

- 6 Поздняк С. И., Мелитицкий В. А. Введение в статистическую теорию поляризации радиоволн. — М.: Сов радио, 1974.
- 7 Veskanan P. — Radio Science Journal of Research National Bureau of Standards, 1964, 68D, № 5, p: 37.

Поступила в редакцию
24 декабря 1979 г
УДК 621.371

ПРОХОЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ ЧЕРЕЗ ФОКУС

Е. Н. Пелиновский, Ю. А. Степанянц

Выполненные в последние годы экспериментальные исследования цилиндрических солитонов в плазме [1–3], на поверхности жидких металлов [4] и воды [5] показали существование отличий в законах изменения амплитуд волн по сравнению с предсказаниями линейной теории и значительную трансформацию волнового поля в фокальной области. С целью получения более надежных количественных закономерностей в рамках осесимметричного уравнения Кортевега — де Вриза (КдВ) или более точных уравнений были проведены специальные численные расчеты [6, 7]. Те из них, которые соответствовали условиям адиабатичности (медленности изменения параметров солитона), хорошо описываются приближенной теорией цилиндрических солитонов [8], в частности, амплитуда солитона при движении к центру растет по формуле $A \sim r^{-2/3}$ (r — расстояние до центра), а длительность падает, $\tau \sim r^{1/3}$. Вопрос об объяснении имеющихся результатов о прохождении солитонов через фокус, вблизи которого уравнение КдВ заведомо несправедливо, оставался открытым. Между тем, эта задача в значительной степени близка к задаче о трансформации интенсивных акустических волн в прикаустических областях и при полном внутреннем отражении на границе раздела двух сред [9]. Основная идея, использованная в [9] для получения аналитических результатов, связана с возможностью прохождения прикаустических областей по формулам линейной теории. Действительно, даже в рамках нелинейной геометрической акустики неограниченное возрастание амплитуды волны на каустике не сопровождается значительным увеличением роли нелинейности (отношение амплитуд гармоник к амплитуде основной волны остается конечным). Влияние же дифракции в этой области, проявляющееся в изменении фаз каждой гармоники на π становится преобладающим. Очевидно, что такая же ситуация должна иметь место и в диспергирующих средах, в областях с размерами, много меньшими характерных длин нелинейности и дисперсии, можно использовать формулы линейного приближения. В этом случае связь между падающей и трансформированной волнами задается преобразованием Гильберта [9]:

$$\eta_{\text{ref}}(t, r_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{\text{in}}(t', r_0) \frac{dt'}{t - t'}, \quad (1)$$

где \int — означает интегрирование в смысле главного значения. На рис 1 показано поле трансформированной волны, когда падающей волной является солитон КдВ вида

$$\eta_{\text{in}}(r_0, t) = A \operatorname{sch}^2 \frac{r_0 - V_0 t}{\Delta}. \quad (2)$$

Как видно из рисунка, форма трансформированной волны существенно изменилась — волна стала знакопеременной и существенно расширилась. Из формулы (1) можно показать, что поле преобразованного импульса в асимптотике убывает $\sim |t|^{-1}$. Этот результат, однако, в физическом отношении является приближенным, поскольку основной вклад в хвосты импульса дают низкочастотные компоненты спектра волны ($\lambda \gg r_0$), для которых несправедливо преобразование (1) (фокальная область для таких компонент имеет большие размеры и при $\omega \rightarrow 0$ она стремится к бесконечности).

Наиболее подробные данные о трансформации солитона КдВ в фокусе получены на ЭВМ Хвангом и Ву [10] путем решения точных уравнений гидродинамики. На рис 2 представлен профиль волны после прохождения через фокус. На том же рисунке точками показаны результаты расчета по формуле (1). Как видно из рисунка, хорошее совпадение полученных данных наблюдается для головной части волны, ушедшей достаточно далеко от центра. Имеющееся отличие в задней части волны связано с ее близостью к центру, так что дифракция еще не успела окончательно проявиться.

При последующем распространении от центра трансформированная волна, очевидно, не является стационарной и в процессе эволюции должна распадаться на солитоны и осциллирующие цуги. Для расчета этого эффекта мы пренебрегли цилиндрической

расходимость, имея в виду получение оценок сверху на параметры вторичных солитонов (в задачах о полном внутреннем отражении плоской волны на границе раздела двух сред отсюда следуют точные значения амплитуд солитонов). Распад на солитоны обусловлен положительной головной частью отраженного импульса, которая, как было выше показано, хорошо описывается формулой (1). При этом в рамках уравнения

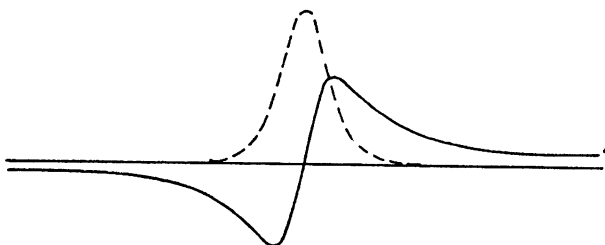


Рис. 1. Преобразование Гильберта (сплошная кривая) от солитона КдВ (пунктирная кривая).

КдВ число вторичных солитонов, рождающихся из отраженной от фокуса волны, равно бесконечности, поскольку связанный с этим уравнением оператор Шредингера [11] имеет для таких медленно убывающих потенциалов бесконечное число уровней энер-

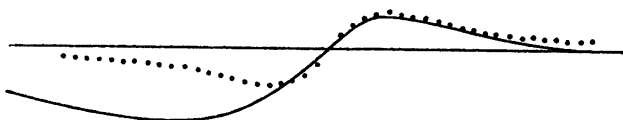


Рис. 2. Форма трансформированной волны после прохождения фокуса солитоном КдВ; сплошная кривая—расчет на ЭВМ [10] в рамках точных уравнений, точки—результат расчета по формуле (1).

гии, накапливающихся к нулю [12]. Амплитуда первого солитона (нормированная на амплитуду исходного, сходящегося к фокусу) равна 0,51, второго — 0,085 и т. д. Поскольку медленное спадание асимптотик трансформированной волны обусловлено недостатком приближения, то физически реальными являются только несколько первых солитонов, причем из-за быстрого убывания их амплитуд наблюдаемыми могут быть лишь один-два солитона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hershkovits N., Romesser T. — Phys. Rev. Lett., 1974, 32, № 11, p. 581.
2. Chen T., Schott L. — Plasma Phys., 1977, 19, p. 959.
3. Nishida Y., Nagasawa T., Kawamata S. — Phys. Rev. Lett., 1979, 42, № 6, p. 379.
4. Бережной И. А., Ивлев Д. Д., Логвинова Р. Н. — ДАН СССР, 1975, 223, № 4, с. 810.
5. Tsukabayashi I., Yagishita T. — J. Phys. Soc. Japan, 1979, 46, № 4, p. 1401.
6. Maxon S., Viecelli J. — Phys. Fluids, 1974, 17, № 8, p. 1614.
7. Ogino T., Takeda S. — J. Phys. Soc. Japan, 1976, 41, № 1, p. 257.
8. Ко К., Кухл Н. Н. — Phys. Fluids, 1979, 22, № 7, p. 1343.
9. Островский Л. А., Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е. — Акуст. журн., 1976, 22, № 6, с. 914.
10. Chwang A. T., Wu T. Y. — Lect. Notes Phys., 1977, 64, p. 80 Wu T. Y. — Tsunamis, Proc. National Sci., Foundation Workshop, May, 1979, Pasadena, p. 110.
11. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука, 1973.
12. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. — М.: Физматгиз, 1963.