ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 4 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 538.56 : 519.25

СРЕДНЕЕ ПОЛЕ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА, ОТРАЖЕННОГО С ОБРАЩЕНИЕМ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

А. В. Половинкин, А. И. Саичев

Исследовано в марковском приближении среднее поле лазерного пучка, отраженного от зеркала, обращающего волновой фронт (зеркала ОВФ), в турбулентной атмосфере. Описан эффект улучшения восстановления зеркалом ОВФ волнового фронта падающей волны в случайно-неоднородной среде, по сравнению с зеркалом ОВФ в однородной среде, за счет увеличения случайными неоднородностями эффективных размеров зеркала ОВФ.

1. В связи с разработкой адаптивных систем для волн оптического диапазона актуален вопрос об эффективности таких систем для волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере. Типичным элементом адаптивных систем является зеркало с обращением волнового фронта (зеркало ОВФ) [1]. Ограниченность его размеров, турбулентные неоднородности на трассе распространения волны ухудшают адаптивные свойства зеркала ОВФ. Одной из важнейших характеристик эффективности зеркала ОВФ является степень восстановления когерентных свойств отраженного от него волнового пучка. Большую информацию о когерентных свойствах отраженного пучка содержит его среднее поле. Статистическому анализу в марковском приближении среднего поля пучка, отраженного от зеркала ОВФ в турбулентной атмосфере, и посвящена данная статья.

2. Будем описывать распространение волнового пучка в турбулентной среде параболическим уравнением квазиоптики

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i}{2k}\Delta_\perp u + \frac{ik}{2}\varepsilon(x, \rho)u, \quad u(0, \rho) = u_0\left(\frac{\rho}{a}\right),$$

где x — продольная, ρ — поперечные координаты, a — характерный размер падающего на турбулентную среду пучка, $\varepsilon(x, \rho)$ — флуктуации диэлектрической проницаемости среды. Пусть в плоскости $x = L$ помещено зеркало ОВФ с коэффициентом отражения $f(\rho/l)$, где l — эффективный размер зеркала. Будем интересоваться полем отраженного пучка в плоскости $x = 0$ — $v_L(\rho)$. С помощью теоремы взаимности $v_L(\rho)$ удается записать в виде, удобном для использования марковского приближения [2, 3]:

$$v_L(\rho) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u_0^*(p/a) f(q/l) G(0, \rho; L, q) G^*(0, p; L, q)\, dq\, dp,$$

где функция $G(0, q; x, \rho)$ также удовлетворяет параболическому уравнению квазиоптики с граничным условием $G(0, q; 0, \rho) = \delta(q - \rho)$. Соответственно среднее отраженное поле равно:

$$\langle v_L(\rho) \rangle = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u_0^*(p/a) f(q/l)\, \Gamma(\rho, p; q, 0; L)\, dp\, dq. \tag{1}$$

Сюда входит взаимная функция когерентности двух сферических волн, излучаемых в плоскости $x = 0$:

$$\Gamma(\rho, p; q, s; x) = \langle G(0, \rho; x, q + s/2) G^*(0, p; x, q - s/2) \rangle,$$

которая в марковском приближении удовлетворяет уравнению (см., например, [4])

$$\partial\Gamma/\partial x = (i/k)(\nabla_q \nabla_s)\Gamma - (k^2/4) D(s)\Gamma,$$

$$\Gamma(\rho, p; q, s; 0) = \delta(\rho - q - s/2)\,\delta(p - q + s/2).$$

Решение этого уравнения хорошо известно (см., например, [4]). Подставляя его в (1), после несложных преобразований получим

$$\langle v_L(\rho) \rangle = \left(\frac{k}{L}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0^* \left(\frac{\rho + q}{a}\right) F\left(\frac{lkq}{L}\right) \exp\left\{ - i\frac{k}{L}(q\rho) - \frac{ik}{2L} q^2 - \frac{k^2}{4} \int\limits_0^L D\left[q\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right] dx \right\} dq, \tag{2}$$

где

$$F(\Omega l) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q}{l}\right) e^{i(q\Omega)}\, dq.$$

В дальнейшем будем полагать для простоты, что центральная ось падающего пучка и зеркала совпадают с осью x (при $\varkappa > 1$ $F(\varkappa)$, $u_0(\varkappa) \approx 0$).

Для турбулентной среды можно положить $D(\rho) = \pi p C_\varepsilon^2 \rho^{5/3}$, $p \approx 0{,}46$, C_ε^2 — структурная характеристика неоднородностей среды. В этом случае среднее отраженное поле (2) примет вид

$$\langle v_L(\rho) \rangle = \left(\frac{k}{L}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0^* \left(\frac{\rho + q}{a}\right) F\left(\frac{lkq}{L}\right) \exp\left[- i\frac{k}{L}(q\rho) - \frac{ik}{2L} q^2 - \gamma\left(\frac{q}{\rho_к}\right)^{5/3} \right] dq. \tag{3}$$

Здесь $\gamma = 3\pi p/32$, $\rho_к = (C_\varepsilon^2 k^2 L)^{-3/5}$ — радиус когерентности первоначально плоской волны, прошедшей в турбулентной среде трассу длины L.

3. Рассмотрим вначале отражение от зеркала ОВФ первоначально плоской волны. Положив в (3) $a = \infty$, получим

$$\langle v_L(\rho) \rangle = \frac{k}{L} u_0^* \int\limits_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{s}{d}\right) \exp\left[- i(Rs) - i(s^2/2) - 0{,}44\,\beta_0^2 s^{5/3}\right] ds. \tag{4}$$

Здесь обозначено: $s = q\sqrt{k/L}$, $R = \rho\sqrt{k/L}$, $d = \sqrt{L/kl^2}$, $\beta_0^2 = 0{,}307 C_\varepsilon^2 k^{7/6} L^{11/6}$ — рассчитанный в приближении МПВ средний квадрат относительных флуктуаций первоначально плоской волны, прошедшей в турбулентной среде трассу длины L.

Введем две характерные длины трассы L_0 и L^*. Пусть L_0 — длина трассы, на которой $\beta_0^2 \sim 1$, а $\rho_к^0 \sim \sqrt{L_0/k}$ — соответствующий радиус когерентности. Обозначим L^* расстояние до зеркала ОВФ, начиная с которого (при $L > L^*$) случайные неоднородности начинают сказываться на виде среднего отраженного поля (4). L^* находится из условия $\beta_0^{6/5} d \sim 1$ или эквивалентного ему $\beta_0^{12/5} \rho_к / l \sim 1$. Поведение среднего отраженного поля (4) с изменением L существенно различно в случаях $l < \rho_к^0$ и $l > \rho_к^0$ (когда, соответственно, $L_0 > L^*$ и $L_0 < L^*$).

Проанализируем вначале случай $l < \rho_к^0$. При этом расстояние до зеркала ОВФ разбивается на четыре интервала $(0, L_1)$, (L_1, L^*), (L^*, L_0), (L_0, ∞), где L_1 определяется из условия $d = \sqrt{L_1/kl^2} = 1$. При $L < L^*$ $\langle v_L \rangle = v_L^0(\rho)$ — отраженному полю в однородной среде. Если к тому же $L \ll L_1$, то $\langle v_L \rangle = u_0^* f(\rho/l)$ — дифракция несущественна и отраженное поле повторяет форму зеркала. При $L^* \lesssim L < L_0$ на форму отраженного поля влияют и дифракция на ограниченном зеркале и случайные неоднородности среды. При $L > L_0$ отраженное поле может быть записано так:

$$\langle v_L(\rho) \rangle = u_0^* \int_{-\infty}^{\infty} f(q/l)\, W(\rho - q;\, L)\, dq, \tag{5}$$

где

$$W(\rho;\, L) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i(\rho\mathbf{\Omega}) - \gamma\left(\frac{L\Omega}{k\rho_к}\right)^{5/3}\right] d\mathbf{\Omega}. \tag{6}$$

Для достаточно больших зеркал ОВФ $l > \rho_к^0$, $L_1 > L^* > L_0$, и формула (5) справедлива при любых L. Из (5) видно, что при $L > L_0$, L^* случайные неоднородности приводят к увеличению пятна среднего поля $\langle v_L(\rho) \rangle$ с ростом L. Это увеличение пятна $\langle v_L(\rho) \rangle$ можно трактовать как следствие увеличения эффективных размеров зеркала ОВФ. Как будет показано ниже, увеличение эффективного размера зеркала ОВФ за счет случайных неоднородностей приводит на достаточно больших L к улучшению, по сравнению с однородной средой, восстановления зеркалом ОВФ волнового фронта и формы падающей волны. Поэтому остановимся на обсуждении формулы (5) подробнее. Улучшение свойств зеркала ОВФ в случайно-неоднородной среде можно качественно понять, рассмотрев в приближении геометрической оптики отражение от зеркала ОВФ коллимированного пучка размером $a \gg l$. В однородной среде при отражении восстанавливается (с точностью до комплексного сопряжения) только фаза центральных лучей, выходящих в плоскости $x = 0$ из пятна $\rho \leqslant l$ и $v_L = u_0^*(\rho/a) f(\rho/l)$. В случайно-неоднородной же среде, из-за случайного блуждания лучей, восстанавливается фаза лучей, пришедших из области $\rho \sim \sigma_\rho$, где σ_ρ — стандарт отклонения поперечных координат лучей в случайно-неоднородной среде от их поперечных координат в однородной среде. При этом среднее отраженное поле в приближении геометрической оптики примет вид

$$\langle v_L(\rho) \rangle = u_0^*(\rho/a) \int_{-\infty}^{\infty} f(q/l)\, W(\rho - q;\, L)\, dq, \tag{7}$$

где $W(\rho;\, L)$ — в данном случае плотность вероятности отклонений поперечных координат лучей. При $\sigma_\rho \gg a$ $\langle v_L \rangle = u_0^*(\rho/a)\, 4\pi^2 F(0)\, W(0;\, L)$ — происходит полное восстановление формы и волнового фронта падающего на зеркало ОВФ пучка. Таким образом, с точки зрения среднего отраженного поля, неоднородности среды делают зеркало ОВФ практически безграничным, но полупрозрачным с коэффициентом отражения $4\pi^2 F(0)\, W(0;\, L) \sim l^2/\sigma_\rho^2$.

Заметим, что если на расстоянии $L > L_0$, L^* $\rho_к < l_0$, где l_0 — внутренний масштаб турбуленности, то входящую в (2) $D(\rho)$ нужно положить равной $D\rho^2$ $(D \sim C_\varepsilon^2 l_0^{-1/3})$, а в качестве $W(\rho; L)$ в (5) взять функцию

$$W(\rho;\ L) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i(\Omega\rho) - \frac{D}{12} L^3 \Omega^2\right) d\Omega = \\ = 3/\pi D L^3 \exp(-3\rho^2/DL^3), \tag{8}$$

равную, как известно, вероятностному распределению отклонения поперечных координат лучей в случайно-неоднородной среде в приближении геометрической оптики $(\sigma_\rho^2 = DL^3/6)$. При этом формулы (5) и (7) с точностью до замены u_0^* на $u_0^*(\rho/a)$ совпадают.

4. Перейдем к анализу отраженного от зеркала ОВФ пучка в оптимальном случае, когда радиус пучка при падении на зеркало в однородной среде минимален. Для этого положим $a = \sqrt{L/k}$ и будем считать, что пучок сфокусирован на зеркало: $u_0^*(\boldsymbol{R}) = \tilde{u}_0^*(\boldsymbol{R}) \exp(iR^2/2)$. Тогда среднее отраженное поле (3) можно переписать:

$$\langle v_L(\rho) \rangle = \frac{k}{L} \exp\left(i\frac{R^2}{2}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0^*(\boldsymbol{R}+s) F\left(\frac{s}{d}\right) \exp(-0{,}44\,\beta_0^2 s^{5/3})\, ds.$$

Как и в предыдущем случае падения на зеркало ОВФ первоначально плоской волны, поведение $\langle v_L(\rho) \rangle$ различно при $l < \rho_к^0$ и $l > \rho_к^0$. Рассмотрим вначале зеркало ОВФ малых размеров $l \ll \rho_к^0$. Как и раньше, имеется четыре интервала L, где поведение $\langle v_L(\rho) \rangle$ качественно различно. При $L \ll L_1 < L^*$ весь пучок фокусируется на зеркало ОВФ, случайные неоднородности не влияют на среднее отраженное поле и оно совпадает с $u_0^*(\boldsymbol{R})$. При $L_1 < L < L^*$ неоднородности среды все еще не влияют на вид $\langle v_L(\rho) \rangle$, но за счет дифракции на ограниченном зеркале ОВФ $\langle v_L(\rho) \rangle$ уже не равно $u_0^*(\boldsymbol{R})$, а размеры пятна среднего отраженного поля $\sim L/kl$ становятся больше размера пучка $a = \sqrt{L/k}$ и увеличиваются с ростом L. При $L^* \leqslant L < L_0$ на вид $\langle v_L(\rho) \rangle$ влияют как дифракция на ограниченном зеркале ОВФ, так и случайные неоднородности:

$$\langle v_L(\rho) \rangle = \exp\left(\frac{iR^2}{2}\right) \frac{k}{L} F\left(\frac{kl\rho}{L}\right) \exp\left[-\gamma\left(\frac{\rho}{\rho_к}\right)^{5/3}\right] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0^*(\boldsymbol{R})\, d\boldsymbol{R}.$$

Причем размер пятна среднего поля $\sim \rho_к$ все еще больше радиуса пучка, но начинает уменьшаться с увеличением L. При $L \gg L_0$ среднее отраженное поле снова, как и при $L \ll L_1$, повторяет форму и волновой фронт падающего пучка и выражается формулой $\langle v_L(\rho) \rangle = u_0^*(\boldsymbol{R}) 4\pi^2 F(0) W(0;\ L)$, где при $\rho_к > l_0$ $W(0;\ L) = (k\rho_к/L)^2 \times 0{,}3\,\Gamma(6/5)/\pi\gamma^{6/5}$, а при $\rho_к < l_0$ $W(0;\ L) = 3/\pi DL^3$. Отметим, что улучшение свойств зеркала ОВФ при $L \gg L_0$, с точки зрения восстановления формы и волнового фронта падающего пучка, связано с указанным выше размытием зеркала ОВФ — увеличением его эффективных размеров в случайно-неоднородной среде.

Для достаточно больших зеркал ОВФ $l \gg \rho_к^0$ $\langle v_L(\rho) \rangle$ пропорционально $u_0^*(\boldsymbol{R})$ при любых L и равно

$$\langle v_L(\rho) \rangle = u_0^*(R) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\rho/l) W(\rho;\ L)\, d\rho. \tag{9}$$

5. Проанализируем в заключение среднее отраженное поле пучка произвольных размеров a, сфокусированного на зеркало ОВФ. Для этого подставим в (3) $u_0^*(\rho/a) = \tilde{u}_0^*(\rho/a)\exp(iR^2/2)$ и будем иметь

$$\langle v_L(\rho)\rangle = \left(\frac{k}{L}\right)^2 \exp\left(\frac{iR^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}_0^*\left(\frac{\rho+q}{a}\right)F\left(\frac{lkq}{L}\right)\times$$

$$\times \exp\left[-\gamma(q/\rho_к)^{5/3}\right]dq.$$

Введем характерный радиус пучка $a^* \sim \rho_к^*$, равный радиусу когерентности первоначально плоской волны, прошедшей в турбулентной среде трассу длины L^*. При $a < a^*$ с увеличением L $\langle v_L(\rho)\rangle$ проходит стадии, аналогичные описанным выше в случае $l < \rho_к^0$. При $L < lka$ $\langle v_L\rangle = u_0^*(\rho/a)$. В интервале $lka < L < L^*$ неоднородности еще не влияют на вид $\langle v_L(\rho)\rangle$, но происходит увеличение пятна среднего отраженного поля за счет дифракции на ограниченном зеркале ОВФ. При $L > L^*$ пятно среднего поля становится порядка $\rho_к$ и уменьшается с ростом L. При $a > \rho_к$ среднее отраженное поле снова пропорционально падающему $\langle v_L\rangle = u_0^*(\rho/a)4\pi^2 F(0)W(0;\,L)$ — восстановление формы и волнового фронта зеркалом ОВФ улучшается за счет размывания его эффективных размеров случайными неоднородностями. При $a > a^*$ среднее отраженное поле при любых L выражается формулой (9) с точностью до замены $u_0^*(R)$ на $u_0^*(\rho/a)$.

Авторы благодарны А. Н. Малахову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1 Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах. Сб. научн. тр. / Под ред. В И. Беспалова. — Горький: ИПФ АН СССР, 1979.
2. Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 9, с. 1290.
3. Гельфгат В. И. — Акуст. журн., 1976, 22, с 123.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А, Татарский В И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. (Случайные поля). — М.: Наука, 1978

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
29 мая 1980 г.

THE AVERAGE FIELD OF A LASER BEAM REFLECTED WITH REVERSION OF THE WAVE FRONT

A. V. Polovinkin, A. I. Saichev

In the Markov approximation the average field of a laser beam is investigated which is reflected from a mirror reversing the wave front (RWE mirror) in a turbulent atmosphere. An effect is described of the restoration improvenemt by RWF mirror of the wave front of an incident wave in a randomly inhomogeneous medium in comparison with RWF mirror in a homogeneous medium due to an increase of effective RWF mirror dimensions by random inhomogeneities.