

УДК 534.232

О ЗВУКОВОМ ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА

В. А. Красильников, В. И. Павлов

Рассматриваются акустические явления, возникающие в результате теплового механизма возбуждения звука в том случае, когда источник движется по произвольной траектории. Предполагается, что при разогреве среды оптическим пучком ее фазовое состояние не изменяется. Рассмотрение проводится в рамках линейного приближения по отклонениям акустических величин от своих равновесных значений. Получены выражения для звукового давления как в ближней, так и в дальней волновой зонах. Учтены эффекты, связанные с «включением» и «выключением» источника. Для периодического движения получены выражения для интенсивности излучения, справедливые как для дозвукового, так и для сверхзвукового режимов движения. Проанализированы эффекты, связанные с равномерным и равноускоренным движением источника.

В электродинамике проблема излучения электромагнитных волн произвольно движущимся постоянным зарядом изучена достаточно подробно (см., например, [1] и более подробно [2]).

Интерес к акустической задаче о звуковом поле, создаваемом движущимся источником, возникший уже достаточно давно (см., например, [3]), возобновился в настоящее время в связи с открывшейся возможностью генерации звука путем использования термоакустического эффекта, когда при сканировании световым пучком по границе двух сред нетрудно получить как дозвуковые, так и сверхзвуковые скорости источника звука [4, 5]. Такие движущиеся источники звука можно реализовать также, осуществляя в среде бегущий световой фокус [6, 7]. Анализу акустических эффектов при равномерном сверхзвуковом движении источника звука посвящен ряд работ (см., например, [8, 9]).

Различные аспекты задачи о возбуждении звука движущимся тепловым источником обсуждались в работах [10–12].

В настоящей работе мы рассмотрим акустические явления, обусловленные в основном неравномерным движением источника. Будут получены выражения для звукового давления, созданного источником, движущимся с ускорением, а также проанализированы эффекты, связанные с возможным периодическим движением источника. Получены выражения для интенсивности излучения в этом случае.

При рассмотрении указанных задач важен методический аспект проблемы, пренебрежение которым, как отмечал Гинзбург [2], иногда «мстит» за себя. Вместе с тем, при решении акустических задач методом запаздывающих потенциалов нельзя, как оказывается, переносить соответствующие формулы электродинамики в силу специфических особенностей таких задач, и их приходится решать заново.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением акустических эффектов, возникающих в процессе возбуждения звука под действием теплового механизма. Обобщение полученных результатов на стрикционный механизм возбуждения достаточно тривиально. Будем предполагать, что при разогреве среды оптическим пучком изменения ее фазового состояния не происходит. Рассмотрение будем проводить в рамках линейного приближения по отклонениям акустических величин от своих равновесных значений. Эти два предположения ограничивают интенсив-

ность вводимого в среду оптического излучения. Будем также считать, если это не оговорено особо, что источник движется с дозвуковой, хотя сколь угодно близкой к скорости звука, скоростью. В этом случае наблюдаемые эффекты маскироваться черенковским излучением не будут.

Если источник движется со сверхзвуковой скоростью, то все результаты, полученные в работе, остаются в силе (с небольшими изменениями), только в выражении для давления (10) появляется дополнительное слагаемое, соответствующее открытому теперь черенковскому каналу излучения.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем полагать, что при вводе в среду некоторого количества тепла, мы можем пренебречь теплопроводностью и процессами, ответственными за диссиацию энергии в звуковой волне. Будем также предполагать, что отклонения акустических величин от своих равновесных значений достаточно малы, чтобы можно было ограничиться линейным приближением. Имея эти предположения в виду, запишем систему интересующих нас уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho c_V \dot{T}' &\approx Q(x, t), \\ \dot{v} &\approx -(1/\rho) \nabla p', \\ \dot{\rho}' &\approx -\rho \operatorname{div} v, \\ p' &\approx c^2 \rho' + \rho c^2 \beta T'. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь приняты следующие обозначения: ρ — плотность, v — колебательная скорость, c_V — теплоемкость единицы объема, T — температура, $Q(x, t)$ — интенсивность ввода тепла в единицу объема среды, p — давление, c — скорость звука, β — коэффициент теплового расширения. Точки над переменными означают частную производную по времени, штрихи — отклонения от равновесных значений.

Ограничимся рассмотрением только потенциальных движений среды, когда колебательная скорость v однозначно определяется потенциалом скоростей: $v = \nabla \varphi$. В этом случае система уравнений (1) может быть представлена в эквивалентной форме

$$\ddot{\varphi} - c^2 \Delta \varphi = -(\beta c^2 / c_V) Q(x, t), \quad (2)$$

причем

$$\begin{aligned} \rho' &= -(\rho / c^2) \dot{\varphi} - (\beta / c_V) \int_0^t dt' Q(x, t'), \\ p' &= -\rho \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь мы предположим, что тепловой источник $Q(x, t)$ включен в момент времени $t = 0$ и при $t < 0$ $Q(x, t) = 0$.

Соотношения (3) позволяют найти распределения давления и плотности как вне, так и внутри области, где происходит интенсивное выделение тепла.

2. ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ИСТОЧНИКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ С ДОЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Решение уравнения (2), соответствующее излучению, распространяющемуся от источника, выражается, как известно, следующим образом:

$$\varphi(x, t) = -\frac{\beta}{4\pi c_V} \int d\mathbf{x}_1 \frac{Q[\mathbf{x}_1, t - (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| / c)]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|}. \quad (4)$$

Однако для последующего анализа акустического поля, создаваемого движущимся с произвольной дозвуковой скоростью тепловым источником, удобно представить (4) в несколько иной форме, предварительно конкретизировав вид величины $Q(x, t)$.

Пусть источник действует в течение промежутка времени длительностью τ , причем его интенсивность — переменная во времени величина — характеризуется функцией $f(t)$. Представим теперь Q в следующем виде:

$$Q(x, t) = U_0 f(t) \theta(t) \theta(\tau - t) q(x - x_0(t)). \quad (5)$$

Здесь $\theta(z)$ — ступенчатая функция Хевисайда, равная нулю при $z < 0$. Функция $q(x)$ описывает пространственное распределение теплового источника, причем максимальное значение $q(x)$ реализуется в точке $x = 0$. Радиус-вектор $x_0(t)$ характеризует положение источника в момент времени t . Функцию $q(x)$ нормируем согласно условию $\int dx q(x) = 1$. Тогда $U_0 f(t)$ имеет смысл мгновенной интенсивности теплового источника. Удобно также считать функцию $f(t)$ безразмерной функцией.

Используя определение δ -функции, можно переписать (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varphi}}(x, t) = & -\frac{\beta U_0}{4\pi c_V} \int dx_1 dt_1 \frac{f(t_1) \theta(t_1) \theta(\tau - t_1)}{|x - x_1|} q(x - x_0(t_1)) \times \\ & \times \delta\left(t_1 - t + \frac{|x - x_1|}{c}\right) = -\frac{\beta U_0}{4\pi c_V} \int dx_2 dx_1 dt_1 \times \\ & \times \frac{f(t_1) Q(t) Q(\tau - t_1)}{|x - x_1|} q(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_0(t_1)) \delta\left(t_1 - t + \frac{|x - x_1|}{c}\right). \end{aligned}$$

Вводя обозначение $x' = x_1 - x_2$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & -\frac{\beta U_0}{4\pi c_V} \int d x' q(x') \int dt_1 \frac{f(t_1) \theta(t_1) \theta(\tau - t_1)}{|x - x_0(t_1) - x'|} \times \\ & \times \delta\left(t_1 - t + \frac{|x - x_0(t_1) - x'|}{c}\right). \end{aligned}$$

Наконец, воспользовавшись известным свойством δ -функции, $\delta(F(t)) = |\dot{F}(t)|^{-1} \delta(t - t')$, где $F(t') = 0$, и интегрируя по времени, получаем

$$\varphi(x, t) =$$

$$= -\frac{\beta U_0}{4\pi c_V} \int dx' q(x') \frac{f(t') \theta(t') \theta(\tau - t')}{|x - x_0(t') - x'| |1 - n(t') v(t') / c|}, \quad (6)$$

причем время t' находится из уравнения

$$t' - t + |x - x_0(t') - x'| / c = 0. \quad (7)$$

В формуле (6) приняты следующие обозначения:

$$n(t') = \frac{x - x_0(t') - x'}{|x - x_0(t') - x'|}, \quad v(t') = \frac{\partial x_0(t')}{\partial t'}. \quad (8)$$

Наблюдаемыми величинами являются в акустике, как известно, вариации давления $p' \sim \varphi$ или колебательная скорость $v = \nabla \varphi$. Следует поэтому вычислять, например, производную потенциала по време-

ни t . Но полученное выражение (6) дает потенциал как функцию от t' и лишь через соотношение (7) — как неявную функцию от x, t . Поэтому предварительно следует вычислить производную dt'/dt . Проводя вычисления аналогично [1], стр. 212, можно показать, что

$$dt'/dt = 1/(1 - n(t') \mathbf{v}(t')/c) \equiv D(t'). \quad (9)$$

Различие между интервалами dt' и dt есть не что иное, как следствие эффекта Доплера — волновой пакет излучения, испущенного за время dt' , будет иметь продолжительность dt .

Наконец, дифференцируя (6) по времени и используя (9), получим для акустического давления, обусловленного движущимся с звуковой скоростью тепловым источником, следующее довольно громоздкое выражение:

$$\begin{aligned} p'(\mathbf{x}, t) = & \frac{\rho \beta U_0}{4\pi c_V} \int d\mathbf{x}' \frac{q(\mathbf{x}')}{R(\mathbf{x}', t')} \left\{ D^2(t') f(t') [\delta(t') - \delta(t' - \tau)] + \right. \\ & + \theta(t') \theta(\tau - t') \left[D^2(t') \dot{f}(t') + D^3(t') f(t') \frac{n(t') \mathbf{v}(t')}{c} \right] + \\ & \left. + \frac{f(t') \theta(t') \theta(\tau - t')}{R(\mathbf{x}', t')} D^3(t') \left[n(t') \mathbf{v}(t') - \frac{\mathbf{v}^2(t')}{c} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\dot{\mathbf{v}}(t') = \partial \mathbf{v}(t')/\partial t'$, $\dot{f}(t') = \partial f(t')/\partial t'$, $R(\mathbf{x}', t') = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t') - \mathbf{x}'|$.

Подчеркнем еще раз, что все величины в правой части соотношения (10) берутся в момент времени t' , удовлетворяющий уравнению (7) и принадлежащий интервалу $[0, \tau]$.

Полученное выражение (10), в принципе, решает поставленную задачу о звуковом давлении, создаваемом движущимся тепловым источником. Формула (10) справедлива на любых расстояниях от источника. Она может быть использована, например, для анализа структуры движущихся фокусов [9]. Именно выражение (10) следует использовать при учете граничных условий, например, при движении теплового источника вблизи свободной поверхности жидкости.

3. ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ВДАЛИ ОТ ИСТОЧНИКА

Рассмотрим теперь поле, создаваемое движущимся источником на расстояниях, больших по сравнению как с его размерами, так и с характерной протяженностью траектории, по которой он движется. В этом случае имеем приближенно

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}', t') & \approx |\mathbf{x}| - n(\mathbf{x}_0(t') + \mathbf{x}'), \\ n(t') & \approx n - (1/|\mathbf{x}|) [\mathbf{x}_0(t') + \mathbf{x}' - n(\mathbf{x}_0(t') \mathbf{n} + \mathbf{x}' \mathbf{n})]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ — единичный вектор в направлении вектора \mathbf{x} . Подставим выражения (11) в (10). В знаменателе подынтегрального выражения (10) можно приближенно записать $R(\mathbf{x}', t') \approx |\mathbf{x}|$. Что касается аргумента t' , то в рассматриваемом приближении он определяется из уравнения

$$t' - \frac{n\mathbf{x}_0(t')}{c} \approx t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} + \frac{n\mathbf{x}'}{c}. \quad (12)$$

Пренебречь величиной $n\mathbf{x}'/c$ в (12), вообще говоря, нельзя. Возможность такого пренебрежения определяется не столько малостью $n\mathbf{x}'$ по сравнению с $|\mathbf{x}|$, сколько тем, насколько изменяются функции $f(t')$, $\mathbf{v}(t')$ за время $n\mathbf{x}'/c$.

Если мы также будем считать, что

$$|\mathbf{x}| \gg D(t') \left| \frac{\mathbf{v}(t')}{c} (\mathbf{x}_0(t') + \mathbf{x}' - \mathbf{n}(\mathbf{x}_0(t') \mathbf{n}) - \mathbf{n}(\mathbf{x}' \mathbf{n})) \right|, \quad (13)$$

то, оставляя лишь наиболее медленно убывающее с расстоянием слагаемое, на больших расстояниях от источника получаем для давления p' следующее выражение:

$$\begin{aligned} p' \approx & \frac{\rho \beta U_0}{4\pi c_V |\mathbf{x}|} \int d\mathbf{x}' q(\mathbf{x}') \left\{ D^2(t') f(t') [\delta(t') - \delta(\tau - t')] + \right. \\ & \left. + \theta(t') \theta(\tau - t') \left[D^2(t') \dot{f}(t') + D^3(t') f(t') \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t')}{c} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

По существу, выражение (14) описывает поле, «оторвавшееся» от источника и распространяющееся свободно. Поскольку p' обратно пропорционально $|\mathbf{x}|$, то можно показать, что количество энергии, излученной в некоторый элемент телесного угла (при $t' = \text{const}$), не зависит от расстояния $|\mathbf{x}|$. Это означает, что излученная источником энергия распространяется в пространстве, не накапливаясь нигде и не исчезая [1, 2].

Из (14) видно также, что причины этого излучения могут быть различными. Излучение возникает, во-первых, в моменты включения и выключения источника, а также при изменении со временем интенсивности поглощения оптического излучения в среде. Излучение звука возникает также и при изменении скорости движения источника, когда источник как бы «стрихивает» с себя часть поля.

В частном случае неподвижного источника, находящегося вблизи начала координат, из (12) следует

$$t' = t - |\mathbf{x}|/c + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c.$$

Подставляя это выражение в (14), получаем для давления p' следующую формулу:

$$\begin{aligned} p' \approx & \frac{\rho \beta U_0}{4\pi c_V |\mathbf{x}|} \int d\mathbf{x}' q(\mathbf{x}') \left\{ f \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) \left[\delta \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \delta \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} - \tau \right) \right] + \theta \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) \theta \left(\tau - t + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{|\mathbf{x}|}{c} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) \dot{f} \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если, например, функция $\dot{f}(t')$ изменяется по гармоническому закону с частотой ω , а характерные размеры области локализации источника порядка a , то из (15) следует непосредственно, что излучение звука будет наиболее эффективно, если размеры источника сравнимы с длиной излучаемых волн: $a \sim c/\omega$ [5].

4. ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Пусть ω^{-1} означает порядок характерного времени, в течение которого величины $f(t')$, $v(t')$ в (14) меняются существенным образом. Если по-прежнему считать, что размеры источника порядка a , то $\mathbf{x}' \mathbf{n}/c \sim a/c$. Следовательно, временем $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c$ в аргументах интегрируемых выражений (14) можно пренебречь, если за это время подынтегральные выражения не успевают существенно изменяться. Условие

$a/c \ll \omega^{-1}$ означает, что размеры источника должны быть малы по сравнению с длиной излучаемых волн. В этом смысле источник можно рассматривать как точечный, и, положив $q(\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}')$, на расстояниях $|\mathbf{x}'|$, удовлетворяющих условию $a \ll c/\omega \ll |\mathbf{x}'|$, имеем следующее выражение для давления:

$$p' \approx \frac{\rho \beta U_0}{4\pi c_V |\mathbf{x}|} \left\{ D^2(t') f(t') [\delta(t') - \delta(\tau - t')] + \right. \\ \left. + \theta(t') \theta(\tau - t') \left[D^2(t') \dot{f}(t') + D^3(t') f(t') \frac{n\dot{v}(t')}{c} \right] \right\}, \quad (16)$$

где t' находится из уравнения

$$t' - \frac{n\mathbf{x}_0(t')}{c} \approx t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}. \quad (17)$$

Для того, чтобы выявить некоторые особенности, возникающие при излучении звука движущимся источником, рассмотрим два частных случая движения теплового источника, которые допускают аналитическое решение уравнения (17).

1. Пусть траектория движения источника задается уравнением $\mathbf{x}_0(t') = \mathbf{v} t'$, $|\mathbf{v}| < c$. В этом случае из (17) следует

$$t' = \frac{t - |\mathbf{x}|/c}{1 - n\mathbf{v}/c} \equiv D \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} \right). \quad (18)$$

Замечая, что $\theta(\alpha t') = \theta(t')$, $\delta(\alpha t') = (1/\alpha)\delta(t')$, если $\alpha > 0$, выражение (16) можно переписать следующим образом:

$$p' \approx \frac{\rho_0 \beta U_0}{4\pi c_V |\mathbf{x}|} \left\{ D f(t') \left[\delta \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} \right) - \delta \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} - \frac{\tau}{D} \right) \right] + \right. \\ \left. + D^2 \theta \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} \right) \theta \left(\frac{\tau}{D} - t + \frac{|\mathbf{x}|}{c} \right) f(t') \right\} \Big|_{t'=D(t-|\mathbf{x}|/c)}. \quad (19)$$

Выражение (19) показывает, что длительность принимаемого звукового импульса $\tau_{(a)}$ связана с длительностью излучаемого «цига» τ соотношением $\tau_{(a)} = \tau/D$, как это и должно быть (см. [2], стр. 43). Различие между $\tau_{(a)}$ и τ есть, как это уже отмечалось выше, просто следствие эффекта Доплера — волновой пакет, испущенный за время τ , имеет длительность $\tau_{(a)} < \tau$, если $n\mathbf{v} > 0$. В том случае, когда этот пакет имеет заполнение с частотой ω , в месте приема будет восприниматься частота $\omega_{(a)} = D\omega$, амплитуда в направлении движения источника возрастает, в противоположном — падает по сравнению со случаем неподвижного источника. При $v \sim c$ амплитуда звука резко увеличивается, а сужение звукового пакета свидетельствует об уширении его спектра. Так, при увеличении скорости v от $0,1 v/c = 0,1 \text{ м}$ до $0,5 \text{ м}$ длительность излучаемого импульса, согласно приведенным формулам, уменьшается, если подставить значения величин, соответствующие эксперименту [7] в выражении для dt , в 1,8 раза (эксперимент, согласно [7], дает 2), амплитуда же давления, согласно формуле (5), возрастает в 3,2 раза (эксперимент дает 2,5). Такое согласие с экспериментом, с учетом того, что задача решается без учета диссипации, можно считать удовлетворительным.

Следует иметь в виду, что (18) есть решение приближенного уравнения (17), при выводе которого некоторые эффекты могли быть утеряны. Поэтому рассмотрим решение точного уравнения

$$t' - t + (1/c) |x - x_0(t')| = 0$$

для источника, движущегося равномерно. Это уравнение может быть приведено к квадратному, решая которое, получаем

$$t_{1,2} = D \left\{ t - \frac{xv}{c} \pm \sqrt{\left(t - \frac{xv}{c} \right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(t^2 - \frac{x^2}{c^2} \right)} \right\}.$$

Предполагая, что $|v| \tau \ll |x|$, для решения, отвечающего запаздывающим потенциалам, находим следующее приближенное выражение:

$$\begin{aligned} t' \approx & \frac{1}{1-v^2/c^2} \left(1 + \frac{nv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2 + (nv/c)^2}} \right) \left(t - \frac{|x|}{c} \times \right. \\ & \left. \times \sqrt{1-v^2/c^2 + (nv/c)^2} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

В том случае, когда можно пренебречь величинами, квадратичными по скорости движения источника, запишем

$$t' \approx \left(1 + \frac{nv}{c} \right) \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \approx \frac{t - |x|/c}{1 - nv/c} = D \left(t - \frac{|x|}{c} \right).$$

Отметим, что в месте приема при условии $n||v$ по-прежнему будет восприниматься частота $\omega_{(a)} \approx D\omega$, но при $n \perp v$ из (20) уже имеем $\omega_{(a)} \approx \omega/(1-v^2/c^2)$.

2. Рассмотрим теперь другой интересный случай, когда источник движется по траектории, описываемой уравнением

$$x_0(t') = vt' + (1/2)a(t')^2 \quad (v, a = \text{const}). \quad (21)$$

Здесь начальная скорость v и ускорение a — постоянные величины. По-прежнему будем предполагать, что мгновенная скорость источника не превосходит скорости звука. Решая уравнение (17), куда следует подставить (21), а именно

$$-\frac{1}{2} \frac{t'^2}{\tau_*} + t' - D \left(t - \frac{|x|}{c} \right) = 0, \quad (22)$$

где $\tau_* = c/(na)D$, находим, что поведение решения существенно зависит от знака величины na . Поскольку, в силу ограниченности действия источника, величина t' должна принадлежать области $0 \leq t' \leq \tau$, где τ — длительность действия источника, то при $an < 0$ рассматриваемое уравнение имеет один корень

$$t'_1 = -|\tau_*| \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{2D}{|\tau_*|} \left(t - \frac{|x|}{c} \right)} \right\}. \quad (23)$$

Если же $an > 0$, то реализуются несколько возможностей, определяемых соотношением между длительностью действия источника τ и характерным времененным масштабом τ_* . Эти возможности легко выявляются из графического рассмотрения зависимости величины $D(t - |x|/c)$ от t' (рис. 1). В случае, если $\tau \leq \tau_*$, имеем корень

$$t'_1 = \tau_* \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2D}{\tau_*} \left(t - \frac{|x|}{c} \right)} \right]. \quad (24)$$

причем здесь величина $D(t - |x|/c)$ изменяется в пределах от нуля до $\tau(1 - \tau/2\tau_*)$.

Если выполняется условие $\tau_* \leq \tau \leq 2\tau_*$, то в интервале $0 < D(t - |x|/c) < \tau(1 - \tau/2\tau_*)$ имеем один корень (24), а при условии $\tau(1 - \tau/2\tau_*) < D(t - |x|/c) < \tau_*/2$ — два корня: t'_1 и $t'_2 = 2\tau_* - t'_1$. Наконец, если $\tau > 2\tau_*$, два корня t'_1 и t'_2 реализуются в области $0 < D(t - |x|/c) < \tau_*/2$ и один корень t'_2 — в области $\tau(1 - \tau/2\tau_*) < D(t - |x|/c) < 0$.

Для того, чтобы конкретизировать ситуацию, рассмотрим следующий частный случай. Пусть в момент времени $t' = 0$ в среде возникает тепловой источник постоянной интенсивности $f(t') = 1$, движущийся с начальной скоростью v в направлении, противоположном направлению ускорения a . Предположим, что величина ускорения, начальная скорость источника и длительность его действия связаны соотношением $\tau = 2v/a$. В этом случае, очевидно, источник, двигаясь равнозамедленно, в момент $t' = \tau$ возвращается в исходную точку.

В определенном смысле предлагаемый пример является модельным для анализа акустических явлений, возникающих при неравномерном движении световых фокусов [6, 7].

Воспользуемся выражением (16), из которого следует, что в точке наблюдения, кроме импульсов давления, связанных с включением и выключением источника, будет наблюдаться звуковой импульс, обусловленный ускоренным движением источника. В принятых обозначениях мы получим

$$p' \approx \frac{\rho \beta U_0}{4\pi c_V |x|} \left\{ D^2 \delta(t') - \frac{\delta(t' - \tau)}{(1 + n\vartheta/c)^2} + D^2 \theta(t') \theta(\tau - t') \frac{\tau_*^2}{(\tau_* - t')^3} \right\}. \quad (25)$$

Можно показать, что в рассматриваемой постановке задачи при $an > 0$ имеем $\tau \leq \tau_*$. Это означает, что существует лишь решение (24) уравнения (22), которое может быть использовано как для $an > 0$, так и для $an < 0$.

Если $v \sim c$, то основная доля энергии, обусловленная ускорением, излучается в направлении начальной скорости v в силу фактора D^2 . Источник тормозится и как бы «стягивает» с себя часть поля.

Длительность воспринимаемого звукового импульса определяется выражением

$$\tau_{(a)} = \tau/D(1 - \tau/2\tau_*), \quad (26)$$

откуда видно, каким образом влияет ускорение на длительность акустического сигнала.

5. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКА

Рассмотрим излучение звука, сопровождающее круговое движение источника* и являющееся в некотором смысле аналогом синхротронного излучения в электродинамике [1, 2]. Мы учтем как протяженность рассматриваемого источника, так и возможность его движения со сверхзвуковой скоростью. Эти аспекты аналогов в электродинамике не имеют.

Пусть рассматриваемый тепловой источник движется в плоскости xy по окружности радиуса b с угловой скоростью ω . Выберем сферическую систему координат, как это показано на рис. 2. В этой системе координат величину $n\mathbf{x}_0(t'')$, где n — единичный вектор в направлении удаленной точки наблюдения P , а $\mathbf{x}_0(t'')$ описывает траекторию движения источника, можно представить в виде

* Огметим здесь, что различные акустические эффекты, имеющие место при прямолинейном движении источника с ускорением, которое периодически зависит от времени, рассматривались в работах [16, 17].

$$nx_0(t'') = b \cos \omega t'' \sin \theta \cos \varphi + b' \sin \omega t'' \sin \theta \sin \varphi = \\ = b \sin \theta \cos(\omega t'' - \varphi) = b \sin \theta \sin \eta.$$

Здесь мы ввели новую переменную $\eta = \omega t'' - \varphi + \pi/2$.

Ограничимся рассмотрением установившегося режима и не будем учитывать эффекты, связанные с включением и выключением источни-

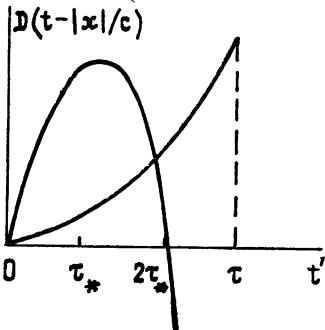


Рис. 1.

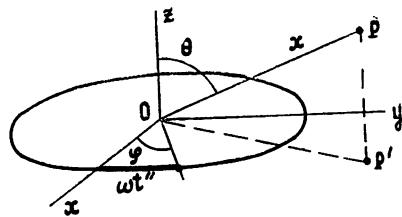


Рис. 2.

ка, зависимостью от времени его мощности и т. п. В этом случае для значения потенциала, производимого протяженным источником, в волновой зоне мы имеем следующее выражение, легко получаемое из (6):

$$\varphi(x, t) \approx \\ \approx -\frac{\beta U_0}{4\pi c_V |x|} \int dt'' dx'' q(x'') \delta \left(t'' - t + \frac{|x|}{c} - \frac{nx_0(t'')}{c} - \frac{nx''}{c} \right). \quad (27)$$

Принимая во внимание периодичность движения источника, выражение (27) удобно преобразовать не к выражению, аналогичному потенциалам Лиенара — Вихерта, которое более подходит для рассмотрения непериодических движений, а непосредственно учесть периодичность движения источника.

Поскольку период кругового движения источника есть $T = 2\pi/\omega$, дельта-функцию в (27) удобно представить в виде

$$\delta(z) = \frac{\omega}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\omega z}.$$

При этом интегрирование по переменной η осуществляется в пределах от $-\pi$ до $+\pi$. В этом случае для потенциала скоростей $\varphi(x, t)$ получаем выражение

$$\varphi(x, t) \approx -\frac{\beta U_0}{4\pi c_V |x|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left[-im\omega \left(t - \frac{|x|}{c} \right) - im\varphi + im\frac{\pi}{2} \right] \times \\ \times J_m(m\gamma \sin \theta) \int dx'' q(x'') \exp \left(-i \frac{nx''}{c} m\omega \right) = \\ = -\frac{\beta U_0}{4\pi c_V |x|} \sum_{m=1}^{\infty} J_m(m\gamma \sin \theta) |q_m| \times \\ \times \cos \left[m\omega \left(t - \frac{|x|}{c} \right) + m\varphi - m\frac{\pi}{2} - \arg q_m \right].$$

Здесь $J_m(mz) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\eta \exp im(\eta - z \sin \eta)$ — функция Бесселя порядка m , формфактор q_m определяется соотношением $|q_m| \exp(i \arg q_m) = \int dx'' q(x'') \exp[-i(nx''/c)t\omega]$, величина $\gamma = \omega a/c$ характеризует отношение линейной скорости движения источника по окружности к скорости звука c .

Наконец, дифференцируя полученное выражение по времени t , находим выражение для давления в волновой зоне:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= -\rho \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \\ &= -\frac{\rho \beta U_0 \omega}{2\pi c_V |x|} \sum_{m=1}^{\infty} m J_m(m\gamma \sin \theta) |q_m| \sin \left[m\omega \left(t - \frac{|x|}{c} \right) + m\varphi - m \frac{\pi}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \arg q_m \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

В случае точечного источника, когда $q(x'') = \delta(x'')$, формфактор q_m равен единице.

Вычислим теперь интенсивность излучения. Поскольку поток энергии определяется вектором Умова — Пойнтинга S , интенсивность излучения в элемент телесного угла $d\sigma = \sin \theta d\theta d\varphi$ определяется как количество энергии, протекающей через элемент $d\sum = |\mathbf{x}|^2 d\sigma$ шаровой поверхности с центром в начале координат. В рассматриваемом случае, на больших расстояниях от источника, в малых элементах объема волна может считаться плоской и поэтому $S = cW\mathbf{n}$, где W — плотность энергии звукового поля, равная в рассматриваемом приближении величине $W = 2p'^2/2\rho c^2$. Таким образом, усредненная за период $T = 2\pi/\omega$ энергия, прошедшая через элемент поверхности в единицу времени, дается выражением

$$\begin{aligned} dI &= c \frac{p'^2}{\rho c^2} |\mathbf{x}|^2 d\sigma = \\ &= \frac{\beta^2 U_0^2 \omega^2}{8\pi^2 c_V^2 \rho c} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 J_m^2(m\gamma \sin \theta) |q_m|^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (29)$$

Для дальнейшего анализа необходимо сделать некоторые предположения относительно распределения источника. Наиболее прост случай сферически-симметричного распределения величины $q(\mathbf{x})$. Приведем для справок следующие сферически симметричные распределения источника:

1) гауссово —

$$q(\mathbf{x}) = (\pi^{3/2} a^3)^{-1} \exp(-x^2/a^2), \quad q_m = \exp\left(-\frac{m^2 \omega^2 a^2}{4c^2}\right),$$

2) экспоненциальное —

$$q(\mathbf{x}) = (8\pi b^3)^{-1} \exp(-x/a), \quad q_m = (1 + m^2 \omega^2 a^2/c^2)^{-2},$$

3) модифицированное экспоненциальное —

$$q(\mathbf{x}) = (32\pi b^3)^{-1} (1 + x/a) \exp(-x/a), \quad q_m = (1 + m^2 \omega^2 a^2/c^2)^{-3},$$

4) степенное —

$$q(\mathbf{x}) = (a/\pi^2)(x^2 + a^2)^{-2}, \quad q_m = \exp(-m \omega a/c).$$

Приведенные выражения показывают, что интенсивность m -й гармоники в случае выполнения неравенства $m > c/a \omega$ достаточно быстро убывает с ростом номера гармоники. Тем самым обеспечивается сходимость ряда (29) по m , и интенсивность излучения оказывается конечной величиной. То же самое утверждение окажется справедливым и для случая анизотропного распределения интенсивности источника, когда вклад энергии в среду различен в различных направлениях.

Рассмотрим теперь распределение интенсивности излучения при больших значениях номеров гармоник $m \gg 1$ в наиболее энергонесущей части спектра, т. е. при $m \ll c/a \omega$.

Будем предполагать, что параметр $z = (v/c)\sin \theta$ близок к единице. Мы можем тогда воспользоваться асимптотическими разложениями функции Бесселя (см. [14], стр. 187) и получить при $m \gg 1$ следующее выражение:

$$J_m(mz) \approx (2/m)^{1/3} (\pm 1)^{1/4} \text{Ai}[(m/2)^{2/3}(1 - z^2)]. \quad (30)$$

В этом выражении берется знак плюс, если $z^2 < 1$, и минус, если $z^2 > 1$. Хотя функция Эйри $\text{Ai}(\xi)$ и протабулирована, приведем ее асимптотические разложения при малых и больших значениях аргумента ([14], стр. 264, 266):

$$\text{Ai}[(m/2)^{2/3}(1 - z^2)] \approx \text{Ai}(0) + \text{Ai}'(0)(m/2)^{2/3}(1 - z^2), \quad (31)$$

если $m \ll |1 - z^2|^{-3/2}$. Здесь $\text{Ai}(0) \approx 0,36$, $\text{Ai}'(0) \approx 0,26$. При $m \gg |1 - z^2|^{-3/2}$ мы можем записать в случае $z^2 < 1$

$$\text{Ai}[(m/2)^{2/3}(1 - z^2)] \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\exp[-m/3(1 - z^2)^{3/2}]}{(m/2)^{1/6}(1 - z^2)^{1/4}} \quad (32)$$

и в случае $z^2 > 1$ —

$$\text{Ai}[(m/2)^{2/3}(1 - z^2)] \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(\pi/4 + m/3(z^2 - 1)^{3/2})}{(m/2)^{1/6}(z^2 - 1)^{1/4}}. \quad (33)$$

Подставляя полученные выражения в (29), мы видим, что в направлении, которое определяется условием $z = (v/c)\sin \theta \sim 1$ при $m \ll |1 - z^2|^{-3/2}$, интенсивность m -й гармоники I_m пропорциональна номеру гармоники в степени 4/3. Для сравнения отметим, что в электродинамике интенсивность m -й гармоники синхротронного излучения ультраквантового электрона пропорциональна номеру гармоники в степени одна треть [1]. Если $m \gg |1 - z^2|^{-3/2}$, то при $z^2 < 1$ интенсивность I_m падает по экспоненциальному закону, а при $z^2 > 1$ нарастает практически по линейному закону до тех пор, пока не начнет сказываться влияние пространственных размеров источника.

Выражения (28) и (29) показывают, что при движении источника по гармоническому закону вдали от источника должно наблюдаться появление гармоник. Этот эффект есть следствие интерференции вторичных волн, возникающих при неравномерном движении источника. Из (28) следует, в частности, что отношение амплитуд второй и первой гармоник от расстояния не зависит. В то же время отношение амплитуд первой и второй гармоник, возникших как следствие нелинейности, как известно [15], на участке, где еще не сказывается действие диссипативных эффектов, линейно зависит от расстояния до источника.

В том случае, когда источник движется по периодической траектории, на ней имеются симметричные, в смысле условий излучения, точки (точнее, участки траектории). Это обстоятельство и приводит к появлению гармоник в спектре принимаемого излучения. Указанный эффект, очевидно, следует принимать во внимание при экспериментальной реа-

лизации источника, движущегося по периодической траектории, когда он может быть ошибочно принят за проявление накапливающихся нелинейных эффектов, приводящих к появлению гармоник, амплитуда которых зависит от расстояния до точки наблюдения от источника.

Авторы выражают благодарность В. Л. Гинзбургу за интерес к работе и полезные замечания, высказанные при ее обсуждении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973. — С. 212.
2. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1975
3. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. — М —Л: Гос-техиздат, 1946.
4. Бункин Ф. В., Комиссаров В. М. — Акуст. журн., 1973, 19, с. 305
5. Божков А. И., Бункин Ф. В. — Квантовая электроника, 1975, 2, № 8, с. 1763.
6. Луговой В. Н., Прохоров А. М. — УФН, 1973, 111, № 2, с. 203
7. Аскарьян Г. А. — УФН, 1973, 111, № 2, с. 249.
8. Бункин Ф. В., Малыровский А. И., Михалевич В. Г., Шипуло Г. П. — Квантовая электроника, 1978, 5, № 2, с. 457
9. Луговой В. Н., Стрельцов В. Н. — ЖЭТФ, 1973, 65, № 4, с. 1407.
10. Божков А. И., Бункин Ф. В., Коломенский Ал. А. — Квантовая электроника, 1977, 4, № 4, с. 942.
11. Ляшев Л. М., Седов Л. В. — Акуст. журн., 1979, 25, с. 906.
12. Божков А. И., Бункин Ф. В., Коломенский Ал. А. — Акуст. журн., 1980, 26, с. 35.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений — М: Наука, 1971.
14. Справочник по специальным функциям — М: Наука, 1979.
15. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. — М.: Наука, 1966.
16. Григорьев Г. И., Докучаев В. П., Эйдман В. Я. — Акуст. журн., 1974, 20, № 4, с. 537.
17. Григорьев Г. И., Докучаев В. П., Эйдман В. Я. — Акуст. журн., 1976, 22, № 1, с. 122

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
28 апреля 1980 г

A SOUND FIELD OF A MOVING SOURCE

V. A. Krasil'nikov, V. I. Pavlov

The authors consider acoustic phenomena occurred as a result of a thermal mechanism of sound excitation in a case when the source is moving along an arbitrary trajectory. It is assumed that when a medium is heated by an optical beam its phase state remains unchanged. The analysis is made in the frames of the linear approximation over deviations of acoustic values from their equilibrium values. Expressions have been derived for a sound pressure both in near and far wave zones. Effects are taken into account which associated with «switching on» and «switching off» the source. For a periodic motion expressions have been obtained for the radiation intensity which are valid both for pre-sound and super-sound motion regimes. Effects associated with uniform and linearly accelerated motion of the source are analysed