ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 5 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 589.784

НЕРАВНОВЕСНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ФЛУКТУАЦИОННЫХ СИЛ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАНЖЕВЕНА

С. А. Дягилев, В. Б. Цареградский

Для динамических переменных физической системы, взаимодействующей с термостатом, найдены строгие микроскопические уравнения Ланжевена, которые в предположении существования малого параметра (отношение времен корреляции и релаксации) удобны для применения процедуры итераций. В нулевом приближении по этому параметру получено приближенное немарковское уравнение Ланжевена, совместно с корреляционными функциями неравновесных случайных источников.

Одним из наиболее плодотворных методов исследования флуктуаций в физических системах является метод «сторонних» флуктуационных источников, идея которого восходит к Ланжевену. Дальнейшее развитие и обобщение ланжевеновский метод получил в работах Рытова, Ландау и Лифшица при построении общей теории равновесных флуктуаций в электродинамике [1] и гидродинамике [2]. В последние годы этот метод широко использовался для исследования флуктуаций в лазерах [3–5], газах и плазме [6], электронной плазмы в полупроводниках [7–9], броуновского движения различных систем [10, 11].

При ланжевеновском подходе естественно возникает задача отыскания корреляционных функций «сторонних» флуктуационных сил. Часто используемое предположение о δ-коррелированности случайных источников, соответствующее марковскому поведению системы, не всегда адекватно решаемой задаче [12], поэтому необходим последовательный вывод корреляционных функций флуктуационных сил из микроскопических уравнений движения в общем случае. Таким путем Кадомцеву впервые удалось рассчитать интенсивность ланжевеновского источника в уравнении Больцмана [13]. В последние годы появился ряд работ, посвященных обобщению этого результата на случай неравновесных стационарных состояний [7, 8]. В работе [11] была рассчитана интенсивность ланжевеновского источника с учетом крупномасштабных флуктуаций при броуновском движении. В задачах типа рассмотренных [7–9, 11] случайные источники в кинетических уравнениях обусловлены межчастичным взаимодействием внутри самой системы (газ, плазма) и взаимодействием системы с внешним термостатом (фононы).

В данной работе исследуются неравновесные случайные источники, обусловленные взаимодействием рассматриваемой физической системы с термостатом. Вопрос о сторонних источниках, обусловленных взаимодействием внутри самой системы и не сводящихся к эквивалентным термостатам, в данной работе не рассматривается. Такое исследование оправдывается широким кругом различных физических приложений. Из известных укажем, например, на спонтанное излучение атома, резонансную флуоресценцию, флуктуации в твердотельных и пучковых квантовых генераторах, спин-решеточную релаксацию и др.

Из перечисленных ранее работ наиболее последовательно статистические свойства ланжевеновских источников, обусловленных взаимодействием системы с термостатом, рассматривались в работе [9]. В этой работе в квантовом случае были получены аналитические выражения для случайных источников, учитывающие флуктуации термостатной функции распределения. Однако это было сделано для случая электрон-фононного взаимодействия и при ряде дополнительных ограничений. Более общие выражения для флуктуационных сил были найдены при выводе уравнений Ланжевена в работах [14–16]. Тем не менее задача отыскания корреляционных функций флуктуационных сил в столь же общей постановке осталась нерешенной и, как указывалось в [15], при конкретных расчетах необходимы дополнительные предположения относительно их статистики.

Попутно заметим, что уравнения Ланжевена, полученные в работе [16], неудобны для отыскания приближенных решений в конкретных задачах.

В настоящей работе путем перегруппировки членов в обобщенных уравнениях Ланжевена [16] найдены стохастические микроскопические уравнения, которые в предположении существования малого параметра $\tau_{kn}^{(2)}/T_p$ (отношение времен корреляции и релаксации) удобны для применения процедуры итераций. В нулевом приближении по малому параметру $\tau_{kn}^{(2)}/T_p$ получено приближенное немарковское уравнение Ланжевена для динамической системы, взаимодействующей с термостатом. При этом время корреляции не предполагается малым по сравнению с обратными собственными частотами динамической системы, что и обусловило немарковский характер уравнения. В рамках рассмотренного приближения найдены выражения для корреляционных функций неравновесных случайных источников. Принятый в работе подход позволяет детально проследить связь статистических свойств флуктуационных сил со свойствами энергии взаимодействия и характером энергетического спектра термостата, а также четко установить критерии применимости приближенного описания флуктуаций в физических системах с помощью δ-коррелированных «сторонних» источников. Полученные результаты проиллюстрированы на часто встречающихся в теории излучения и, в частности, в квантовой электронике примерах «броуновского» движения осциллятора и двухуровневой системы.

В статье рассмотрение проводится в квантовом случае, однако полученные результаты представлены в виде, пригодном для применения к классическим системам.

1. ВЫВОД ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА ДЛЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ТЕРМОСТАТОМ

Обозначим посредством $\hat{H}_S$, $\hat{H}_R$, $\hat{V}$ соответственно гамильтонианы динамической системы, термостата и энергии взаимодействия и введем связанные с ними лиувиллевские операторы L_S, L_R, L_V и L, определяя их действие на операторы коммутационными соотношениями

$$L_S\hat{X} = (i/h)\,[\hat{H}_S, \hat{X}], \quad L_R\hat{X} = (i/\hbar)\,[\hat{H}_R, \hat{X}],$$

$$L_V\hat{X} = (i/\hbar)\,[\hat{V}, \hat{X}], \quad L = L_S + L_R + L_V, \quad L_0 = L_S + L_R.$$

Будем предполагать, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ состояние термостата описывается равновесной матрицей плотности $\hat{\rho}_R(0)$, удовлетворяющей уравнению

$$L_R\hat{\rho}_R(0) = 0. \tag{1}$$

Усреднение по начальному состоянию термостата обозначим через $\hat{P}$:

$$P = \mathrm{Sp}_R \hat{\rho}_R(0). \tag{2}$$

Без потери общности положим $P\hat{V} = 0$, в противном случае эту часть энергии взаимодействия можно включить в гамильтониан системы $\hat{H}_S$. Отсюда следует равенство

$$PL_V P = 0. \tag{3}$$

Для ясности изложения удобнее сначала рассмотреть динамику совокупности полного набора переменных $\{\hat{l}_k\}$, заданных в пространстве динамической системы. Это означает, что любой оператор $\hat{A}$ динамической системы представим в виде

$$\hat{A} = \sum_k \lambda_k \hat{l}_k, \tag{4}$$

где λ_k — некоторые комплексные числа.

Для получения искомого уравнения перегруппируем члены в микроскопическом уравнении Ланжевена [16], которое с учетом (3) имеет вид

$$d\hat{l}_k(t)/dt = L_S(t)\hat{l}_k(t) + \hat{F}_k(t). \tag{5}$$

$$\hat{F}_k(t) = e^{Lt} L_V \hat{l}_k = \int_0^t dt_1 e^{L(t-t_1)} PL_V \hat{f}_k(t_1) + \hat{f}_k(t). \tag{6}$$

Правая часть (6) состоит из суммы регулярной части и случайного источника («сторонней» флуктуационной силы):

$$\begin{gathered} \hat{f}_k(t) = e^{\Pi t} L_V \hat{l}_k, \\ \Pi = L_0 + (1-P)L_V. \end{gathered} \tag{7}$$

Отметим, что выделение «сторонней» флуктуационной силы не однозначно и диктуется соображениями удобства. В силу (3) усреднение по начальному состоянию термостата обращает (7) в нуль:

$$P\hat{f}_k(t) = 0. \tag{8}$$

Представляя согласно (4) оператор $PL_V\hat{f}_k(t)$ в виде

$$PL_V \hat{f}_k(t) = \sum_m \theta_{km}(t)\hat{l}_m \tag{9}$$

и подставляя полученное выражение в (6), уравнение (5) перепишем следующим образом:

$$\begin{gathered} d\hat{l}_k(t)dt = L_S(t)\hat{l}_k(t) + \\ + \sum_m \int_0^t dt_1 \theta_{km}(t_1)\hat{l}_m(t-t_1) + \hat{f}_k(t). \end{gathered} \tag{10}$$

Во втором члене (10) переменную $\hat{l}_k(t-t_1)$ преобразуем, применив операторное тождество:

$$e^{-Lt_1} \equiv e^{-L_0 t_1} + \int_0^{-t_1} dt_2 e^{Lt_2} L_V \exp[-L_0(t_1+t_2)]. \tag{11}$$

Используя дополнительно равенство (6), для $\hat{l}_k(t-t_1)$ найдем выражение

$$\hat{l}_k(t-t_1) = e^{Lt}\,\hat{l}_k^{(0)}(-t_1) - \int_0^{t_1} dt_2 \{\exp[-\hat{\lambda}^{(0)}(t_1-t_2)]\hat{F}(t-t_2)\}_k, \tag{12}$$

в котором

$$\hat{l}_k^{(0)}(t) = e^{L_0 t}\,\hat{l}_k,$$

$\hat{l}(t)$, $\hat{F}(t)$ и $\hat{\lambda}^{(0)}$ соответственно обозначают столбцовые матрицы

$$\hat{F}(t) = \begin{Vmatrix} \hat{F}_1(t) \\ \hat{F}_2(t) \\ \cdots \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{l}(t) = \begin{Vmatrix} \hat{l}_1(t) \\ \hat{l}_2(t) \\ \cdots \end{Vmatrix}$$

и квадратную матрицу, определяемую из выражения

$$\hat{\lambda}^{(0)}\hat{l}(t) = L_S(t)\hat{l}(t). \tag{13}$$

Для обозначения k-го элемента столбцовой матрицы $\hat{M}$ принято ради удобства обозначения $[\hat{M}]_k$.

Во втором члене (12) полную «силу» $\hat{F}(t)$, действующую на динамическую систему со стороны термостата, разложим, согласно (6), на регулярную часть и случайный источник. После преобразований выражение (12) приводится к виду

$$\hat{l}_k(t-t_1) = e^{Lt}\,\hat{l}_k^{(0)}(-t_1) - \int_0^{t_1} dt_2 \{\exp[-\hat{\lambda}^{(0)}(t_1-t_2)] \times$$
$$\times \hat{f}(t-t_2)\}_k - \int_0^{t_1} dt_2 \int_{t_2}^{t} dt_3 \{\exp[-\hat{\lambda}^{(0)}(t_1-t_2)]\,\hat{\theta}(t_3-t_2) \times \tag{14}$$
$$\times \hat{l}(t-t_3)\}_k.$$

Здесь $\hat{\theta}(t_2-t_3) = \|\theta_{kn}(t_2-t_3)\|$ — квадратная матрица, составленная из элементов $\theta_{kn}(t_2-t_3)$, а

$$\hat{f}(t) = \begin{Vmatrix} \hat{f}_1(t) \\ \hat{f}_2(t) \\ \cdots \end{Vmatrix}$$

— столбцовая матрица случайного источника. Применяя к (14) итерационную процедуру и подставляя полученный ряд в (10), находим преобразованное микроскопическое уравнение

$$d\hat{l}_k(t)/dt = L_S(t)\hat{l}_k(t) + e^{Lt}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{D}_{kn}(t) + \hat{\Phi}_k(t) \tag{15}$$

с перенормированными регулярной частью (второй член правой части (15)) и случайным источником $\hat{\Phi}_k(t)$. В равенстве (15) введены следующие обозначения:

$$\hat{D}_{k1}(t) = \sum_m \int_0^t dt_1\,\theta_{km}(t_1)\,\hat{l}_m^{(0)}(-t_1); \tag{16}$$

$$\hat{D}_{kn}(t) = (-1)^{n+1}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_{t_2}^{t} dt_3 \ldots \int_0^{t_{2n-3}} dt_{2n-2} \int_{t_{2n-2}}^{t} dt_{2n-1}\, \theta_{km}(t_1) \times$$
$$\times \{\exp[-\hat{\lambda}^{(0)}(t_1 - t_2)]\, \hat{\theta}(t_3 - t_2) \exp[-\hat{\lambda}^{(0)}(t_3 - t_4)]\, \hat{\theta}(t_5 - t_4) \ldots$$
$$\ldots \exp[-\hat{\lambda}^{(0)}(t_{2n-3} - t_{2n-2})]\, \hat{\theta}(t_{2n-1} - t_{2n-2})\, \hat{l}^{(0)}(-t_{2n-1})\}_m \quad (n \geqslant 2); \tag{17}$$

$$\hat{\Phi}_k(t) = \hat{f}_k(t) - \sum_m \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \theta_{km}(t_1) \{\exp[-\hat{\lambda}^{(0)}(t_1 - t_2)]\, \hat{f}(t - t_2)\}_m + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_m (-1)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_{t_2}^{t} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \ldots \int_{t_{2n-2}}^{t} dt_{2n-1} \times$$
$$\times \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n}\, \theta_{km}(t_1) \{\exp[-\hat{\lambda}^{(0)}(t_1 - t_2)]\, \hat{\theta}(t_3 - t_2) \times$$
$$\times \exp[-\hat{\lambda}^{(0)}(t_3 - t_4)] \ldots \hat{\theta}(t_{2n-1} - t_{2n-2}) \exp[-\hat{\lambda}^{(0)}(t_{2n-1} - t_{2n})]\, \hat{f}(t - t_{2n})\}_m, \tag{18}$$

где n определяет член ряда, включающий произведение n функций последействия $\theta_{km}(t)$. Из условия (8) вытекает, что среднее значение случайной силы $\hat{\Phi}_k(t)$ равно нулю:

$$P\hat{\Phi}_k(t) = 0. \tag{19}$$

Представим $\hat{D}_{k\nu}(t)$ согласно (4) в виде суперпозиции:

$$\hat{D}_{k\nu}(t) = \sum_m \lambda_{km,\nu}^{(SR)}(t)\, \hat{l}_m, \tag{20}$$

после чего с учетом равенства (13) уравнение Ланжевена приводится к окончательному виду:

$$d\hat{l}_k(t)/dt = \sum_m [\lambda_{km}^{(0)} + \lambda_{km}^{(SR)}(t)]\, \hat{l}_m(t) + \hat{\Phi}_k(t). \tag{21}$$

Здесь введено следующее обозначение:

$$\lambda_{km}^{(SR)}(t) = \sum_\nu \lambda_{km,\nu}^{(SR)}(t). \tag{22}$$

Если применить к стохастическому уравнению (21) процедуру усреднения P, то получим кинетическое уравнение

$$dP\hat{l}_k(t)/dt = \sum_m [\lambda_{km}^{(0)} + \lambda_{km}^{(SR)}(t)]\, P\hat{l}_m(t). \tag{23}$$

Уравнения (21) и (23) являются строгими и представляют удобную основу для построения их приближенных аналогов. В заключение этой части, используя формулы (4), (9), (15)—(18), перейдем от $\{\hat{l}_k\}$ к произвольной динамической переменной $\hat{A}$ и запишем перегруппированное уравнение Ланжевена в общем виде:

$$d\hat{A}(t)/dt = L_S(t)\hat{A}(t) + e^{Lt}\left\{\int_0^t dt_1 e^{-L_0 t_1} P L_V \hat{f}_A(t_1) - \right.$$

$$- \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_{t_2}^t dt_3\, e^{-L_0 t_3} P L_V \exp[\Pi(t_3 - t_2)] L_V \times$$

$$\left. \times \exp[-L_0(t_1 - t_2)] P L_V \hat{f}_A(t_1) + \ldots \right\} + \hat{\Phi}_A(t), \tag{15a}$$

где

$$\hat{\Phi}_A(t) = \hat{f}_A(t) - \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp[\Pi(t - t_2)] L_V \exp[-L_0(t_1 - t_2)] \times$$

$$\times P L_V \hat{f}_A(t_1) + \ldots \tag{18a}$$

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ЛАНЖЕВЕНА

Для получения приближенного уравнения Ланжевена рассмотрим сначала структуру функции последействия. С этой целью, используя операторное тождество

$$\exp\{[L_0 + (1 - P) L_V] t\} \equiv e^{L_0 t} + \int_0^t dt_1 \exp[L_0(t - t_1)] \times$$

$$\times (1 - P) L_V \exp\{[L_0 + (1 - P) L_V] t_1\}, \tag{24}$$

разложим (9) по степеням $(1 - P) L_V$:

$$\sum_m \theta_{km}(t) \hat{l}_m = \sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_m \theta_{km}^{(\mu)}(t) \hat{l}_m, \tag{25}$$

где

$$\sum_m \theta_{km}^{(\mu)}(t) \hat{l}_m = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{\mu-3}} dt_{\mu-2} P L_V \times$$

$$\times \exp[L_0(t - t_1)] (1 - P) L_V \exp[L_0(t_1 - t_2)] (1 - P) L_V \times \ldots \tag{26}$$

$$\ldots \times (1 - P) L_V e^{L_0 t_\mu} \hat{f}_m; \quad \mu = 3, 4, 5, \ldots;$$

$$\sum_m \theta_{km}^{(\mu)}(t) \hat{l}_m \big|_{\mu=2} = P L_V \hat{f}_k^{(0)}(t), \quad \hat{f}_k^{(0)}(t) = e^{L_0 t} \hat{f}_k. \tag{27}$$

В (25) и (26) член, помеченный верхним индексом μ, содержит энергию взаимодействия $\hat{V}$ в μ-й степени. Таким образом, из (25) вытекает, что функция последействия $\theta_{km}(t)$ имеет структуру

$$\theta_{km}(t) = \sum_{\mu=2}^{\infty} \theta_{km}^{(\mu)}(t), \tag{28}$$

где $\theta_{km}^{(\mu)}(t)$ — функция последействия в μ-м порядке по взаимодействию.

Сделаем оценки величин $\lambda_{km,\nu}^{(SR)}$, ограничиваясь лишь функциями последействия $\theta_{km}^{(2)}(t)$ второго порядка по энергии взаимодействия. В рамках этого приближения (16) и (17), с учетом (20) при $\nu = 1$ и 2, представляются в виде

$$\sum_m \lambda_{km,1}^{(SR)} \hat{l}_m = \sum_m \int_0^{\infty} dt_1\, \theta_{km}^{(2)}(t_1) \hat{l}_m^{(0)}(-t_1); \tag{29}$$

$$\sum_m \lambda^{(SR)}_{km,2} \hat{l}_m = -\sum_m \int_0^\infty dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_{t_2}^\infty dt_3\, \theta^{(2)}(t_1) \times$$
$$\times \{\exp[-\hat{\lambda}^{(0)}(t_1 - t_2)]\, \hat{\theta}^{(2)}(t_3 - t_2)\, \hat{l}^{(0)}(-t_3)\}_m. \qquad (30)$$

Относительно функций последействия $\theta^{(2)}_{km}(t)$ мы предположим, что они отличны от нуля лишь на временном интервале $|t| \leqslant \tau^{(2)}_{km}$ (время корреляции). Поэтому выражения (29) и (30) при $t \gg \tau^{(2)}_{km}$ не зависят от времени, и верхний предел интегрирования t взят равным бесконечности.

Введем величину

$$T_p = \min\{|\mathrm{Re}\,\lambda^{(SR)}_{kn,1}|^{-1},\ |\mathrm{Im}\,\lambda^{(SR)}_{kn}|^{-1}\}, \qquad (31)$$

которую ниже условно назовем временем релаксации.

Кроме времен корреляции и релаксации, характеризующих воздействие термостата на динамическую систему, введем в рассмотрение собственные периоды динамической системы $\tau_{ij} = 2\pi\hbar/(E_i - E_j)$, где E_i — энергетические уровни динамической системы. Из трех размерных величин τ_{ij}, $\tau^{(2)}_{km}$, T_p можно образовать три следующих безразмерных параметра:

$$\tau_{ij}/T_p, \quad \tau^{(2)}_{km}/T_p, \quad \tau^{(2)}_{km}/\tau_{ij}. \qquad (32)$$

Относительно последнего будем сначала полагать, что

$$\tau^{(2)}_{km}/\tau_{ij} \leqslant 1. \qquad (33)$$

Отсюда оценку $\lambda^{(SR)}_{km,1}$ найдем, определив порядок T_p^{-1}. Для этого воспользуемся равенством (29):

$$|\lambda^{(SR)}_{kn,1}| \sim 1/T_p \sim \varepsilon^2 \tau^{(2)}_{kn}/\hbar^2, \qquad (34)$$

где ε характеризует порядок энергии взаимодействия $\hat{V}$. Оценку $\lambda^{(SR)}_{kn,2}$ можно получить аналогично, исходя из (30), (31), (34):

$$|\lambda^{(SR)}_{kn,2}| \sim \varepsilon^4 [\tau^{(2)}_{kn}]^3/\hbar^4 \sim (\tau^{(2)}_{kn}/T_p)\, |\lambda^{(SR)}_{kn,1}|. \qquad (35)$$

В общем случае $\lambda^{(SR)}_{kn,\mu}$ при произвольном μ имеет порядок

$$|\lambda^{(SR)}_{kn,\mu}| \sim \varepsilon^{2\mu} [\tau^{(2)}_{kn}]^{2\mu-1}/\hbar^{2\mu} \sim [\tau^{(2)}_{kn}/T_p]^{\mu-1}\, |\lambda^{(SR)}_{kn,1}|. \qquad (36)$$

Далее предположим, что параметр $\tau^{(2)}_{kn}/T_p \ll 1$, а функции последействия высших порядков по энергии взаимодействия $\theta^{(\mu)}_{km}(t)$ при $\mu > 2$ дают пренебрежимо малый вклад в $\sum_m \lambda^{(SR)}_{km} \hat{l}_m$ по сравнению с (29) (хотя их вклад может быть сравним с (30)). При сделанных предположениях для суммы $\sum_m \lambda^{(SR)}_{km} \hat{l}_m$ в нулевом приближении по параметру $\tau^{(2)}_{km}/T_p$ можно ограничиться выражением (29). В результате уравнения (21) и (23), записанные в матричной форме, примут приближенный вид:

$$d\hat{l}(t)/dt = \hat{\lambda}\, \hat{l}(t) + \hat{\Phi}(t); \qquad (37)$$

$$dP\hat{l}(t)/dt = \hat{\lambda}\, P\hat{l}(t). \qquad (38)$$

Здесь $\hat{\lambda} = \| \lambda_{kn} \|$ — квадратная матрица с элементами $\lambda_{kn} = \lambda_{kn}^{(0)} + \lambda_{kn,1}^{(SR)}$, а $\hat{\Phi}(t)$ — столбцовая матрица случайного источника:

$$\hat{\Phi}(t) = \left\{ \begin{matrix} \hat{\Phi}_1(t) \\ \hat{\Phi}_2(t) \\ \dots \end{matrix} \right\}.$$

По поводу уравнения (37) сделаем ряд замечаний. Во-первых, для самосогласованности (37) необходимо в строгом выражении (18) для случайного источника $\hat{\Phi}_k(t)$ сделать приближения, аналогичные тем, которые использовались при упрощении регулярной части. Поскольку в дальнейшем нас интересует не сам случайный источник $\hat{\Phi}_k(t)$, а его корреляторы, то соответствующие приближения будут сделаны при их выводе. Во-вторых, матрицу $\hat{\lambda}$ будем предполагать диагональной. В противном случае, поскольку она не особая, ее можно диагонализировать, что соответствовало бы переходу к новому набору $\{\hat{l}'_k\}$. С учетом сказанного уравнение Ланжевена принимает окончательный вид:

$$d\hat{l}_k(t)/dt = \lambda_k \hat{l}_k(t) + \hat{\Phi}_k(t), \tag{39}$$

где $\lambda_k = \lambda_{kk}$ — диагональные элементы $\hat{\lambda}$. Аналогом этих уравнений для произвольной динамической переменной системы $\hat{A}$ служит

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = L_S(t)\hat{A}(t) + e^{Lt} \int_0^t dt_1\, e^{-L_0 t_1} P L_V \hat{f}_A^{(0)}(t_1) + \hat{\Phi}_A(t), \tag{40}$$

где $t \gg \tau_{km}^{(2)}$.

В заключение этой части обобщим полученные нами уравнения (39) и (40) на случай, когда имеет место условие, обратное (33):

$$\tau_{km}^{(2)}/\tau_{ij} \gg 1. \tag{33'}$$

В этом случае из-за наличия в подынтегральных членах (29) и (30) экспонент типа $e^{i\omega_{ij}}$, вообще говоря, для $\lambda_{km,1}^{(SR)}$ и $\lambda_{km,2}^{(SR)}$ вместо (34) и (35) получим следующие оценки:

$$|\lambda_{kn,1}^{(SR)}| \sim 1/T_p \sim \varepsilon^2 \tau_{ij}/\hbar^2 \ll \varepsilon^2 \tau_{km}^{(2)}/\hbar^2; \tag{41}$$

$$|\lambda_{kn,2}^{(SR)}| \sim \varepsilon^4 \tau_{ij}^3/\hbar^4 \sim (\tau_{ij}/T_p) |\lambda_{kn,1}^{(SR)}| \ll |\lambda_{kn,1}^{(SR)}|. \tag{42}$$

Тогда, очевидно, все последующие рассуждения остаются в силе, но роль параметра малости теперь будет играть отношение τ_{ij}/T_p, причем

$$\tau_{ij}/T_p \ll \tau_{km}^{(2)}/T_p.$$

Отметим, что в конкретных задачах величина $\lambda_{kn,2}^{(SR)}$ может иметь также следующий порядок:

$$|\lambda_{kn,2}^{(SR)}| \sim \frac{\varepsilon^4 \tau_{ij}^2 \tau_{km}}{\hbar^4} \sim \frac{\tau_{km}^{(2)}}{T_p} |\lambda_{km,1}^{(SR)}| \ll |\lambda_{km,1}^{(SR)}|. \tag{43}$$

Однако мы всегда будем полагать, что имеющиеся малые параметры $\tau_{km}^{(2)}/T_p$ и τ_{ij}/T_p позволяют ограничиться в нулевом приближении по ним для $\sum_m \lambda_{km}^{(SR)} \hat{l}_m$ выражением (29).

3. КОРРЕЛЯТОРЫ «СТОРОННИХ» ФЛУКТУАЦИОННЫХ СИЛ

Для отыскания корреляционных функций случайного источника рассмотрим вначале среднее по начальному состоянию термостата от произведения операторов $\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t)$. Воспользовавшись решениями (39), получаем

$$P\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t) = P\hat{l}_k(t)P\hat{l}_m(t) + \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \exp[\lambda_k(t-t_1)] \exp[\lambda_m(t-t_2)] P\hat{\Phi}_k(t_1)\hat{\Phi}_m(t_2). \tag{44}$$

С другой стороны, выражение для среднего можно получить непосредственно из уравнений (40). Взяв в качестве $\hat{A}(t)$ произведение $\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t)$ и усреднив (40), после преобразований находим

$$dP\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t)/dt = (\lambda_k + \lambda_m) P\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t) + \int_0^t dt_1 P e^{Lt} e^{-L_0 t_1} P [L_V \hat{l}_k^{(0)}(t_1)] \hat{f}_m^{(0)}(t_1) + \int_0^t dt_1 P e^{Lt} e^{-L_0 t_1} P \hat{f}_k^{(0)}(t_1) L_V \hat{l}_m^{(0)}(t_1). \tag{45}$$

Потребуем, чтобы решение уравнения (45) с точностью, допускаемой уравнениями (39), (40), совпадало с выражением (44). Из этого условия мы и определим ниже корреляторы случайных источников.

Для решения (45) вначале преобразуем его правую часть, ограничиваясь лишь указанными рамками точности и основываясь на представлении энергии взаимодействия $\hat{V}$ в виде

$$\hat{V} = \sum_\alpha \hat{F}_\alpha \hat{Q}_\alpha,$$

где $\hat{Q}_\alpha$ и $\hat{F}_\alpha$ — соответственно переменные термостата и системы. В этом случае функции последействия $\theta_{km}^{(2)}(t)$ и подынтегральные выражения последних двух слагаемых в правой части (45) содержат корреляторы типа $P\hat{Q}_\alpha^{(0)}(t)\hat{Q}_\beta$, где $\hat{Q}_\alpha^{(0)}(t) = e^{L_0 t}\hat{Q}_\alpha$ — операторы $\hat{Q}_\alpha$ в представлении взаимодействия. Относительно последних мы полагаем, что они являются острыми функциями времени вблизи $t=0$, и их характерный масштаб — время корреляции — определяет введенное нами ранее время $\tau_{km}^{(2)}$. Отметим, что это свойство, как это многократно отмечалось в теории релаксации, является характерным для диссипативных подсистем (термостатов) [17, 18]. Отсюда следует, что основной вклад в интегралы (45) подынтегральные члены дают на временах $|t_1| \lesssim \tau_{km}^{(2)}$. С учетом сказанного в подынтегральных выражениях (45) можно заменить $\hat{l}_k^{(0)}(t_1)$ и $\hat{l}_m^{(0)}(t_1)$ на средние значения $P\hat{l}_k(t_1)$ и $P\hat{l}_m(t_1)$, поскольку разница интегральных членов от такой замены имеет следующий порядок малости по параметру $\tau_{km}^{(2)}/T_p$. Подставляя затем вместо $P\hat{l}_k(t_1)$ и $P\hat{l}_m(t_1)$ их выражения, полученные из решения (38), представим (45) в виде

$$d P\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t)/dt = (\lambda_k + \lambda_m)\, P\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t) + \\ + \int_0^t dt_1\, e^{\lambda_k t_1} P e^{Lt}\, e^{-L_0 t_1} P \hat{f}_k \hat{f}_m^{(0)}(t_1) + \\ + \int_0^t dt_1\, e^{\lambda_m t_1} P e^{Lt}\, e^{-L_0 t_1} P \hat{f}_k^{(0)}(t_1)\hat{f}_m. \tag{46}$$

С указанной степенью точности (46) можно переписать в следующих двух вариантах:

$$d P\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t)/dt = (\lambda_k + \lambda_m)\, P\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t) + \\ + \int_0^t dt_1 \exp[\lambda_k(t - t_1)]\, P e^{Lt_1} P \hat{f}_k \hat{f}_m^{(0)}(t - t_1) + \\ + \int_0^t dt_2 \exp[\lambda_m(t - t_2)]\, P e^{Lt} P \hat{f}_k \hat{f}_m^{(0)}(t_2 - t) \tag{47}$$

и

$$d P\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t)/dt = (\lambda_k + \lambda_m)\, P\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t) + \\ + \int_0^t dt_1 \exp[\lambda_k(t - t_1)]\, P e^{Lt} P \hat{f}_k^{(0)}(t_1 - t)\hat{f}_m + \\ + \int_0^t dt_2 \exp[\lambda_m(t - t_2)]\, P e^{Lt_2} P \hat{f}_k^{(0)}(t - t_2)\hat{f}_m. \tag{47'}$$

Решая (47) и (47′), находим

$$P\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t) = P\hat{l}_k(t) P\hat{l}_m(t) + \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \times \\ \times \exp[\lambda_k(t - t_1)] \exp[\lambda_m(t - t_2)]\, P e^{Lt_1} P \hat{f}_k \hat{f}_m^{(0)}(t_2 - t_1); \tag{48}$$

$$P\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t) = P\hat{l}_k(t) P\hat{l}_m(t) + \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \times \\ \times \exp[\lambda_k(t - t_1)] \exp[\lambda_m(t - t_2)]\, P e^{Lt_2} P \hat{f}_k^{(0)}(t_1 - t_2)\hat{f}_m. \tag{48'}$$

Из сравнения (44), (48) и (48′) находим следующие выражения для корреляторов случайных источников:

$$P\hat{\Phi}_k(t_1)\hat{\Phi}_m(t_2) = P e^{Lt_1} P \hat{f}_k \hat{f}_m^{(0)}(t_2 - t_1) + \hat{\eta}_1(t_1, t_2) = \\ = P e^{Lt_2} P \hat{f}_k^{(0)}(t_1 - t_2)\hat{f}_m + \hat{\eta}_2(t_1, t_2), \tag{49}$$

определенные с точностью до функций $\hat{\eta}_{1,2}$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \exp[\lambda_k(t - t_1)] \exp[\lambda_m(t - t_2)]\, \hat{\eta}_1(t_1, t_2) = \\ = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \exp[\lambda_k(t - t_1)] \exp[\lambda_m(t - t_2)]\, \hat{\eta}_2(t_1, t_2) = 0. \tag{50}$$

Из (48) и (50) следует, что не определенные пока функции $\hat{\eta}_1$ и $\hat{\eta}_2$ не дают вклада в одновременные корреляторы $P\hat{l}_k(t)\hat{l}_m(t)$.

Аналогичное утверждение можно сделать относительно двухвременных корреляторов $P\hat{l}_k(t_1)\hat{l}_m(t_2)$. В самом деле, равенства (39), (49), (50) позволяют написать для коррелятора $P\hat{l}_k(t_1)\hat{l}_m(t_2)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} P\hat{l}_k(t_1)\hat{l}_m(t_1+\tau) &= Pe^{Lt_1}\hat{l}_k P\hat{l}_m(\tau) + \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} du \times \\ &\times \exp[\lambda_k(t_1-u)] \exp[\lambda_m(t_2-s)] Pe^{Lu} P\hat{f}_k f_m^{(0)}(s-u) + \\ &+ \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} du \exp[\lambda_k(t_1-s)] \exp[\lambda_m(t_2-u)] \hat{\eta}_1(s,u), \end{aligned} \tag{51}$$

где для определенности полагалось $\tau = t_2 - t_1 > 0$. В правой части (51) второй член меньше первого в $\tau_{km}^{(2)}/T_p$ раз, и им пренебрегаем. С другой стороны, двухвременной коррелятор можно представить в ином виде:

$$\begin{aligned} P\hat{l}_k(t_1)\hat{l}_m(t_1+\tau) &= Pe^{Lt_1}\hat{l}_k\hat{l}_m(\tau) = Pe^{Lt_1}\hat{l}_k \times \\ &\times [P\hat{l}_m(\tau) + (1-P)\hat{l}_m(\tau)] = Pe^{Lt_1}\hat{l}_k P\hat{l}_m(\tau) + \Delta(t_1, t_2), \end{aligned} \tag{52}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} du\, P\exp[L(t_1-s)] PL_V e^{\Pi s}\hat{l}_k \exp[\Pi(u - \\ - t_1)] L_V P\hat{l}_m(t_2-u), \end{aligned} \tag{53}$$

если воспользоваться при этом тождествами

$$(1-P)\hat{l}_m(\tau) \equiv \int_0^{\tau} du e^{\Pi u} L_V P\hat{l}_m(\tau-u),$$

$$e^{Lt_1} \equiv e^{\Pi t_1} + \int_0^{t_1} ds \exp[L(t_1-s)](1-P)L_V e^{\Pi s}.$$

Из сравнения (51) и (52) следует:

$$\int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} du \exp[\lambda_k(t_1-s)] \exp[\lambda_m(t_2-u)] \hat{\eta}_1(s,u) = \Delta(t_1, t_2). \tag{54}$$

Заметим, что выражение (53) для $\Delta(t_1, t_2)$ является строгим.

Для оценки $\Delta(t_1, t_2)$ разложим в (53) экспоненты по степеням $(1-P)L_V$. Первый член в разложении $\Delta(t_1, t_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} du \exp[\lambda_m(t_2-u)] Pe^{Ls} P[L_V \hat{l}_k^{(0)}(t_1-s)] \times \\ &\times \hat{f}_m^{(0)}(u-s) + \int_0^{t_1} ds \int_{t_1}^{t_2} du \exp[\lambda_m(t_2-u)] Pe^{Ls}\hat{l}_k^{(0)}(t_1-s) PL_V \hat{f}_m^{(0)}(u-s). \end{aligned} \tag{55}$$

Как видно из (55), $\Delta^{(1)}(t_1, t_2)$ по отношению к первому члену в правой части (52) имеет следующий порядок малости по параметру $\tau^{(2)}_{km}/T_p$, и в (55) им пренебрегаем. Относительно последующих членов разложения ряда $\Delta(t_1, t_2)$ по взаимодействию $\hat{V}$ будем предполагать, что они также малы по сравнению с первым членом (52). Это предположение будет выглядеть более естественно, если учесть, что член $P\dot{L}_V \exp[\Pi(t_1 - s)]\hat{l}_k \exp[\Pi(u - t_1)]\hat{f}_m$, входящий в (53), напоминает функцию последействия, порождаемую оператором:

$$PL_V\, e^{\Pi(u-s)}\hat{f}_m \equiv PL_V \exp[\Pi(t_1 - s)]\exp[\Pi(u - t_1)]\hat{f}_m,$$

в котором мы делали аналогичное приближение.

При решении конкретных задач с определенным гамильтонианом сделанные предположения во всяком случае могут быть проверены.

Суммируя сказанное, мы убеждаемся в том, что неопределенные функции η_1 и η_2 вклада в корреляционные функции физических величин не дают. Таким образом, ограничиваясь только расчетом корреляционных функций физических величин, мы можем положить η_1 и η_2 в (49) равными нулю. Относительно корреляторов случайных источников (49) отметим, что они, вообще говоря, не являются δ-коррелированными, хотя и являются острыми функциями (по сравнению с T_p) вблизи $t_1 = t_2$, с характерным временным масштабом, равным $\tau^{(2)}_{km}$, который может быть сравним или даже больше обратных собственных частот динамической системы. Это и обусловливает немарковский характер найденных уравнений Ланжевена.

В заключение этой части запишем корреляторы сил для произвольных динамических переменных системы $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Учитывая (4), а также равенство

$$\hat{\Phi}_M(t) = \sum_k c_k \hat{\Phi}_k(t) \qquad (\text{где } \hat{M} = \sum_k c_k \hat{l}_k),$$

непосредственно следующее из (39), находим, что

$$P\hat{\Phi}_A(t_1)\hat{\Phi}_B(t_2) = Pe^{Lt_1} P\hat{f}_A \hat{f}^{(0)}_B(t_2 - t_1) = Pe^{Lt_2} P\hat{f}^{(0)}_A(t_1 - t_2)\hat{f}_B. \tag{56}$$

4. «БРОУНОВСКОЕ» ДВИЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В качестве иллюстрации к применению приближенных уравнений Ланжевена (39) и (40) рассмотрим точно решаемую задачу о поведении гармонического осциллятора, взаимодействующего с набором большого количества осцилляторов другой природы (термостат).

Гамильтониан данной задачи выберем в виде

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha \hat{b}^+_\alpha \hat{b}_\alpha + \sum_\alpha \hbar\left(\lambda_\alpha \hat{a}^+\hat{b}_\alpha + \lambda^*_\alpha \hat{a}\hat{b}^+_\alpha\right), \tag{57}$$

где $\hat{a}^+$, $\hat{a}$ и $\hat{b}^+_\alpha$, $\hat{b}_\alpha$ — операторы рождения и уничтожения соответственно для осцилляторов системы и термостата, а λ_α — набор комплексных констант взаимодействия. Для определенности положим, что в момент времени $t_0 = 0$ термостат находился в состоянии термодинамического равновесия при температуре T:

$$\hat{\rho}_R(0) = \frac{\exp\left[(-1/kT)\sum_\alpha \hbar\omega_\alpha \hat{b}^+_\alpha \hat{b}_\alpha\right]}{\mathrm{Sp}_R \exp\left[(-1/kT)\sum_\alpha \hbar\omega_\alpha \hat{b}^+_\alpha \hat{b}_\alpha\right]}. \tag{58}$$

В этом случае гамильтониан взаимодействия в (57) удовлетворяет условию (3). Выполняя в (40) простые операции коммутирования и усреднения по состоянию (58), получаем следующее приближенное уравнение Ланжевена для оператора уничтожения $\hat{a}(t)$:

$$d\hat{a}(t)/dt = -i\omega\hat{a}(t) + \left\{\int_0^\infty dt_1\,\theta(t_1)\,e^{i\omega t_1}\right\}\hat{a}(t) + \hat{\Phi}_a(t) =$$
$$= -[\gamma + i(\omega + \delta\omega)]\,\hat{a}(t) + \hat{\Phi}_a(t). \tag{59}$$

Здесь константа затухания γ, частотный сдвиг $\delta\omega$ и функция последействия $\theta(t_1)$ определяются выражениями

$$\gamma = \pi\,|\lambda(\omega)|^2\,\rho(\omega), \quad \delta\omega = \int_0^\infty d\omega_\alpha\,|\lambda(\omega_\alpha)|^2\,\rho(\omega_\alpha)(P/(\omega - \omega_\alpha)),$$
$$\theta(t) = -\sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2\,e^{-i\omega_\alpha t},$$

в которых введены обозначения: $\lambda_\alpha \equiv \lambda(\omega_\alpha)$, $\rho(\omega_\alpha)$ — число осцилляторов термостата в единичном частотном интервале вблизи ω_α, а P — символ главного значения. В (59) подставлено точное значение функции $\theta(t)$, которое в этом случае содержит лишь члены второго порядка по взаимодействию. Уравнение (59) в сочетании с эрмитово-сопряженным являются исходными для квантовой теории броуновского движения гармонического осциллятора. Корреляторы флуктуационных сил $\hat{\Phi}_a(t)$ и $\hat{\Phi}_{a+}(t)$ находятся простым образом с помощью (56):

$$P\hat{\Phi}_a(t)\,\hat{\Phi}_a(\tau) = P\hat{\Phi}_{a+}(t)\,\hat{\Phi}_{a+}(\tau) = 0,$$
$$P\hat{\Phi}_a(t)\,\hat{\Phi}_{a+}(\tau) = \sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2(\overline{n}_\alpha + 1)\,e^{-i\omega_\alpha(t-\tau)}, \tag{60}$$
$$P\hat{\Phi}_{a+}(t)\,\hat{\Phi}_a(\tau) = \sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2\,\overline{n}_\alpha\,e^{i\omega_\alpha(t-\tau)},$$

где

$$\overline{n}_\alpha = 1/[\exp(\hbar\omega_\alpha/kT) - 1].$$

Как видно из (60), временной масштаб корреляторов случайных сил определяется энергетическим спектром термостата, спектральной зависимостью констант взаимодействия и характерным временем $\tau_0 = \hbar/kT$, связанным с зависимостью $\overline{n}_\alpha$ от частоты ω_α.

Рассмотрим идеализированный случай. Пусть константы взаимодействия малы и отличны от нуля только вблизи собственной частоты осциллятора системы ω на интервале $[\omega - (\Delta\omega/2),\ \omega + (\Delta\omega/2)]$, где $\Delta\omega = 1/\tau_c$ удовлетворяет неравенствам* $\Delta\omega \ll kT/\hbar$, $\omega \gg \Delta\omega \gg \gamma$ Тогда (60) приводятся к марковскому виду с δ-коррелированными случайными источниками:

$$P\hat{\Phi}_a(\tilde{t})\,\hat{\Phi}_a(\tilde{t} + \tilde{\tau}) = P\hat{\Phi}_{a+}(\tilde{t})\,\hat{\Phi}_{a+}(\tilde{t} + \tilde{\tau}) = 0,$$
$$P\hat{\Phi}_a(\tilde{t})\,\hat{\Phi}_{a+}(\tilde{t} + \tilde{\tau}) = 2\gamma(\overline{n}_\omega + 1)\,\delta(\tilde{\tau}), \tag{61}$$
$$P\hat{\Phi}_{a+}(\tilde{t})\,\hat{\Phi}_a(\tilde{t} + \tilde{\tau}) = 2\gamma\,\overline{n}_\omega\,\delta(\tilde{\tau}),$$

* При $T \to 0$ $\overline{n}_\alpha \to 0$ и условие $\Delta\omega \ll kT/\hbar$, как это следует из (60), отпадает.

$$\overline{n}_\omega = \overline{n}_\alpha |_{\omega_\alpha = \omega}.$$

Корреляторы (61) записаны в «огрубленном» времени $\tilde{t}$, масштаб изменения которого Δt удовлетворяет неравенству* $1/\gamma \gg \Delta t \gg \tau_c$. Выражения, аналогичные (61), были получены в [1] в предположении δ-корреляции «сторонних» источников.

5. УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА ДЛЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Используя (40), получим теперь уравнения движения для переменных двухуровневой системы, которые составляют основу последовательной микроскопической теории квантовых генераторов. Из соображений удобства в качестве термостата рассмотрим снова большую совокупность осцилляторов.

Гамильтониан данной задачи запишем в форме вторичного квантования:

$$\hat{H} = \sum_{l=1}^{2} E_l \hat{a}_l^+ \hat{a}_l + \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha \hat{b}_\alpha^+ \hat{b}_\alpha + \sum_\alpha \hbar (\lambda_\alpha \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \hat{b}_\alpha^+ + \lambda_\alpha^* \hat{a}_2^+ \hat{a}_1 \hat{b}_\alpha), \tag{62}$$

где $\hat{a}_i^+$ и $\hat{a}_i$ — операторы рождения и уничтожения квантовой системы в состоянии с энергией E_i. Константы взаимодействия λ_α предполагаются малыми.

Выполнив в (40) операции с гамильтонианом (62), и проведя усреднение P по начальному состоянию термостата (58), получаем искомые уравнения Ланжевена

$$\begin{aligned} d\hat{a}_k^+(t)\hat{a}_l(t)/dt &= [i(\omega_{kl} + \Delta\omega_{kl}) - (1/\tau_{21})](1 - \delta_{kl}) \times \\ &\times \hat{a}_k^+(t)\hat{a}_l(t) + \delta_{kl} \sum_{j \neq l} [W_{lj}\hat{a}_j^+(t)\hat{a}_j(t) - W_{jl}\hat{a}_l^+(t)\hat{a}_l(t)] + \hat{\Phi}_{kl}(t). \end{aligned} \tag{63}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Gamma_1(\tau) = \sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2 \overline{n}_\alpha e^{i\omega_\alpha \tau}, \quad \Gamma_2(\tau) = \sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2 (\overline{n}_\alpha + 1) e^{i\omega_\alpha \tau},$$

$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Gamma_1(\tau) \exp(-i\omega_{21}\tau) = W_{21}$ — вероятность перехода в единицу времени с уровня E_1 на уровень E_2, $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \Gamma_2(\tau) \exp(-i\omega_{21}\tau) = W_{12}$ — вероятность перехода с E_2 на E_1,

$$\Delta\omega_{21} = -\Delta\omega_{12} = 2\int_0^\infty d\tau \sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2 \left(\overline{n}_\alpha + \frac{1}{2}\right) \sin(\omega_{21} - \omega_\alpha)\tau$$

— частотный сдвиг, δ_{jk} — символ Кронекера.

Выражения для корреляторов сил $\hat{\Phi}_{kl}(t)$ находятся простой подстановкой энергии взаимодействия из (62) в формулу (56):

$$\begin{aligned} P\hat{\Phi}_{mn}(t)\hat{\Phi}_{kl}(t+\tau) &= \Gamma_1(-\tau)\{[\delta_{nk}\delta_{n1}P\hat{a}_m^+(t)\hat{a}_l(t) - \\ &- \delta_{mn}\delta_{m2}\delta_{1k}P\hat{a}_1^+(t)\hat{a}_l(t)]\exp(i\omega_{2l}\tau) + [\delta_{ml}\delta_{m2}\delta_{nk}P\hat{a}_1^+(t)\hat{a}_1(t) - \end{aligned}$$

* В реальной физической ситуации Δt может определяться временем разрешения измерительной аппаратуры

$$- \delta_{kl}\delta_{k2}\delta_{n1} P\hat{a}_m^+(t)\hat{a}_1(t)] \exp(i\omega_{k1}\tau)\} + \Gamma_2(\tau)\{[\delta_{kn}\delta_{k2} P\hat{a}_m^+(t)\hat{a}_l(t) - \tag{64}$$

$$- \delta_{mn}\delta_{m1}\delta_{k2} P\hat{a}_2^+(t)\hat{a}_l(t)] \exp(-i\omega_{l1}\tau) + [\delta_{ml}\delta_{m1}\delta_{nk} P\hat{a}_2^+(t)\hat{a}_2(t) -$$

$$- \delta_{kl}\delta_{k1}\delta_{n2} P\hat{a}_m^+(t)\hat{a}_2(t)] \exp(-i\omega_{2k}\tau)\}.$$

Рассмотрим снова гипотетический случай, когда константы взаимодействия $\lambda_\alpha \equiv \lambda(\omega_\alpha)$ отличны от нуля только на интервале частот $(\omega_{21} - \Delta\omega/2,\ \omega_{21} + \Delta\omega/2)$, где $\Delta\omega$ удовлетворяет неравенствам $\Delta\omega \ll \ll kT/\hbar$, $\omega_{21} \gg \Delta\omega \gg W_{12}$. В этом случае функции $\Gamma_1(\tilde{\tau})$ и $\Gamma_2(\tilde{\tau})$, записанные в «огрубленном» времени $\tilde{\tau}$ с масштабом $\Delta t \gg 1/\Delta\omega$, окажутся пропорциональными $\delta(\tilde{\tau})$, и корреляторы (64) совпадут с аналогичными выражениями, найденными в работах [4, 5, 17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М. Теория электромагнитных флуктуаций и теплового излучения. — М: АН СССР, 1953.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. — ЖЭТФ, 1957, **32**, вып. 2, с 618.
3. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах. Ч. 3 / Под ред Ю. Л. Климонтовича.— М: Наука, 1974.
4. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления. — М.: Мир, 1974.
5. Арекки Ф., Скалли М., Хакен Н, Вайдлих В. Квантовые флуктуации излучения лазера.— М: Мир, 1975 — С 115
6. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы — М· Наука, 1975. — С 127.
7. Коган Ш. М., Шульман А. А. — ЖЭТФ, 1969, **56**, вып. 3, с 862.
8. Ганцевич С. В, Гуревич В Л, Катилюс Р. — ЖЭТФ, 1969, **57**, с 503; — ФТТ, 1969, **11**, с. 508, — ЖЭТФ, 1970, **59**, с. 533.
9. Томчук П М, Чумак А А — УФЖ, 1973, **18**, № 10, с 1625.
10. Кляцкин В. И, Татарский В. И. — УФН, 1973, **110**, с 499
11. Белый В. В., Климонтович Ю. Л — ТМФ, 1978, **34**, № 2, с 233.
12. Пригожин И Неравновесная статистическая механика. — М.: Мир, 1964. — С 87
13. Кадомцев Б Б — ЖЭТФ, 1957, **32**, с. 943
14. Mori H — Progr. Theor. Phys., 1965, **33**, № 3, p. 423
15. Konno H — J Phys. Soc. Japan, 1978, **44**, № 5, p. 1426
16. Shibata F, Hasthisume N. — J Phys Soc. Japan, 1978, **44**, № 5, p. 1435
17. Lax M. — Phys Rev, 1966, **145**, p 110.
18. Фэйн В М, Ханин Я И. Квантовая радиофизика. — М.: Сов. радио, 1965 — С 73

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 30 мая 1980 г.

NONEQUILIBRIUM CORRELATION FUNCTIONS OF FLUCTUATING FORCES IN THE QUANTUM THEORY OF GENERALIZED LANGEVIN EQUATIONS

S. A. Dyagilev, V. B. Tsaregradskij

For dynamic variables of a physical system interacting with a thermostat strict microscopic Langevin equations have been derived which in the assumption of a small parameter existence (ratio of correlation and relaxation times) are convenient for the iteration process application. In zero approximation over this parameter an approximate nonmarkov Langevin equation has been derived together with correlation functions of nonequilibrium random sources