где $l = \sqrt{2r_g z}$, $p_\Omega = \frac{2}{5}\left(\frac{\Omega R}{c}\right) R \sin\theta_\Omega$. При нахождении поля $U(r)$ не учитывается вращение плоскости поляризации при искривлении луча. Оценки показывают, что этот эффект оказывается порядка угла отклонения $\sim r_g/R \ll 1$. Коэффициент усиления гравитационной линзы определим как отношение $q(r) = U(r)\,U^*(r)/U_0^2$.

Дальнейшей нашей задачей будет исследование зависимости q от длины волны λ, параметров линзы и координат точки наблюдения. При незначительном удалении наблюдателя от оси z в диапазоне длин волн, для которых выполняется неравенство $2kr_g p_\Omega^2/l^2 \ll 1$, вычисление интеграла в выражении (2) методом стационарной фазы дает

$$q(p, \varphi, z) \approx \pi\chi J_0^2 \left(\frac{\chi}{l}\sqrt{p^2 + p_\Omega^2 + 2pp_\Omega \sin\varphi}\right), \quad \chi = 2r_g k \gg 1. \tag{3}$$

Здесь J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Полученное выражение в точности совпадает с распределением $q(r)$ для невращающейся линзы [1, 2], но фокус линзы смещен по оси y в плоскости наблюдения в сторону вращения линзы ($p = p_\Omega$, $\varphi = (3/2)\pi$). Этот эффект имеет ту же физическую природу, что и «затягивание» индикатрисы рассеяния вращающимся телом [6]. Следует отметить, что в нашем случае фокальное смещение $p = (2/5)(\Omega R/c) R \sin\theta_\Omega$ не зависит от дистанции z. Угол же поворота фокуса линзы, равный p_Ω/z, убывает с ростом z. С укорочением длины волны ($\chi p_\Omega^2/l^2 \gg 1$) проявляется асимметрия поля тяготения. Коэффициент усиления в смещенном фокусе перестает расти как λ^{-1}. Оценка $q_{\max}$ в этом случае дает

$$q\left(p_\Omega, \frac{3}{2}\pi, z\right) \approx l^2/p_\Omega^2. \tag{4}$$

Граничное значение длины волны $\lambda_{\min}$, ниже которого начинает сказываться асимметрия поля тяготения за счет вращения, определяется из условия $\chi p_\Omega^2/l^2 \approx 1$:

$$\lambda_{\min} \approx 4\pi r_g \left(\frac{p_\Omega}{l}\right)^2 = 2\pi \frac{p_\Omega^2}{z}. \tag{5}$$

Из полученной оценки видно, что $\lambda_{\min}$ тем меньше, чем медленнее вращается звезда и чем дальше от нее расположен наблюдатель. Последнее объясняется тем, что с ростом дистанции z эффективно работающие области апертуры гравитационной линзы все более удаляются от вращающейся звезды Влияние вращения поля тяготения при этом уменьшается.

Таким образом, вращение звезды, так же как и несферичность, приводит к появлению коротковолновой границы фокусировки $\lambda_{\min}$. При этом имеет место эффект поворота индикатрисы рассеяния в сторону вращения звезды В заключение оценим $\lambda_{\min}$ и $q_{\max}$ для Солнца. Взяв $R/l \sim 1$, $r_g \approx 3$ *км*, $\Omega R \approx 2$ *км*$\cdot c^{-1}$, $\theta_\Omega = \pi/2$ (наибольшее влияние вращения), получим $\lambda_{\min} \sim 10^{-5}$ *см* и $q_{\max} \sim 10^{11}$.

Автор благодарит П. В. Блиоха за полезные советы и замечания, высказанные в ходе выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бялко А. В. — Астрон. журн., 1969, **46**, вып. 5, с. 998.
2. Bliokh P., Minakov A. — Astrophis. Space Sci., 1975, **34**, № 2, p. L7.
3. Блиох П. В, Минаков А. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 6, с. 802.
4. Минаков А. А. — Астрон. журн, 1978, **55**, вып. 5, с 966.
5 Волков А. М, Изместьев А. А, Скроцкий Г. В. — ЖЭТФ, 1970, **59**, вып. 10, с 1254.
6. Болотовский Б. М., Столяров С. Н — ЖЭТФ, 1976, **71**, вып. 9, с. 1003.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
28 января 1980 г.

УДК 621.391.821

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АТМОСФЕРНЫХ РАДИОШУМОВ

В М Шляхин

Атмосферные радиошумы являются одним из источников естественных помех радиоэлектронным средствам. Статистические характеристики этих шумов до настоящего времени в полном объеме еще не изучены, что затрудняет проведение ряда специальных исследований.

Экспериментально [7] было установлено, что распределение малых значений амплитуды атмосферных радиошумов соответствует закону Рэлея, больших — логарифмически нормальному закону распределения (ЛГНР). Это позволило Бекману [7] атмосферные радиошумы представить в виде аддитивной смеси двух случайных процессов $ae^{i\varphi}$ и $be^{i\psi}$, статистические свойства амплитуд которых a и b описываются законом распределения Рэлея и ЛГНР соответственно. Используя такое представление атмосферных радиошумов, определим их основные статистические характеристики

Общие соотношения. В теории распространения радиоволн часто рассматриваются стационарные случайные процессы $z_i = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$, амплитуда a и фаза φ которых независимы, а распределение фазы $f(\varphi)$ равномерно в интервале $0 - 2\pi$. Такие процессы будем называть в дальнейшем процессами с независимой равномерно распределенной фазой, или НРФ-процессами.

Распространяя результаты [1–3] на произвольную совокупность НРФ-процессов, можно показать, что для аддитивной смеси двух НРФ-процессов имеет место следующая зависимость между статистическими характеристиками смеси и характеристиками амплитуд слагаемых:

$$\Theta_{z_\Sigma}(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_2(a, b) J_0(sa) J_0(sb)\, da\, db; \tag{1}$$

$$f(A_\Sigma) = \frac{2A_\Sigma}{\pi} \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f_2(a, b)\, da\, db}{\sqrt{2A_\Sigma^2(a^2+b^2) - A_\Sigma^4 - (a^2-b^2)^2}}, \tag{2}$$

где $\Theta_{z_\Sigma}(s)$ —характеристическая функция аддитивной смеси $z_\Sigma = \operatorname{Re}\{[ae^{i\varphi} + be^{i\psi}]\, e^{i\omega_0 t}\}$, $f(A_\Sigma)$ — закон распределения амплитуды процесса z_Σ, $f_2(a, b)$ — двумерный закон распределения амплитуд слагаемых, $J_0(x)$ — функция Бесселя действительного аргумента. Аналогично определяется и двумерная характеристическая функция процесса z_Σ — $\Theta_{z, z_\tau}(s, s_1)$:

$$\Theta_{z, z_\tau}(s, s_1) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f_4(a, a_\tau, b, b_\tau) J_0(sa) J_0(s_1 a_\tau) J_0(sb) J_0(s_1 b_\tau)\, da\, da_\tau\, db\, db_\tau. \tag{3}$$

Поскольку в данном случае двумерный закон распределения амплитуды $f_2\left(A_\Sigma, A_{\Sigma_\tau}\right)$ является результатом двукратного преобразования Ганкеля характеристической функции $\Theta_{z, z_\tau}(s, s_1)$:

$$f_2\left(A_\Sigma, A_{\Sigma_\tau}\right) = A_\Sigma A_{\Sigma_\tau} \int_0^\infty\int_0^\infty s s_1 J_0(sA_\Sigma) J_0\left(s_1 A_{\Sigma_\tau}\right) \Theta_{z, z_\tau}(s, s_1)\, ds\, ds_1, \tag{4}$$

то, используя (3), нетрудно установить зависимость параметров этого закона от характеристик амплитуд слагаемых.

Анализируя (1), (3), убеждаемся в том, что нечетные начальные моменты суммы НРФ-процессов (равно как и нечетные смешанные моменты $m_{n,k}\left\{z_\Sigma^n z_{\Sigma_\tau}^k\right\}$) равны нулю. Это указывает на симметричность распределения $f(z_\Sigma)$ относительно нулевого среднего значения и на его близость к нормальному закону [5].

Используя (1)—(4), определим основные статистические характеристики амплитуды аддитивной смеси двух НРФ-процессов для любых законов распределения амплитуд слагаемых:

$$m_1\{A_\Sigma\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty (a+b)\, E\left(\frac{\sqrt{4ab}}{a+b}\right) f_2(a, b)\, da\, db; \tag{5}$$

$$m_2\{A_\Sigma^2\} = 2m_2\{z_\Sigma^2\} = m_2\{a^2\} + m_2\{b^2\}; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} m_2\left\{A_\Sigma^2 A_{\Sigma_\tau}^2\right\} = 4m_2\left\{z_\Sigma^2 z_{\Sigma_\tau}^2\right\} = m_2\left\{a^2 a_\tau^2\right\} + m_2\left\{b^2 b_\tau^2\right\} + \\ + m_2\left\{a^2 b_\tau^2\right\} + m_2\left\{a_\tau^2 b^2\right\}, \end{aligned} \tag{7}$$

здесь $E(\cdot)$ — полный эллиптический интеграл второго рода

Последние соотношения устанавливают непосредственную связь среднего значения амплитуды, корреляционной функции квадрата амплитуды суммы НРФ-процессов с аналогичными характеристиками амплитуд слагаемых.

В представлении Бекмана [7] атмосферные радиошумы являются результатом суммирования двух именно НРФ-процессов. Поэтому полученные выше соотношения могут быть использованы для определения основных характеристик этих шумов.

Основные результаты. По условию статистические характеристики амплитуд слагаемых НРФ-процессов описываются законом Рэлея и ЛГНР, причем амплитуды слагаемых независимы между собой. Поэтому с учетом (1) имеем

$$\Theta_{z_\Sigma}(s) = \exp(-0{,}25\,\delta_1^2 s^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-2n} (n!)^{-2} s^{2n} \delta_2^{4n^2-2n} m^{4n-4n^2}, \tag{8}$$

где δ_1^2 — среднее значение квадрата амплитуды описываемой законом Рэлея ($m_2\{a^2\}$), m, δ_2^2 — среднее значение амплитуды и квадрата амплитуды ($m_1\{b\}$, $m_2\{b^2\}$) второго процесса Видно, что закон распределения атмосферных радиошумов отличается от нормального. При $\delta_2^2 \to m^2$

$$\Theta_{z_\Sigma}(s) \to \exp(-0{,}25\,\delta_1^2 s^2)\, J_0(s\delta_2). \tag{9}$$

Определив корреляционную функцию $B\left\{z_\Sigma^2 z_{\Sigma_\tau}^2\right\} = m_2\left\{z_\Sigma^2 z_{\Sigma_\tau}^2\right\} - m_2\left\{z_\Sigma^2\right\} m_2\left\{z_{\Sigma_\tau}^2\right\}$ с учетом (6), (7) и результатов [4], нетрудно показать, что при прочих равных условиях корреляционные свойства амплитуды второй («мощной») составляющей шумов оказывают решающее влияние на корреляционные характеристики этих шумов.

Осуществляя преобразование Ганкеля характеристической функции (8) или используя непосредственно (2), установим закон распределения амплитуды радиошумов

$$f(A_\Sigma) = \frac{2A_\Sigma}{\delta_1^2} \exp\left(-\frac{A_\Sigma^2}{\delta_1^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\delta_2^{4n^2-2n} m^{4n-4n^2}}{\delta_1^{2n}(n!)^2} \Phi\left(-n, 1, \frac{A_\Sigma^2}{\delta_1^2}\right), \tag{10}$$

где $\Phi(\alpha, \beta, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Это распределение совпадает с распределением амплитуды аддитивной смеси нормального шума и сигнала с ЛГНР амплитуды [6]. Не останавливаясь по этой причине подробно на анализе распределения (10), заметим только, что при $\delta_2 \to 0$ сумма в (10) стремится к единице и распределение амплитуды атмосферных радиошумов соответствует закону Рэлея.

Двумерный закон распределения амплитуды $f_2(A_\Sigma, A_{\Sigma_\tau})$ оказывается значительно сложнее, но и он может быть выражен через специальные функции. Можно показать, что при $\delta_2/\delta_1 \leqslant 1$ закон распределения $f_2(A_\Sigma, A_{\Sigma_\tau})$ с приемлемой для практики точностью описывается двумерным рэлеевским распределением [4]. Это позволяет предположить, что в рассматриваемом случае корреляционные свойства амплитуды атмосферных радиошумов определяются в основном корреляционными свойствами амплитуды первой («слабой») составляющей этих шумов

Действительно, полагая $B\{aa_\tau\} = 0$, определим

$$f_2(A_\Sigma, A_{\Sigma_\tau}) = \sum_{n,k=0}^{\infty} (-1)^{k+n} \frac{4A_\Sigma A_{\Sigma_\tau} C(k, n)\, \delta_1^{-4}}{(n!)(k!)\,\delta_1^{2n+2k}} \Phi\left(n+1, 1, -\frac{A_\Sigma^2}{\delta_1^2}\right) \times \\ \times \Phi\left(k+1, 1, -\frac{A_{\Sigma_\tau}^2}{\delta_1^2}\right), \tag{11}$$

где $\ln C(k, n) = 2k\mu(1-R) + 2k^2 D^2(1-R^2) - 2D^2\mu^2 + 2D^2\left[\frac{\mu(1-R^2)^2}{2D^2} + n + Rk\right]^2$,

μ, D — среднее значение и дисперсия логарифма амплитуды второй составляющей шумов ($\mu = \mu_\tau$, $D = D_\tau$), R — коэффициент взаимной корреляции между логарифмами амплитуд второй составляющей.

Вычисляя функцию корреляции амплитуды радиошумов, убеждаемся в том, что при $\delta_2/\delta_1 \leqslant 1$ и $B\{aa_\tau\} = 0$

$$m_2\left\{A_\Sigma A_{\Sigma_\tau}\right\} - m_1\left\{A_\Sigma\right\} m_1\left\{A_{\Sigma_\tau}\right\} \approx 0.$$

Поэтому для практических расчетов коэффициента корреляции амплитуды радиошумов в данном случае можно пользоваться известным выражением для коэффициента корреляции, соответствующего двумерному рэлеевскому распределению амплитуды [4]

ЛИТЕРАТУРА

1 Рытов С М Введение в статистическую радиофизику — М · Наука, 1966.
2 Бункин Ф. В., Гудзенко Л. П. — Радиотехника и электроника, 1958, вып. 7, с. 968.
3. Рытов С. М. — ЖЭТФ, 1955, 29, вып. 5 (11), с. 702.
4. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. — М : Наука, 1965
5. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов радио, 1968 — Т. 1

6 Поздняк С. И., Мелитицкий В А Введение в статистическую теорию поляризации радиоволн. — М.: Сов радио, 1974.
7 Beckman P. — Radio Science Journal of Research National Bureau of Standards, 1964, **68D**, № 5, p. 37.

Поступила в редакцию
24 декабря 1979 г
УДК 621.371

ПРОХОЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ ЧЕРЕЗ ФОКУС

Е. Н. Пелиновский, Ю. А. Степанянц

Выполненные в последние годы экспериментальные исследования цилиндрических солитонов в плазме [1–3], на поверхности жидких металлов [4] и воды [5] показали существование отличий в законах изменения амплитуд волн по сравнению с предсказаниями линейной теории и значительную трансформацию волнового поля в фокальной области. С целью получения более надежных количественных закономерностей в рамках осесимметричного уравнения Кортевега — де Вриза (КдВ) или более точных уравнений были проведены специальные численные расчеты [6, 7]. Те из них, которые соответствовали условиям адиабатичности (медленности изменения параметров солитона), хорошо описываются приближенной теорией цилиндрических солитонов [8], в частности, амплитуда солитона при движении к центру растет по формуле $A \sim r^{-2/3}$ (r — расстояние до центра), а длительность падает, $\tau \sim r^{1/3}$. Вопрос об объяснении имеющихся результатов о прохождении солитонов через фокус, вблизи которого уравнение КдВ заведомо несправедливо, оставался открытым. Между тем, эта задача в значительной степени близка к задаче о трансформации интенсивных акустических волн в прикаустических областях и при полном внутреннем отражении на границе раздела двух сред [9] Основная идея, использованная в [9] для получения аналитических результатов, связана с возможностью прохождения прикаустических областей по формулам линейной теории Действительно, даже в рамках нелинейной геометрической акустики неограниченное возрастание амплитуды волны на каустике не сопровождается значительным увеличением роли нелинейности (отношение амплитуд гармоник к амплитуде основной волны остается конечным). Влияние же дифракции в этой области, проявляющееся в изменении фаз каждой гармоники на π' становится преобладающим. Очевидно, что такая же ситуация должна иметь место и в диспергирующих средах. в областях с размерами, много меньшими характерных длин нелинейности и дисперсии, можно использовать формулы линейного приближения. В этом случае связь между падающей и трансформированной волнами задается преобразованием Гильберта [9]:

$$\eta_{\text{ref}}(t, r_0) = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \eta_{\text{in}}(t', r_0) \frac{dt'}{t - t'}, \tag{1}$$

где $\fint$ — означает интегрирование в смысле главного значения. На рис 1 показано поле трансформированной волны, когда падающей волной является солитон КдВ вида

$$\eta_{\text{in}}(r_0, t) = A \operatorname{sch}^2 \frac{r_0 - V_0 t}{\Delta}. \tag{2}$$

Как видно из рисунка, форма трансформированной волны существенно изменилась — волна стала знакопеременной и существенно расширилась. Из формулы (1) можно показать, что поле преобразованного импульса в асимптотике убывает $\sim |t|^{-1}$. Этот результат, однако, в физическом отношении является приближенным, поскольку основной вклад в хвосты импульса дают низкочастотные компоненты спектра волны ($\lambda \gg r_0$), для которых несправедливо преобразование (1) (фокальная область для таких компонент имеет большие размеры и при $\omega \to 0$ она стремится к бесконечности)

Наиболее подробные данные о трансформации солитона КдВ в фокусе получены на ЭВМ Хвангом и Ву [10] путем решения точных уравнений гидродинамики. На рис 2 представлен профиль волны после прохождения через фокус На том же рисунке точками показаны результаты расчета по формуле (1). Как видно из рисунка, хорошее совпадение полученных данных наблюдается для головной части волны, ушедшей достаточно далеко от центра. Имеющееся отличие в задней части волны связано с ее близостью к центру, так что дифракция еще не успела окончательно проявиться.

При последующем распространении от центра трансформированная волна, очевидно, не является стационарной и в процессе эволюции должна распадаться на солитоны и осциллирующие цуги. Для расчета этого эффекта мы пренебрегли цилиндрической