от ядра интегрального уравнения (6), получаемого по рецепту «линеаризации» работ [1–15], корректирующим множителем $K(\nu,\theta,h)$:

$$K(\nu,\theta,h) = 1 + \left[\frac{gm_0(\nu)}{R_\text{в}\overline{T(h)}}\frac{(\tau_0-\tau)}{\overline{\gamma(h)}} - n(\nu,h)\right]\exp[-(\tau_0-\tau)\operatorname{sc}\theta] +$$

$$+\frac{a(h)\,H_\gamma(h)}{\overline{T(h)}}\{1-\exp[-(\tau_0-\tau)\operatorname{sc}\theta]\}\left\{\left(\frac{gm_0(\nu)}{R_\text{в}\overline{T(h)}}\frac{(\tau_0-\tau)}{\overline{\gamma(h)}}-\right.\right. \tag{13}$$

$$\left.\left.-\,n(\nu,h)\right)\frac{s([\tau_0-\tau]\operatorname{sc}\theta)}{\exp[(\tau_0-\tau)\operatorname{sc}\theta]-1} - \frac{gm_0(\nu)}{R_\text{в}\overline{T(h)}}\frac{1}{\overline{\gamma(h)}\operatorname{sc}\theta}\right\}.$$

Естественно, что при коэффициенте поглощения $\gamma(\nu, T, p)$, не зависящем от p, T, т. е. при $n(\nu, h) = 0$, $m(\nu, h) = 0$, мы получаем $K(\nu, \theta, h) = 1$.

Первые два члена в (13), т е

$$K(\nu, \theta, h)_{T=T_0} = 1 + \left[\frac{gm_0(\nu)}{R_в \overline{T(h)}} \frac{(\tau_0 - \tau)}{\overline{\gamma(h)}} - n(\nu, h)\right] \exp[-(\tau_0 - \tau)\sec\theta], \tag{14}$$

описывают ситуацию для температурно-однородной атмосферы ($a(h) = 0$). Входящий в (14) множитель $\exp[-(\tau_0 - \tau)\sec\theta]$ при достаточно большом τ_0 сильно приближает величину $K(\nu, \theta, h)_{T=T_0}$ к единице для малых высот h, когда τ мало. Появление этого множителя проще всего пояснить на примере однородного слоя температуры T_0 и оптической толщины τ. В этом случае яркостная температура слоя будет $T_я = T_0(1 - e^{-\tau})$. Если τ испытает приращение $\Delta\tau$, то соответствующее приращение яркостной температуры будет $\Delta T_я = T_0 e^{-\tau}\Delta\tau$, где появление множителя $e^{-\tau}$ аналогично появлению множителя $\exp[-(\tau_0 - \tau)\sec\theta]$ в выражениях (13), (14).

Третий член в выражении (13) описывает поправку к $K(\nu, \theta, h)$ за температурную неоднородность атмосферы.

Следует отметить также, что показатели $n(\nu, h)$ и $m(\nu, h)$ входят в корректирующий множитель $K(\nu, \theta, h)$ в основном в комбинации $g m_0(\nu)(\tau_0 - \tau)/R_в \overline{T(h)}\,\overline{\gamma(h)} - n(\nu, h)$, причем разность эта получается малой Это означает, что вызываемое вариацией профиля температуры изменение профиля давления так влияет на величину $\delta T_я(\nu, \theta)$, что в значительной степени компенсирует непосредственное влияние вариации профиля температуры.

Таблица 5

Корректирующий множитель $K(\nu, \theta, h)$, вычисленный в различных предположениях для частот 52, 53, 53,5 *ГГц* (летняя модель ВСА-60)

$\nu = 52$ *ГГц*

$\sec\theta = 1$

h, *км*	$\overline{\gamma}\, e^{-\tau\sec\theta}$	$e^{-(\tau_0-\tau)\sec\theta}$	$K(\nu, \theta, h)$ $m_0(\nu) = 0$	$K(\nu, \theta, h)$ $\overline{T} = T_0$	$K(\nu, \theta, h)$
0	0,126	0,517	0,122	0,750	0,649
0,5	0,108	0,549	0,084	0,746	0,644
1	0,093	0,580	0,048	0,743	0,639
2	0,070	0,638	—0,005	0,747	0,647
3	0,053	0,690	—0,082	0,722	0,632
4	0,041	0,736	—0,150	0,697	0,629
5	0,032	0,777	—0,194	0,689	0,643
6	0,025	0,812	—0,248	0,666	0,656
8	0,016	0,867	—0,313	0,648	0,731

В табл. 5 помещены значения корректирующего множителя $K(\nu, \theta, h)$, вычисленные в различных предположениях для частот 52; 53; 53,5 *ГГц* в зависимости от высоты h (*км*) и зенитного угла θ для летней модели атмосферы ВСА-60. При этом температурный градиент $a(h)$ определяется по рецепту (9) (с величинами H_γ согласно табл. 4).

В первом столбце этих таблиц указана высота над уровнем Земли h. Во втором столбце содержится фактор $\overline{\gamma(h)}\exp(-\tau\sec\theta)$, позволяющий оценить вклад в яркостную температуру атмосферы ее различных слоев. В третьем столбце содержится фактор $\exp[-(\tau_0 - \tau)\sec\theta]$, характеризующий уменьшение вклада изменения оптической толщины слоя в величину $K(\nu, \theta, h)$ (см. формулы (13), (14)). В четвертом столбце помещен корректирующий множитель $K(\nu, \theta, h)_{m_0(\nu)=0}$, вычисленный по формуле (13) при $m_0(\nu) = 0$, т. е. получающийся в том предположении, что изменение температурного профиля атмосферы $T(h)$ не влечет за собой изменение профиля давления $p(h)$. В пятом столбце помещен корректирующий множитель $K(\nu, \theta, h)_{T=T_0}$ для случая термически однородной атмосферы, определяемый по формуле (14). Наконец, в последнем столбце помещен корректирующий множитель $K(\nu, \theta, h)$, получающийся по формуле (13), как с учетом перестройки профиля давления $p(h)$ при изменении профиля температуры, так и с учетом термической неоднородности атмосферы.

Продолжение табл 5

$\nu = 52 ГГц$

$sc\,\theta = 3$

h, км	$e\,\bar{\gamma}^{-\tau sc\theta}$	$e^{-\tau(\tau_0-\tau)sc}$	$K(\nu, \theta, h)$ $m_0(\nu) = 0$	$K(\nu, \theta, h)$ $\bar{T} = T_0$	$K(\nu, \theta, h)$
0	0,126	0,138	0,709	0,933	0,867
0 5	0,096	0,166	0,661	0,923	0,848
1	0,074	0,195	0,614	0,913	0,832
2	0,046	0,260	0,522	0,897	0,810
3	0,300	0,329	0,416	0,867	0,779
4	0,200	0,399	0,313	0,836	0,757
5	0,014	0,468	0,221	0,813	0,746
6	0,010	0,535	0,128	0,780	0,741
8	0,006	0,652	—0,016	0,735	0,778

$\nu = 53 ГГц$

$sc\,0 = 1$

h, км	$e\,\bar{\gamma}^{-\tau sç\theta}$	$e^{-(\tau_0-\tau)sç\,\theta}$	$K(\nu, \theta, h)$ $m_0(\nu) = 0$	$K(\nu, \theta, h)$ $\bar{T} = T_0$	$K(\nu, 0, h)$
0	0,228	0,285	0,648	0,992	0,929
0,5	0,187	0,318	0,628	1,004	0,941
1	0,154	0,351	0,611	1,020	0,955
2	0,108	0,418	0,595	1,067	1,004
3	0,078	0,483	0,563	1,096	1,038
4	0,058	0,545	0,547	1,136	1,092
5	0,043	0,603	0,557	1,196	1,168
6	0,033	0,656	0,564	1,250	1,249
8	0,020	0,746	0,632	1,395	1,468

$\nu = 53 ГГц$

$sc\,0 = 3$

h, км	$\bar{\gamma}\,e^{-\tau sç\,0}$	$e^{-(\tau_0-\tau)sç\theta}$	$K(\nu, 0, h)$ $m_0(\nu) = 0$	$K(\nu, 0, h)$ $\bar{T} = T_0$	$K(\nu, 0, h)$
0	0,228	0,023	0,945	0,999	0,975
0,5	0,150	0,032	0,932	1,000	0,973
1	0,102	0,043	0,917	1,002	0,972
2	0,050	0,073	0,890	1,012	0,979
3	0,027	0,113	0,856	1,022	0,987
4	0,016	0,162	0,826	1,010	1,010
5	0,010	0,219	0,802	1,071	1 018
6	0,006	0,282	0,781	1,107	1,098
8	0 003	0 115	0 779	1,220	1,258

$\nu = 53{,}5$ *ГГц*

$\mathrm{sc}\,\theta = 1$

h, км	$\bar{\gamma}\, e^{-\tau \mathrm{sc}\,\theta}$	$e^{-(\tau_0-\tau)\mathrm{sc}\,\theta}$	$K(\nu,\ \theta,\ h)$ $m_0(\nu) = 0$	$K(\nu,\ \theta,\ h)$ $\bar{T} = T_0$	$K(\nu,\ \theta,\ h)$
0	0,320	0,157	0,812	1,014	0,971
0,5	0,252	0,183	0,796	1,026	0,980
1	0,201	0,211	0,783	1,040	0,994
2	0,132	0,270	0,771	1,082	1,038
3	0,090	0,333	0,752	1,120	1,080
4	0,064	0,396	0,749	1,173	1,144
5	0,046	0,459	0,768	1,244	1,229
6	0,034	0,519	0,792	1,319	1,325
8	0,020	0,629	0,889	1,510	1,577

$\nu = 53{,}5$ *ГГц*

$\mathrm{sc}\,\theta = 3$

h, км	$\bar{\gamma}\, e^{-\tau \mathrm{sc}\,\theta}$	$e^{-(\tau_0-\tau)\mathrm{sc}\,\theta}$	$K(\nu,\ \theta,\ h)$ $m_0(\nu) = 0$	$K(\nu,\ \theta,\ h)$ $\bar{T} = T_0$	$K(\nu,\ \theta,\ h)$
0	0,320	0,004	0,978	1,000	0,986
0,5	0,185	0,006	0,975	1,001	0,986
1	0,111	0,009	0,969	1,002	0,985
2	0,045	0,020	0,957	1,006	0,988
3	0,020	0,037	0,944	1,013	0,996
4	0,010	0,062	0,933	1,027	1,013
5	0,005	0,097	0,926	1,051	1,045
6	0,003	0,140	0,924	1,086	1,090
8	0,001	0,219	0,949	1,202	1,238

Из табл. 5 видно, что корректирующий множитель $K(\nu,\ \theta,\ h)$ на частотах $\nu < 52{,}5$ *ГГц,* поглощение на которых невелико и соответственно этому уменьшается «обрезающее» действие множителей $\bar{\gamma}\exp(-\tau\,\mathrm{sc}\,\theta)$ и $\exp[-(\tau_0-\tau)\,\mathrm{sc}\theta]$, оказывается существенно меньше единицы. Так, уже при $\nu = 52$ *ГГц* отличие при $\mathrm{sc}\theta = 1$ составляет $\sim 35\%$, а при $\mathrm{sc}\theta = 3 - 15 \div 25\%$. Это означает, что правильная линеаризация приведет при $\nu < 52{,}5$ *ГГц* к существенной поправке в восстанавливаемую величину $\Delta T(h)$ (регуляризированную).

Напротив, при $\nu \gtrsim 53$ *ГГц* корректирующий множитель на высотах $h < 4$ *км* отличается от единицы лишь на несколько процентов, так что восстановление по уравнению (11) приведет в этом случае при $h < 4$ *км* к результатам, практически не отличающимся от результатов восстановления по уравнению (6).

Из сопоставления уравнений (6) и (11) видно, что их отличие состоит в том, что вместо величины $\Delta T(h)$ уравнения (6) в уравнении (11) стоит величина $K(\nu,\ \theta,\ h)\Delta T(h)$. Если бы корректирующий множитель не зависел от $\theta[K(\nu,\ \theta,\ h) \equiv K(\nu,\ h)]$, то отсюда прямо следовало бы, что восстановленная по уравнению (11) (при угломестных измерениях) регуляризированная величина $\Delta_r T(h)$ связана с регуляризированной величиной $\Delta_r T(h)$ уравнения (6) соотношением $\Delta_r T'(h) = \Delta_r T(h)/K(\nu,\ h)$. В случае зависимости корректирующего множителя от угла θ такой связи, разумеется, не будет, но для нижних слоев атмосферы $h < 4$ *км* (и только для них!), дающих преимущественный вклад в величину $\Delta T_я\ (\nu,\ \theta)$, оценка величины $\Delta_r T'(h)$ может быть проведена по соотношению $\Delta_r T'(h) = \Delta_r T(h)/\overline{K(\nu,\ \theta,\ h)}^{\theta}$, где черта сверху с индексом θ означает некоторое усреднение по значениям θ, использованным в угломестных измерениях. Пользуясь для такой оценки табл. 5, получаем, что при $\nu = 52$ *ГГц* правильная линеаризация при $h < 4$ *км* приведет к увеличению (по модулю) регуляризированной величины $\Delta_r T(h)$ на 20—30%, а при $\nu \geqslant 53$ *ГГц* — к увеличению (по модулю) восстановленного значения $\Delta_r T(h)$ (в сравнении со значением, получающимся по уравнению (6)) лишь на 2—4%.

Что касается слоев $h > 4$ *км,* то заметное отличие в них множителя $K(\nu, \theta, h)$ от единицы, по-видимому, говорит за то, что использование при восстановлении уравнения (11) приведет для этих слоев к заметному отличию результатов в сравнении с восстановлением по уравнению (6), однако что-либо более определенное сказать нельзя хотя бы по той причине, что на это отличие существенно повлияет даже и незначительная разница в ядрах уравнений (6) и (11) в нижних слоях $h < 4$ *км* (разумеется, имеется в виду идеальный случай, оговоренный в сноске на стр. 689).

Итак, восстановление высотных температурных профилей следует производить не по уравнению (6), а по уравнению

$$\delta T_я(\nu, \theta) = \sec\theta \int_0^\infty \overline{\gamma(h)} \exp\left[-\sec\theta \int_0^h \overline{\gamma(h')}\, dh'\right] K(\nu, \theta, h)\, \Delta T(h)\, dh,$$

где корректирующий множитель $K(\nu, \theta, h)$ определяется выражением (13). Разумеется, при этом процедура решения соответствующей некорректно-поставленной обратной задачи остается неизменной.

Я благодарен И. А. Раковой за помощь в вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Meeks M. L., Lilley A. E.— J. Geophys. Res, 1963, **68**, № 6, p 1683.
2. Westwater E. R.— Rad. Sci., 1965, **69D**, № 9, p. 1201.
3. Westwater E. R., Strand O. N.— J. Atmosph. Sci., 1968, **25**, № 5, p 750.
4. Staelin D. H.— Proc IEEE, 1969, **57**, № 4, p. 427.
5. Conrath B. J.— J. Atmosph. Sci., 1972, **29**, № 7, p. 1262.
6. Rosenkranz P. W., Barath F. T., Blinn J. C., Johnston E J., Lenoir W. R., Staelin D. H., Waters J. W.— J. Geophys. Res., 1972, **77**, № 30, p. 5833.
7. Snider J. B.— J. Appl. Meteorology, 1972, **11**, № 6, p. 958.
8. Westwater E. R. — Monthly Weather Rev., 1972, **100**, № 1, p. 15.
9. Miner G. F., Thornton D. D., Welch W. J.— J. Geophys. Res., 1972, **77**, № 6, p. 975.
10. Ершов А Т., Наумов А П.— Изв. вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 11, с 1610.
11. Westwater E. R., Snider J B., Carlson A. V.— J. Appl. Meteorology, 1975, **14**, № 4, p. 524.
12. Ершов А. Т, Лебский Ю. В., Наумов А П., Плечков В. М.— Изв. АН СССР Сер. Физика атмосферы и океана, 1975, **11**, № 12, с. 1220.
13. Лебский Ю В., Наумов А П, Плечков В. М., Сизьмина Л К., Троицкий А. В., Штанюк А М.— Изв. вузов — Радиофизика, 1976, **19**, № 1, с 25.
14. Сумин М. И., Троицкий А. В.— Изв АН СССР, Сер Физика атмосферы и океана, 1977, 13, № 10, с 1090.
15. Алешин В. И., Наумов А. П, Плечков В М., Сумин М. И., Троицкий А. В.— Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 2, с. 198.
16. Китай Ш. Д., Сумин М. И, Троицкий А. В.— Изв АН СССР, Сер. Физика атмосферы и океана, 1978, **14**, № 11, с. 1131.
17 Наумов А. П — Изв. АН СССР Сер. Физика атмосферы и океана, 1972, **9**, № 7, с 699
18. Гандин Л. С.— Труды ГГО, 1963, вып 114.
19. Приложение № 2 к временной стандартной атмосфере 1960 г. (ВСА-60), ЦАГИ, 1962.
20 Жевакин С А, Наумов А П.— Изв. вузов — Радиофизика, 1966, **9**, № 3, с. 433.
21 Жевакин С А., Наумов А П.— Радиотехника и электроника, 1965, **10**, № 6, с. 987.

22. Carter C. J., Mitchell R. L, Reber E. E — J. Geophys. Res., 1968, **73**, № 10, p. 3113.
23. Reber E. E.— J. Geophys. Res, 1972, **77**, № 21, p 3831.
24. Аквилонова А Б, Горелик А. Г, Калашников В.В., Крылова М. С, Кутуза Б. Г., Кухарская Н. Ф, Митник Л. М., Пузанов В А., Фролов Ю. А. Тезисы докладов X Всесоюзной конфер. по распространению радиоволн (секция IV) — М: Наука, 1972, с 8
25. Хргиан А. Х. Физика атмосферы — М.: Гостехиздат, 1953, с. 68.
26 Абтаев М Т, Белявский А. В, Тхамоков Б. Х — Труды ВГИ — М· Гидрометеоиздат, 1978, вып. 39, с. 130
27. Татарский В. И Распространение волн в турбулентной атмосфере — М: Наука, 1967.
28. Таблицы интегральной показательной функции.— М.: АН СССР, 1954
29. Кисляков А. Г — Изв вузов — Радиофизика, 1961, **4**, № 3, с. 433

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
28 марта 1980 г.

LINEARICATION OF THE BASIC INTEGRAL EQUATION IN REMOTE SENSING RESTORATION OF THE ATMOSPHERE TEMPERATURE PROFILES I

S. A. Zhevakin

By an apparatus of functional derivatives the basic integral equation is linearized for remote sensing restoration of the atmosphere temperature profiles from the Earth surface. This equation differes from the ordinary one by a correcting multiplyer. Due to this restoration the value $\Delta_r T(h) = T_r(h) - \overline{T(h)}$, where $T_r(h)$ is the restorated regularized height temperature profile of the atmosphere, $\overline{T(h)}$ is a certain average statistical profile at restoration frequencies $\nu \sim 52 5$ GHz, exceeding $1.2 \div 1.5$ times the value $\Delta_r T(h)$ obtained by the former method of «linearization»; at frequencies $\nu \gtrsim 53$ GHz for heights $h = 0 \div 3$ km the correction increases $\Delta_r T(h)$ (over the modulus) only by $2 \div 4\%$. It is stated that an error in definition of the restorated value $\Delta_r T(h)$ associated with linearization does not exceed 15% for $\Delta T(h) < 20°$; for $h < 5$ km and $\Delta T(h) < 10°$ it decreases um to 3%.