

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\nu_1 (\omega - \Omega)}{\Omega \omega_{H1} [1 + (\omega/\omega_{H1}) (v_{T1}^2 / v_{01x}^2)]} \quad (4)$$

Для типичных параметров полупроводников, отличающихся концентрацией носителей заряда, $\omega_{01} = 5 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\omega_{02} = 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\omega_{H1,2} = 5 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\nu_{1,2} \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $m_{1,2} \sim 10^{-28} z$, $v_{T1,2} = 2 \cdot 10^7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, $v_{01,2y} = 10^8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, $\epsilon_{01,2} = 16$, при $k_x = 2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ имеем $\omega = 2 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, относительный инкремент $|\operatorname{Im} \delta \omega|/\omega \approx 0,1$ и $\theta \approx 14^\circ$.

При аномальном скин-эффекте ($\omega_H^2 v_{0y}^2 \ll \nu \omega v_T^2$) для собственных поверхностных колебаний, в приближении $|(\omega_H/v_T) \sqrt{(\omega - k_x v_{0x})/\nu}| \gg k_x$, имеем следующее дисперсионное соотношение:

$$\sqrt{\omega - k_x v_{01x}} (\omega - k_x v_{02x} - \Omega - i\gamma/\epsilon_{02}) = \alpha^{1/2} (\omega - k_x v_{01x} - \Omega - i\gamma/\epsilon_{01}) \sqrt{\omega - k_x v_{02x}} \alpha = m_1 \nu_1 n_{01}/m_2 \nu_2 n_{02} \quad (5)$$

Из (5) следует, что при $n_{02} \gg n_{01}$ и $k_x v_{02x} \ll \Omega$ существует взаимодействие поверхностных дрейфовых и магнитоплазменных волн. В условиях резонанса $k_x v_{01x} = \Omega$ относительный инкремент связанных колебаний равен $\operatorname{Im} \delta \omega/\Omega = \alpha^{1/3}$. Ответственным за неустойчивость колебаний (5) является механизм черенковского возбуждения магнитоплазменных волн.

Если поток электронов через границу сред отсутствует ($E_{0\parallel} = 0$, $j_{0y} = 0$), то уравнение, описывающее взаимодействие поверхностных волн, имеет вид

$$\epsilon_{01} + \epsilon_{02} + 4\pi \left[\frac{i\sigma_{yy1} + \sigma_{yx1}}{\omega - k_x v_{01x}} + \frac{i\sigma_{yy2} - \sigma_{yx2}}{\omega - k_x v_{02x}} \right] = 0, \quad (6)$$

где $v_{0x} = eE_{0x}/m\nu$. Неустойчивость в этом случае аналогична неустойчивости скользящих потоков [4].

Если выполнены условия $n_{02} \gg n_{01}$ и $k_x v_{02x} \ll \Omega$, то в условиях резонанса ($k_x v_{01x} = \Omega$) относительный инкремент равен $(n_{01}/n_{02})^{1/2}$. Видно, что в этом случае инкремент меньше, чем при пересечении границы потоком заряженных частиц.

Таким образом, поверхностные магнитоплазменные возбуждаются во всей области частот $\omega \ll \nu$. Причем, в интервале частот $\omega < \nu_3 < \nu$ неустойчивы вынужденные, а при $\nu_3 < \omega < \nu$ — собственные поверхностные магнитоплазменные волны.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ханкина С И, Яковенко В. М — ФТТ, 1967, 9, с. 578; — ФТП, 1979, 13, с. 1795
- 2 Байбаков В. И, Дацко В. Н. — Письма в ЖЭТФ, 1972, 15, с. 195; — ФТТ, 1973, 15, с. 1616.
- 3 Яковенко В. М. — Изв вузов — Радиофизика, 1967, 10, № 4, с. 461.
- 4 Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. — М.: Атомиздат, 1977. — Т. 2.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
15 апреля 1980 г.

УДК 621.384.6

О НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ОСЦИЛЛЯТОРА С ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТОЙ

В. В. Котин

1. Решение ряда проблем, возникающих при оценке времени жизни сгруппированного пучка в протонном синхротроне-накопителе [1–3], связано, в частности, с анализом статистических свойств гармонического осциллятора с широкополосными флуктуациями собственной частоты. Различного рода нестабильности параметров ВЧ системы синхротрона являются причиной случайных возмущений фазовых колебаний и представляют собой немаловажный фактор ограничения времени жизни пучка. Влияние шумов может быть (хотя бы частично) скомпенсировано посредством системы фазосинхронизирующей обратной связи, действие которой исследовано достаточно подробно для ситуации, когда возмущение имеет вид аддитивной случайной силы [1, 2]. Однако вопрос об эффективности компенсации параметрических шумов остается, в известной степени, открытым. Для исследования возможностей длительного накопления протонных сгустков

важно знать скорость потерь частиц под действием шумов ВЧ системы. В связи с этим представляется интересным определить, каким образом затухание, вносимое петлей обратной связи, уменьшает вероятность выхода изображающих точек системы из ограниченной области фазового пространства при больших временах.

2. Рассмотрим, в рамках диффузионного приближения, добротный осциллятор с флуктуирующей собственной частотой

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2(1 + f(t))x = 0, \quad h/\omega \ll 1, \quad (1)$$

$f(t)$ — гауссов дельта-коррелированный процесс,

$$\langle f \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t-\tau) \rangle = D \delta(\tau).$$

Уравнение Эйнштейна — Фоккера, описывающего эволюцию плотности вероятности, после усреднения по быстрому времени принимает следующий вид [4]:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = (2\kappa - 3) \frac{\partial(Pa)}{\partial a} + \frac{\partial^2(Pa^2)}{\partial a^2}, \quad (2)$$

$P(a, \tau)$ — плотность вероятности амплитуды колебания, $\tau = D \omega^2 t/16$ — безразмерное время, $\kappa = 8h/D \omega^2$. В рассматриваемой системе, как известно, не существует стационарных распределений плотности вероятности. Условием возбуждения момента амплитуды порядка n является соотношение

$$\kappa < 1 + n/2, \quad n = 1, 2, 3...$$

Для общего случая условия существования стационарных моментов выходной координаты линейного стохастического фильтра 2-го порядка получены в работе [9]. Как отмечалось в [5, 6], время релаксации моментов увеличивается с ростом порядка, и всегда существует такое значение N , что моменты с номерами $n > N$ неустойчивы.

3. Решим для данной системы задачу о первом достижении границы [7]. Вероятность события, состоящего в том, что амплитуда a под воздействием случайного процесса f хотя бы один раз за время τ достигнет величины a_B , может быть найдена из решения уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}, \quad (3)$$

$$v = \ln \xi^{-1}, \quad \xi = a/a_B, \quad \lambda = 2(\kappa - 1),$$

с начальным условием $U = 0, \tau = 0, 0 < v < \infty$ и граничным условием $U = 1, v = 0, \tau > 0$ и определяется формулой

$$U = 1 - (1/2) \operatorname{erfc} z + (1/2) \exp(-\lambda v) \operatorname{erfc} w, \quad (4)$$

$$z = -(1/2)(\lambda \tau^{1/2} + v \tau^{-1/2}), \quad w = -(1/2)(\lambda \tau^{1/2} - v \tau^{-1/2}),$$

$\operatorname{erfc} z = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-y^2) dy$ — дополнительный интеграл вероятностей. На рис. 1 по-

казаны распределения вероятности перехода в различные моменты времени при $h = 0$. Кривые 1—7 соответствуют значениям $\tau = 0,05; 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$. Пойдя из (4) плотность вероятности перехода $\partial U/\partial \tau$, определим (при $\lambda < 0$) наиболее вероятное, среднее и среднеквадратичное время перехода осциллятора из состояния с амплитудой колебаний a в состояние с амплитудой a_B :

$$\tau^* = \lambda^{-2} \{ [9 + (\lambda \ln \xi)^2]^{1/2} - 3 \},$$

$$\bar{\tau} = \lambda^{-1} \ln \xi,$$

$$(\overline{\tau^2})^{1/2} = [\lambda^{-2} (\ln \xi)^2 + 2\lambda^{-3} \ln \xi]^{1/2}.$$

Рис. 2а иллюстрирует зависимость $\tau^*, \bar{\tau}, (\overline{\tau^2})^{1/2}$ от соотношения начальной и конечной амплитуд для системы без диссипации ($h = 0$). На рис. 2б показано, как зависит среднее время возбуждения от величины коэффициента κ . Кривые 1—5 соответствуют значениям $\xi = 0,1; 0,2; 0,25; 0,33; 0,5$

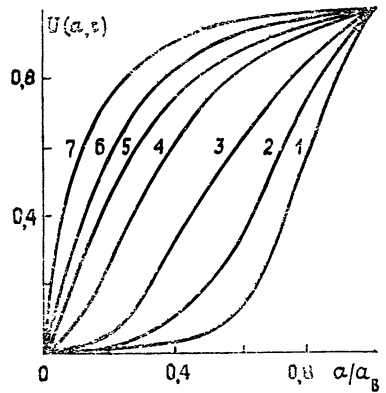


Рис. 1.

4. Для оценки роли затухания при больших временах проанализируем предельный переход $U_{st} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} U$. Нетрудно видеть, что

$$U_{st} = \begin{cases} \xi^\lambda, & \lambda > 0 \\ 1, & \lambda \leq 0 \end{cases} \quad (0 < \xi \leq 1). \quad (5)$$

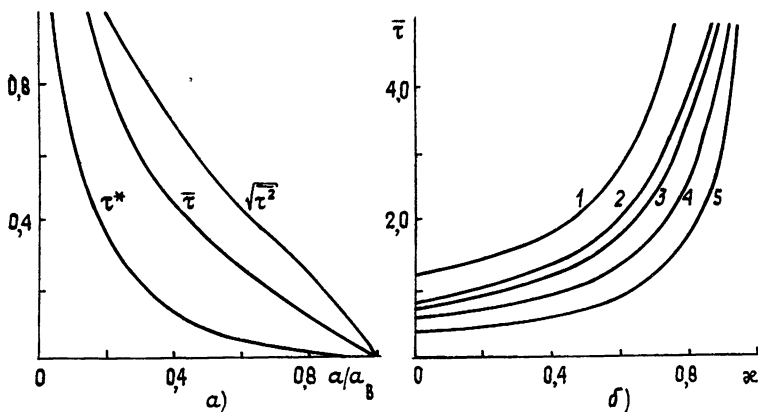


Рис. 2.

Асимптотические распределения вероятности перехода показаны на рис. 3. Кривые 1—9 соответствуют значениям $\lambda = 1,02; 1,1; 1,2; 1,4; 1,5; 2; 3; 4; 10$.

5. Зависимость статистических характеристик рассматриваемой системы от величины коэффициента затухания сводится к следующему:

- 1) $\lambda > n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ — моменты амплитуды до порядка $N = [\lambda]$ включительно затухают. Высшие моменты, начиная с $(N + 1)$ -го, неограниченно возрастают [5, 6]. Вероятность перехода релаксирует к стационарному распределению $U_{st} < \xi^N$;
- 2) $0 < \lambda < 1$ — все моменты, начиная с 1-го, неустойчивы. Стационарная вероятность перехода удовлетворяет соотношению $\xi < U_{st} < 1$,

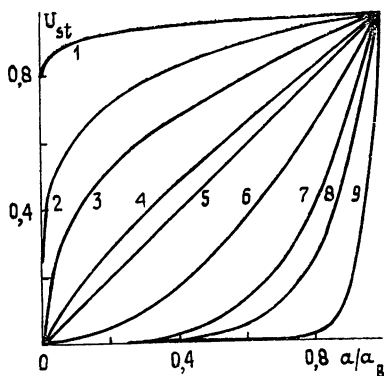


Рис. 3.

3) $\lambda < 0$ — моменты неустойчивы. Вероятность превышения заданной амплитуды стремится к единице, что совпадает с полученным в [6] вероятностным условием возбуждения резонансной системы широкополосными флуктуациями собственной частоты.

6. Вероятность локализации изображающих точек в ограниченной области ($\xi \leq 1$) фазового пространства при $\lambda > 0$ не превышает величины

$$W_{loc} = 1 - \int_0^1 \xi^\lambda P_0(\xi) d\xi, \quad (6)$$

$P_0(\xi)$ — распределение плотности вероятности при $\tau = 0$.

В заключение заметим, что учет нелинейности εx^3 , которая характерна для связывающих сил эффективного потенциала синхротронных колебаний, в первом приближении по $\varepsilon \ll 1$ не изменяет формы распределения по амплитудам и вносит поправку только в распределение по угловой переменной [8]

ЛИТЕРАТУРА

1. Hartwig E., Neil V. K., Cooper R. K. — IEEE Trans. Nucl. Sci., 1973, NS-20, № 3, p. 833.
2. Hansen S. et al. — IEEE Trans. Nucl. Sci., 1977, NS-24, № 3, p. 1452
3. Boussard D. et al. — IEEE Trans. Nucl. Sci., 1979, NS-26, № 3, p. 3484.
4. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М. Наука, 1975
5. Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 4, с. 534
6. Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 6, с. 707.
7. Понтрягин Л. С., Андронов А. А., Витт А. А. — ЖЭТФ, 1933, 3, № 3, с. 165.
8. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике — Киев: Наукова думка, 1971.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
19 марта 1980 г.,
после доработки
8 октября 1980 г.

УДК 535.132

СКОльзяЩЕЕ ПРЕЛОМЛЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛН

А. И. Кириленко, А. Д. Титов, А. П. Хапалюк

В работе [1] исследованы законы отражения и преломления плоских неоднородных волн при некомпланарном падении на плоскую границу раздела однородных изотропных немагнитных сред. Случай, когда направления эффективных нормалей волн являются скользкими, имеет ряд особенностей, важных для описания поверхностных волн и возбуждения волноводов. В частности, при распространении поверхностной волны вдоль волновода на его торце при стыковке с другим волноводом реализуется ситуация, когда амплитудная нормаль ориентирована под углом к плоскости падения (некомпланарность) и даже перпендикулярна ей.

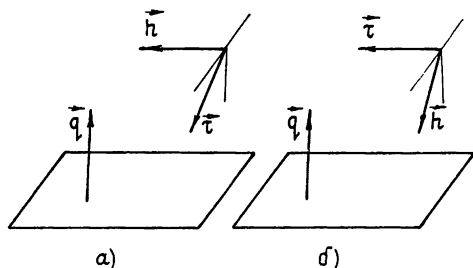


Рис. 1.

При исследовании таких особенностей удобно различать два случая: 1) эффективная фазовая нормаль параллельна границе раздела сред ($h q = 0$) (рис. 1а) и 2) эффективная амплитудная нормаль параллельна границе раздела сред ($\tau q = 0$) (рис. 1б). Фазовый множитель рассматриваемых плоских волн имеет вид $\exp[i(\omega t - k(mr))]$. Здесь q — нормаль к границе раздела, h и τ — эффективные фазовая и амплитудная нормали соответственно, причем $h + i\tau = m = Ne$, где m — вектор рефракции, $N = n - iz$ — показатель преломления, $e = e_1 + ie_2$ — волновая нормаль ($e^2 = 1$) $e_1 \sim \text{ch } \vartheta (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ — действительный вектор фазовой нормали, $e_2 \sim \text{sh } \vartheta (\cos \alpha, \cos \eta, \sin \eta, -\sin \alpha, \cos \eta)$ — действительный вектор амплитудной нормали, α — угол между вектором фазовой нормали и нормалью к границе раздела сред (угол падения), ϑ — параметр неоднородности (при $\vartheta = 0$ вектор e_2 обращается в нуль и волна становится однородной), η — угол между вектором амплитудной нормали e_2 и плоскостью падения, определяемой векторами e_1 и q (параметр некомпланарности). Более деталь-