

УДК 621.371.255

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВОГО ПУЧКА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. П. Кандидов, В. И. Леденев

Оценки статистических характеристик волновых пучков получены путем усреднения по реализациям процесса распространения излучения в случайно-неоднородной среде. Для получения отдельной реализации численно решается на ЭВМ задача о прохождении пучком эквидистантной последовательности фазовых экранов с заданным спектром флуктуаций поля на экране. Отклонение оценок рассмотрено на примере эффективной ширины пучка. Полученное в численном эксперименте поведение статистических характеристик согласуется с известным из литературы.

1. Для исследования распространения оптического излучения в атмосфере широко применяется аналитический аппарат [1]. Ряд задач линейной атмосферной оптики решен численно с помощью метода Монте-Карло [2]. Представляет интерес развитие этой методики на основе модели, предложенной в [3], где случайно-неоднородная среда представляется последовательностью N хаотических фазовых экранов. В этом случае статистические характеристики световых пучков определяются путем усреднения по реализациям, получаемым на ЭВМ для процесса прохождения излучения через цепочку фазовых экранов. Достоинством такого подхода является возможность одновременного изучения различных характеристик и простота учета совместного влияния различных явлений на распространение пучка, например, нелинейности среды, неоднородности ее параметров.

В настоящей работе возможности метода статистических испытаний на основе модели фазовых экранов рассматриваются на примере распространения ограниченного светового пучка в линейной случайно-неоднородной среде.

2. Отдельная реализация распространения пучка в случайно-неоднородной среде описывается параболическим уравнением [1]

$$2ik(\partial E/\partial z) = \Delta_{\perp} E + k^2 \tilde{\epsilon}(x, y, z) E, \quad 0 \leq z \leq z_N, \quad (1)$$

где $\tilde{\epsilon}(x, y, z)$ — случайное поле флуктуирующей части диэлектрической проницаемости ϵ .

Пусть на среду падает когерентный пучок гауссова профиля с плоским фазовым фронтом

$$E_0(x, y, 0) = \exp[-(x^2 + y^2)/2a^2], \quad (2)$$

где a — радиус пучка. Разобьем трассу на N слоев толщиной Δz , так что $z_N = N\Delta z$, и на каждом слое будем решать цепочку уравнений

$$E_s^{(j)}(x, y, (j-1)\Delta z) = E_s^{(j-1)}(x, y, (j-1)\Delta z), \quad (3a)$$

$$E_s^{(1)}(x, y, 0) = E_0(x, y, 0),$$

$$[2ik(\partial/\partial z) - k^2 \tilde{\epsilon}(x, y, z)] E_s^{(j)} = 0, \quad (j-1)\Delta z \leq z \leq j\Delta z;$$

$$E_s^{(j)}(x, y, (j-1)\Delta z) = E_s^{(j)}(x, y, j\Delta z), \quad (36)$$

$$(2ik(\partial/\partial z) - \Delta_{\perp}) E_s^{(j)} = 0, \quad (j-1)\Delta z \leq z \leq j\Delta z, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом, на каждом слое j вначале учитываются в геометрическом приближении турбулентные искажения фазового профиля E , а затем решается задача регулярной дифракции на отрезке Δz для пучка с искаженным фазовым фронтом.

Решение уравнения (3а) можно записать в виде

$$E_s^{(j)}(x, y, j\Delta z) = E_s^{(j-1)}(x, y, (j-1)\Delta z) e^{-is^{(j)}}, \quad (4)$$

$$S^{(j)}(x, y) = \frac{k}{2} \int_{(j-1)\Delta z}^{j\Delta z} \tilde{\epsilon}(x, y, z) dz.$$

Пусть наибольший продольный масштаб L поля $\tilde{\epsilon}$ удовлетворяет условию $L \leq \Delta z$, тогда реализации поля $S^{(j)}$ при различных j статистически независимы, т. е.

$$\langle S^{(j)}(x', y') S^{(k)}(x'', y'') \rangle = (k^2/4) A(x' - x'', y' - y'') \delta_{jk}.$$

Поле $S^{(j)}$ считаем однородным, изотропным, с гауссовым законом распределения и $\langle S^{(j)} \rangle = 0$. Дисперсия флуктуаций фазы на экране равна $\sigma_s^2 = k^2 A(0)/4$.

Оценим сверху величину шага Δz . Для модели фазовых экранов [3] функцию когерентности второго порядка электрического поля $\Gamma_2(\rho, \rho_+, z_N) = \langle E_s^{(N)}(\rho) E_s(\rho + \rho_+) \rangle$ можно записать в виде

$$\Gamma_2(\rho, \rho_+, z_N) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2ip' d^2\rho'_+ \exp(ip'\rho_+ - ip'\rho'_+) \times \quad (5)$$

$$\times \exp(-\pi k^2 \Delta z/4) \sum_{l=1}^N H \left[\rho - \frac{\rho'}{k} (z_N - (j-1)\Delta z) \right] \Gamma \left(\rho - \frac{\rho'}{k} z_N, \rho'_+, 0 \right),$$

где $H(\rho) = (1/\pi) [A(0) - A(\rho)]$. В пределе при $N \rightarrow \infty$ и $\Delta z \rightarrow 0$, так что $N\Delta z = z_N = \text{const}$, это выражение переходит в известное из литературы [1]. Сумма, стоящая в показателе экспоненты, представляет собой интеграл от функции H в пределах $[0, z_N]$, вычисленный методом прямоугольников. Ошибка такого приближения мала, если $|p'|\Delta z|_k < < |\rho|$. Отсюда можно получить следующую оценку для шага Δz :

$$\Delta z < k l^2 / \pi. \quad (6)$$

Таким образом, ошибка, вызванная заменой непрерывной случайно-неоднородной среды последовательностью фазовых экранов, мала, если дифракционная длина $k l^2$ наименьшего масштаба неоднородностей превышает шаг Δz .

Решение системы (3) дает одну реализацию процесса распространения излучения. Решив M раз систему (3) при различных S , можно оценить одновременно любые статистические характеристики χ_i путем усреднения по этим M реализациям.

3. При численном осуществлении предложенного алгоритма двумерное случайное поле $S^{(j)}(x, y)$ моделируется методом скользящего суммирования [4]. В работе используется спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости

$$\Phi_{\epsilon}(x) = 0,033 C_{\epsilon}^2 (x_0^2 + x^2)^{-11/6}, \quad x_0 = 2\pi/L. \quad (7)$$

В этом случае $A(0) = 0,036 C_\varepsilon^2 \Delta z L^{5/3}$.

Уравнение (36) решается в спектральной области с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье. Вследствие дискретизации по x и y спектр пространственных гармоник ограничивается при этом сверху частотой Найквиста $\kappa_c = \pi/\Delta x$ ($\Delta x = \Delta y$). Усреднение для получения статистических характеристик χ_l проводится с помощью последовательного анализа по формуле

$$\langle \chi_l \rangle_M = \langle \chi_l \rangle_{M-1} (1 - 1/M) + (1/M) \chi_{l,M},$$

где M — номер текущей реализации, а угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю.

Отклонения в поведении статистических характеристик при таком подходе связаны с конечностью числа реализаций M и с дискретизацией по x , y и z . Представление непрерывной среды конечным числом фазовых экранов вызывает отклонение оценок для Γ_2 , зависящее от ρ и числа пройденных экранов N . Если $\rho = 0$ и функция $H(y)$ растет, например, как y^2 , ошибка интегрирования $H(y)$ методом прямоугольников, влияющая на смещение оценок Γ_2 , может быть представлена в виде

$$\mu_N = \frac{3}{N^3} \sum_{j=1}^N j^2 = 1 + 1,5/N + 0,5/N^2. \quad (8)$$

Отсюда видно, что при $N > 15$ точность вычисления интеграла от H в выражении (5) не хуже 0,1 и смещение оценок Γ_2 должно быть незначительным.

Из результатов работы [5] следует, что μ_N определяет смещение оценки квадрата эффективной ширины пучка $a_{\text{эфф}}$ в зависимости от числа пройденных экранов N . Так как всегда $\mu_N > 1$, эффективная ширина пучка завышена.

Как уже указывалось, наибольшая частота в спектре $\tilde{\varepsilon}$ определяется $\kappa_c = \pi/\Delta x$. Турбулентный вклад в $a_{\text{эфф}}^2$ на сетке может быть установлен в виде

$$a_{\text{эфф}}^2 - \frac{z^2}{k^2 a^2} = \Delta_T^2 = \frac{\pi^2}{3} z_N^3 \int_0^{\kappa_c} \Phi_\varepsilon(\kappa, 0) \kappa^3 d\kappa \mu_N. \quad (9)$$

Отсюда для спектральной плотности (7) с учетом (8) получим

$$\Delta_T^2 = 0,3257 C_\varepsilon^2 z_n^3 \kappa_c^{1/3} \mu_n \varphi_c, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

где при $\kappa_0 < \kappa_c$

$$\varphi_c \approx (\kappa_0^2/\kappa_c^2 + 1)^{1/6} - 1,2 (\kappa_0/\kappa_c)^{1/3}.$$

Множитель φ_c учитывает конечность отношения внешнего масштаба и шага сетки.

В теоретических исследованиях широко используется следующий вид спектральной плотности с ограниченной верхней частотой [6]:

$$\Phi_\varepsilon(\kappa) = 0,033 C_\varepsilon^2 \kappa^{-11/3} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2).$$

В этом случае из выражения (9) при $\kappa_c \rightarrow \infty$ следует

$$\Delta_T^2 = 0,3035 C_\varepsilon^2 z^3 \kappa_m^{1/3}. \quad (11)$$

Сравнение (11) и (10) при $N \gg 1$ и $\kappa_0 \ll \kappa_c$, т. е. $\varphi_c = 1$ показывает, что $\kappa_m \sim \kappa_c$. Шаг пространственной сетки Δx определяет внутренний масштаб неоднородностей среды и для кармановского спектра флуктуаций (7) $\kappa_m = 1,23 \kappa_c$.

4. В проведенном численном эксперименте изучалось поведение пучка на трассах длиной $z_N = 0,5 ka^2$ с различными интенсивностями флуктуаций $\tilde{\epsilon}$. На трассах располагалось по $N = 16$ экранов с $\sigma_s^2 = 0,0827, 0,0413, 0,0207, 0,0103$ и $L/a = 5$, причем $a/\Delta x = 4$. Число реализаций в ансамблях для каждого значения σ_s^2 составляло $M = 40$.

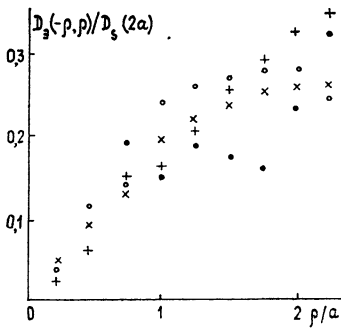


Рис. 1.

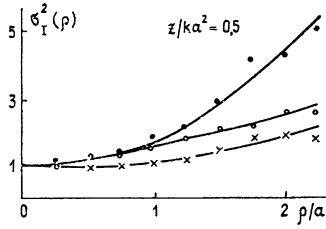


Рис. 2.

На рис. 1 показано поведение структурной функции флуктуаций фазы пучка D_s (крестики — $\sigma_s^2 = 0,0827$, светлые кружки — $\sigma_s^2 = 0,0413$, темные кружки — $\sigma_s^2 = 0,0206$, плюсы — $\sigma_s^2 = 0,0103$). Функция D_s , нормирована на значение структурной функции флуктуаций фазы сферической волны $D_s(2a)$, вычисленной на диаметре передающей апертуры:

$$D_s(2a) = 0,274 C_s^2 k^2 z(2a)^{5/3} = 4,46 N \sigma_s^2 (\chi_0 a)^{5/3}.$$

Поведение D_s совпадает с известным из литературы.

Нормированный профиль дисперсии флуктуаций интенсивности значительно возрастает на краю пучка на первых по трассе экранах, а затем уменьшается. При увеличении $D_s(2a)$ в плоскости $z_N = 0,5 ka^2$ профиль медленно сглаживается. На рис. 2 показано поведение профиля дисперсии флуктуаций интенсивности при увеличении $D_s(2a)$ в плоскости $z_N = 0,5 ka^2$ (темные кружки — $D_s = 2,17$, светлые кружки — $D_s = 4,33$, крестики — $D_s = 8,66$).

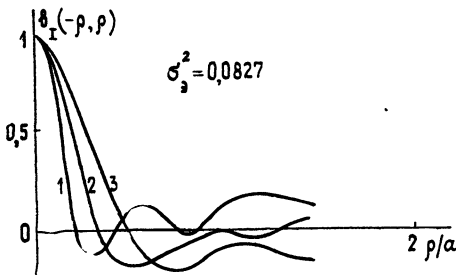


Рис. 3.

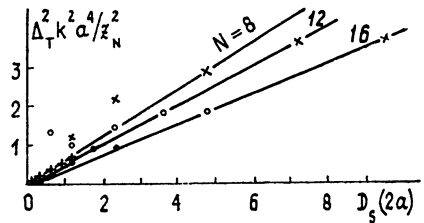


Рис. 4.

Поведение коэффициента корреляции флуктуаций интенсивности $b_I(-\rho/a, \rho/a)$ зависит от z/ka^2 . Изменения величины σ_s^2 не повлияли существенно на поведение b_I , что связано, по-видимому, с малым диапазоном изменения $D_s(2a)$. На рис. 3 показано поведение b_I для значе-

ния $\sigma_s^2 = 0,0827$ при $z/ka^2 = 0,0625$ — кривая 1, 0,25 — кривая 2 и 0,5 — кривая 3. Из рис. 3 видно, что при увеличении z/ka^2 масштабы корреляционной функции флуктуаций интенсивности растут.

Турбулентную добавку к квадрату эффективной ширины пучка удобно характеризовать величиной $\Delta_T^2 k^2 a^4 / z_N^2$, линейно зависящей от $D_s(2a)$. Значения $\Delta_T^2 k^2 a^4 / z_N^2$ при $z_N = 0,5 ka^2$ лежат, как видно из

рис. 4, на прямой линии. На начальных участках трассы турбулентный вклад в $a_{эфф}^2$ завышен. Смещение оценки связано, как уже отмечалось, с дискретизацией по z (см. формулы (10), (8) с $N = 16, 12, 8, \dots$).

Среднеквадратичное отклонение $\sigma_I(0)$ интенсивности на оси пучка линейно растет при увеличении $D_s^{1/2}(2a)$ (рис. 5). Угол наклона прямой совпадает со значением, оцененным по [6].

Использование в численном эксперименте случайного поля (7) с соотношением $L/a = 7$ существенно не изменило приведенных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А, Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. — М: Наука, 1978.
2. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. — Новосибирск: Наука, 1976.
3. Ерухимов Л. М, Урядов В. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1968, 11, № 12, с. 1852.
4. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1971.
5. Петрищев В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, 19, № 9, с. 1416.
6. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1976.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 29 мая 1980 г.

USING THE METHOD OF STATISTICAL TESTS TO THE INVESTIGATION OF A WAVE BEAM PROPAGATION IN A RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

V. P. Kandidov, V. I. Ledenev

Estimations of wave beam statistical characteristics have been obtained by averaging over realizations of the radiation propagation process in a randomly inhomogeneous medium. To obtain a separate realization a problem is computed numerically on a beam passing equidistant successions of phase screens with the given spectrum of the field fluctuations on the screen. By an example of the effective beam width estimation errors have been considered. Behaviour of statistical characteristics agrees with the known one from periodics.