

УДК 01.04.02

## ПОРОГОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ В ВОЛНАХ, ОТРАЖЕННЫХ И ПРЕЛОМЛЕННЫХ НА ГРАНИЦЕ ДВУХОСНОГО КРИСТАЛЛА

Ю. М. Айвазян, Б. М. Болотовский

Показано, что амплитуды и фазы электромагнитных волн, отраженных и преломленных границей с двухосным кристаллом, испытывают резкие изломы на пороге внутреннего отражения для каждой из волн в двухосном кристалле. Отмечается, что такое anomальное поведение амплитуд и фаз может быть использовано для экспериментального определения параметров двухосных кристаллов.

Большинство известных кристаллов (около 90%) относятся к триклинной, моноклинной или ромбической сингониям, т. е. являются оптически двухосными [1]. Двухосными становятся также одноосные и кубические кристаллы при воздействии на них внешних полей.

Как хорошо известно [1, 2], законы отражения и преломления на поверхности двухосного кристалла даже для относительно простых случаев, для которых возможно получение аналитических решений, являются чрезвычайно громоздкими. Положение еще более усложняется, если среда, с которой граничит двухосный кристалл, является анизотропной или если на границе с двухосным кристаллом имеется преломляющая одномерная или двумерная периодическая решетка, приводящая к появлению дифракционных спектров различных порядков.

В настоящей работе показано, что достаточно общие соображения [3] позволяют, фактически не решая граничную задачу, исследовать характер особенностей, возникающих в амплитудах и фазах плоских электромагнитных волн, трансформированных на поверхности раздела на пороге полного внутреннего отражения для каждой из волн в двухосном кристалле.

Показано, что характер особенностей, возникающих в этом случае, является корневым. Это приводит, как известно [4], к резким изломам в графиках амплитуд и фаз всех трансформированных границей раздела волн и к обращению в бесконечность производных от этих величин в пороговых точках.

Такое anomальное поведение амплитуд и фаз волн, трансформированных границей раздела с двухосным кристаллом, аналогично известным аномалиям Вуда [5, 6] и может быть, в принципе, использовано для экспериментального определения характеристик двухосных кристаллов.

1. Рассмотрим тензор диэлектрической проницаемости прозрачного двухосного кристалла. В произвольной декартовой системе координат компоненты тензора диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}$  имеют следующий вид [1]:

$$\epsilon_{ik} = \alpha \delta_{ik} + \beta (g_{1i} g_{2k} + g_{1k} g_{2i}), \quad (1)$$

где  $\alpha = \epsilon_2$ ,  $\beta = (\epsilon_3 - \epsilon_1)/2$ ,  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$  — бирадиали,

$$\mathbf{g}_1 = \chi_1 \hat{u}_1 + \chi_3 \hat{u}_3, \quad \mathbf{g}_2 = -\chi_1 \hat{u}_1 + \chi_3 \hat{u}_3, \quad (2)$$

$$\chi_1 = \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}, \quad \chi_3 = \sqrt{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}.$$

Тензор  $\hat{\varepsilon}$  имеет диагональный вид в системе, связанной с главными осями  $u_1, u_2$  и  $u_3$ . Без ограничения общности можно предположить, что между главными значениями тензора  $\hat{\varepsilon}$  выполняется неравенство  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ .

Дисперсионное уравнение для плоских волн вида  $\exp[i(\omega/c) \mathbf{n} \mathbf{r} - i \omega t]$ , распространяющихся в среде с тензором диэлектрической проницаемости  $\hat{\varepsilon}$  (1), имеет следующий вид:

$$Q^2 [\alpha + 2\beta(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)] - Q \{2\beta[\mathbf{n} \mathbf{g}_1][\mathbf{n} \mathbf{g}_2] - \beta^2[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]^2\} - \beta^2(\mathbf{g}_1[\mathbf{n} \mathbf{g}_2])^2 = 0, \quad (3)$$

где  $Q = n^2 - \alpha$ .

Дисперсионное уравнение (3) является уравнением четвертого порядка относительно компонент вектора  $\mathbf{n}$ . Оно определяет так называемую поверхность показателей преломления, которая получается, если из некоторой точки в каждом направлении откладывать величину, численно равную показателю преломления  $|\mathbf{n}|$  для этого направления.

2. Рассмотрим падение плоской электромагнитной волны из среды 1 на границу раздела с двухосным кристаллом (среда 2). Для простоты будем предполагать, что среда 1 ( $z > 0$ ) является изотропным диэлектриком с диэлектрической постоянной  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > \varepsilon_3$ ). Граница раздела совпадает с плоскостью  $x, y$ . На рис. 1 показано одно из сечений поверхностей показателей преломления в средах 1 и 2 плоскостью падения (плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности раздела и волновой вектор волны, падающей из изотропной среды на границу двухосного кристалла) с волновым вектором  $\mathbf{k} = (\omega/c) \mathbf{n}, |\mathbf{n}| = \sqrt{\varepsilon}$ .

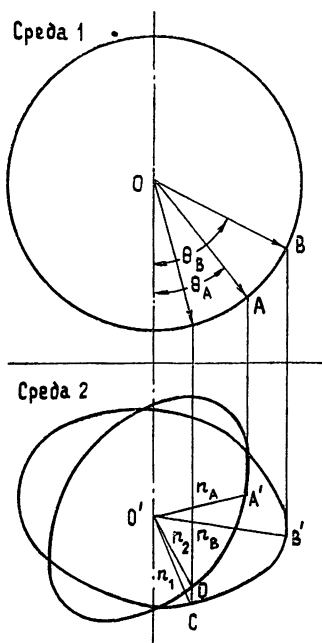


Рис. 1.

Напомним, что при трансформации волн на границе раздела тангенциальные компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}$  и вектора  $\mathbf{n}$  имеют одно и то же значение для падающей, отраженной и преломленных волн. На рис. 1 точки C и D определяют показатели преломления  $n_1$  и  $n_2$  двух необыкновенных волн, преломленных в среду 2 и уносящих энергию от поверхности раздела. Очевидно, что порогу образования волны типа 2 (точка A' на рис. 1) соответствует угол падения  $\theta_A$ . При дальнейшем увеличении угла падения в кристалле может распространяться только волна типа 1, угол полного отражения для которой равен  $\theta_B$ . При дальнейшем увеличении угла падения распространение волн в двухосном кристалле становится невозможным и вся энергия отражается обратно в среду 1. (Случай полного внутреннего отражения для обеих волн в кристалле.) Из рис. 1 следует, что порогу образования волн типа 1 и 2 соответствует касание прямых AA' и BB' к сечению поверхностей показателей преломления. Векторы Пойнтинга для этих волн в пороговых точках будут лежать в плоскости раздела двух сред (но не обязательно в плоскости паде-

ния). Очевидно, что при повороте плоскости падения следы пороговых точек  $A'$  и  $B'$  дадут на поверхности показателей преломления двухосного кристалла «линии пороговых точек». Очевидно, что уравнение этих линий получается в результате совместных решений дисперсионного уравнения (3) и уравнения, получающегося путем дифференцирования этого уравнения по компоненте  $n_z$  вектора  $\mathbf{n}$  (напомним, что ось  $z$  перпендикулярна плоскости раздела).

3. Чтобы рассмотреть пороговые особенности в амплитудах и фазах отраженных и преломленных от границы двухосного кристалла волн, найдем поведение решений дисперсионного уравнения (3) вблизи от линии пороговых точек для одной из волн в кристалле.

Вводя обозначения  $a_1 = n\mathbf{g}_1$ ,  $a_2 = n\mathbf{g}_2$ ,  $a_3 = n^2/2$ ,  $R = 2a_3 - \alpha - \beta\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$ , перепишем дисперсионное уравнение (3) в следующем виде:

$$T(a_1, a_2, a_3) = \alpha R^2 + 2\beta R a_1 a_2 + \beta^2 (a_1^2 + a_2^2 - \alpha). \quad (4)$$

Рассмотрим малые отклонения от линий пороговых точек в дисперсионном уравнении (4), заменяя  $\mathbf{n}_n$  — соответствующие линиям пороговых точек — на  $\mathbf{n}_n + \delta\mathbf{n}$ . В первом порядке по  $\delta\mathbf{n}$  из (4) найдем

$$\left( \frac{\partial T}{\partial a_1} \mathbf{g}_1 + \frac{\partial T}{\partial a_2} \mathbf{g}_2 + \frac{\partial T}{\partial a_3} \mathbf{n}_n \right) \delta\mathbf{n} = 0 \quad \text{или} \quad T_{,k} (\mathbf{g}_k \delta\mathbf{n}) = 0, \quad (5)$$

где введены обозначения  $\partial T / \partial a_i = T_{,i}$ ,  $\mathbf{n}_n = \mathbf{g}_3$ . По повторяющимся индексам  $i$  и  $k$  здесь и ниже подразумевается суммирование от 1 до 3. Очевидно, что на линии пороговых точек выполняется условие

$$T_{,k} (\mathbf{g}_k)_z = 0, \quad (6)$$

где  $(\mathbf{g}_k)_z$  —  $z$ -компонента вектора  $\mathbf{g}_k$ . С точностью до второго порядка по компонентам  $\delta\mathbf{n}$  из (4) найдем

$$T_{,ik} (\mathbf{g}_i \delta\mathbf{n}) (\mathbf{g}_k \delta\mathbf{n}) + T_{,3} (\delta n_z)^2 = 0. \quad (7)$$

Вводя обозначения  $\mathbf{g}_i = (\mathbf{x}_i, l_i)$  ( $\mathbf{x}_i$  — проекция вектора  $\mathbf{g}_i$  на границу раздела, а  $l_i$  —  $z$ -компонента вектора  $\mathbf{g}_i$ ),  $\mathbf{x}_3 \equiv \mathbf{x}$ ,  $l_3 \equiv n_z$ , для  $\delta n_z$  из (7) найдем следующее уравнение:

$$A (\delta n_z)^2 + 2B \delta n_z + C = 0, \quad (8)$$

где

$$A = T_{,ik} l_i l_k + T_{,3}, \quad B = T_{,ik} (\mathbf{x}_i \delta \mathbf{x}) l_k,$$

$$C = T_{,ik} (\mathbf{x}_i \delta \mathbf{x}) (\mathbf{x}_k \delta \mathbf{x}) + T_{,3} (\delta \mathbf{x})^2.$$

Решения уравнения (8), очевидно, имеют вид

$$\delta n_z = -B/A \pm \sqrt{(B^2 - AC)/A}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что в общем случае при отходе от линии пороговых точек величина  $\delta n_z$  содержит два слагаемых, одно из которых является квадратным корнем  $\zeta = \sqrt{B^2 - AC}$ . Очевидно, что именно этот корень и является пороговым параметром. Он равен нулю на линии пороговых точек, чисто действителен в отсутствие полного внутреннего отражения и чисто мнимый при полном внутреннем отражении.

Вычисления показывают, что  $z$ -компонента усредненного по времени вектора Пойнтинга  $S_z$  при отходе от линии пороговых точек на  $\delta n$  оказывается пропорциональной тому же самому пороговому параметру  $\zeta$ . Действительно,

$$S_z \approx T_{,ik} l_i (\mathbf{g}_k \delta \mathbf{n}) + T_{,3} \delta n_z = A \delta n_z + B = \pm \sqrt{B^2 - AC}. \quad (10)$$

Именно существование корневого порогового параметра и пропорциональность  $S_z$  компоненты вектора Пойнтинга этому параметру и дают возможность утверждать, что амплитуды и фазы всех волн на пороге открытия или закрытия любого из каналов в двухосном кристалле вблизи порога  $\zeta = 0$  имеют следующий вид:

$$A_i + \zeta B_i, \quad (11)$$

где  $A_i$  и  $B_i$  — функции, зависящие от частоты, волнового вектора и от параметров сред по обе стороны от границы раздела. Строгое доказательство этого проводится аналогично тому, как это делается в работе [3]. Оно опирается на существование унитарной матрицы рассеяния (отсутствие поглощения) аналитичности амплитуд всех волн по параметру  $\zeta$  на существование корневого параметра и пропорциональность  $S_z$  этому параметру вблизи порога [3, 5].

Отметим, что упомянутый характер поведения амплитуд и фаз вблизи порога приводит к резким изломам графиков соответствующих величин в пороговых точках. Производные же этих величин (например, по углу падения) при приближении, по крайней мере с одной стороны, к пороговой точке стремятся к бесконечности как  $\zeta^{-1}$ .

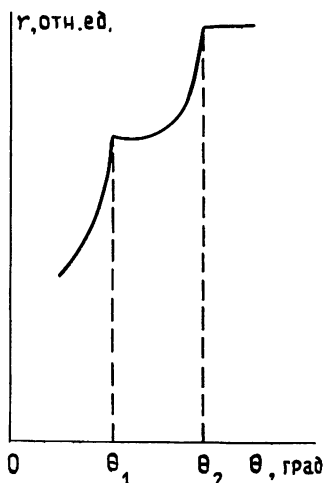


Рис. 2.

На рис. 2 показано характерное аномальное поведение амплитуды, отраженной от двухосного кристалла в изотропную среду волны вблизи углов полного внутреннего отражения для волн типа 1 и 2 —  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Отметим, что среда 1 может быть и анизотропной (одноосный или двухосный кристалл и др.). Корневой характер пороговых особенностей, очевидно, при этом не изменится.

Аналогичный характер поведения амплитуд и фаз всех волн вблизи пороговых точек сохранится, если на границе раздела с двухосным кристаллом имеется одномерная или двумерная преломляющая решетка, при этом по обе стороны от границы раздела появляются дифракционные спектры различных порядков, определяемые векторами обратной решетки периодической структуры, разделяющей две среды.

Пороговые аномалии будут возникать во всех волнах на пороге образования дифракционного спектра любого порядка.

4. Аномальное поведение амплитуд волн вблизи порогов может быть, в принципе, использовано для определения характеристик двухосных кристаллов. Действительно, поворачивая плоскость падения и следя за аномалиями волны в первой среде, можно найти проекцию поверхности показателей преломления двухосного кристалла на плоскость раздела двух сред. Для полного определения поверхности показателя преломления во второй среде необходимо знать проекцию этой поверхности на некоторую другую плоскость. Для этого необходимо провести измерение с кристаллом, у которого имеются две плоские границы, лежащие в разных плоскостях.

Если на границе кристалла имеется периодическая структура, то для определения поверхности показателя преломления достаточно проведения измерений с кристаллом, имеющим одну плоскую границу. В этом случае более детальная информация получается из-за возмож-

ности наблюдения пороговых особенностей для волн различных дифракционных порядков.

В заключение отметим, что слабое затухание в кристалле, неоднородности и конечные размеры кристалла, а также отличие падающей волны от плоской приведут к некоторому размытию пороговых особенностей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. И., Филиппов В. В. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. — Минск: Наука и техника, 1976.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматгиз, 1959.
3. Болотовский Б. М., Лебедев А. Н. — ЖЭТФ, 1967, 53, с. 1349.
4. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. — М.: Наука, 1966.
5. Wood R. — Phys. Rev., 1935, 48, p. 928.
6. Steward J. E., Galloway W. S. — Appl. Opt, 1962, 1, p. 421.

Всесоюзный научно-исследовательский  
институт физико-технических  
и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию  
11 февраля 1980 г.

#### THRESHOLD PECULIARITIES IN WAVES REFLECTED AND REFRACTED AT THE BOUNDARY OF BIAXIAL CRYSTAL

*Yu. M. Aivazyan, B. M. Bolotovskij*

It is shown that amplitudes and phases of electromagnetic waves reflected and refracted by the boundary of biaxial crystal experience sharp bends at the threshold of the complete internal reflection for each wave in the biaxial crystal. It is noted that such anomalous behaviour of amplitudes and phases may be used for experimental definition of parameters of biaxial crystals.

#### Аннотации депонированных статей

УДК 534.21

#### СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ СПЕКТРА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ С РЕФРАКЦИЕЙ

*С. Н. Зеленский*

Получено уравнение относительно статистического момента первого порядка спектра волнового поля и проанализировано его решение при распространении волны в статистически стационарном турбулентном потоке жидкости с регулярной рефракцией. Исследовано влияние хаотического движения частиц среды на дифракцию, затухание и распространение акустических волн. Произведено сравнение двух механизмов рассеяния волн в океане, вызванных турбулентными пульсациями частиц жидкости и флуктуациями показателя преломления

Статья депонирована в ВИНИТИ,  
рег № 1006—81 Деп от 4 марта 1981 г