

УДК 548.0 · 532 783

**САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ:  
ДИНАМИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА ХОЛЕСТЕРИЧЕСКИМИ  
ЖИДКИМИ КРИСТАЛЛАМИ**

*Г. А. Ляхов, В. А. Макаров*

Теоретически описано влияние оптической нелинейности на параметры динамического рассеяния в холестерических жидкых кристаллах. Предложен и рассчитан эффект нелинейного изменения периода маятниковых биений при двухволновом взаимодействии. Развита методика вторичного укорочения волнового уравнения; с ее помощью показано, что нелинейность ускоряет процесс дифракционного разделения энергии между проходящим и рассеянным пучками

Предмет нашей работы составляет теоретический анализ эффектов распространения монохроматических пучков электромагнитных волн в холестерических жидких кристаллах (ХЖК). Нелинейная оптика ХЖК — малоисследованная область; о нелинейных свойствах ХЖК и об эффектах нелинейного преобразования излучения в них имеются, по сути, лишь отрывочные сведения [1]. В то же время можно указать по крайней мере три физических аспекта их исследования.

Во-первых, это собственно нелинейно оптические приложения, для которых существенна малая энергоемкость ЖК как следствие подвижности структуры под действием поля и перспективно больших значений ангармонизмов. Возможно, еще более важна вторая, обратная задача восстановления по параметрам нелинейных преобразований свойств ХЖК — как структурных, так и на уровне отдельных молекул. Эта важная задача и более сложна, так как ее решение требует совместного анализа ряда механизмов воздействия поля на ХЖК. Это, в частности, изменения индивидуальных молекулярных поляризуемостей через перераспределение плотности дипольного момента. Второй, отчасти связанный с первым, механизм — это изменения функции распределения молекул по ориентациям; его эффективность существенно зависит от равновесной термодинамики среды. Наконец, самостоятельное значение имеет механизм изменения термодинамического состояния ЖК — нагрев излучением, электрострикция.

Далее, для ХЖК характерна спиральная пространственная периодическая структура, период  $\Lambda$  которой изменяется как функция температуры и концентрации от бесконечности до величин порядка длины волн оптического диапазона [2]. Это делает их исследование важным с точки зрения общей электродинамики сред с сильной пространственной дисперсией (ПД), в которых параметр ПД  $\Lambda/\lambda \sim 1$ , где  $\lambda$  — длина волн зондирующего излучения. К таким средам относятся естественные твердые кристаллы для рентгеновского диапазона длин волн, объемные голограммы и активные среды с распределенной обратной связью для ИК и видимого диапазонов, наконец, периодические длинные линии диапазона СВЧ.

Теория распространения плоских — как линейных, так и нелинейных — волн в таких пространственно периодических средах развита достаточно подробно и основывается на методе связанных (через перенос отражения от решетки) волн\*.

Теоретически и экспериментально исследованы также линейные по полю дифракционные эффекты. Наиболее интересные среди них получены при наблюдении динамического рассеяния (ДР) рентгеновских пучков в совершенных кристаллах [3]: «маятниковые» биения проходящей и рассеянных волн, т. е. периодический с толщиной среды обмен энергией между этими волнами, аномальное пропускание поглощающих кристаллов (эффект Бормана). Аналогичные эффекты характерны и для ХЖК. Специфичны здесь, во-первых, поляризационные зависимости, связанные со спиральной симметрией структуры [5]; во-вторых, угловые зависимости эффектов ДР, отличающиеся большей относительной шириной, так как тепловые флуктуации ХЖК интенсивней, чем в твердых кристаллах [2].

Влияние нелинейности на ДР волн в кристаллах ранее не было исследовано. В первую очередь это обусловлено отсутствием экспериментальных стимулов — известные механизмы дают ничтожную нелинейность в рентгеновском диапазоне. В жидких кристаллах, в частности в ХЖК, такие стимулы есть; в диапазоне температур вблизи фазового перехода «изотропная жидкость — жидккий кристалл» зафиксированы рекордные для жидкостей значения оптической константы Керра [6]. Это делает, на наш взгляд, исследование нелинейных дифракционных эффектов в ХЖК своевременным.

### 1. МАКРОСКОПИЧЕСКИЙ ВЫВОД ВОСПРИИМЧИВОСТЕЙ ХЖК

В электродипольном приближении симметрия молекул, составляющих холестерические, как и нематические, ЖК есть  $D_{\infty h}$  [2]. В собственной системе координат молекулы  $\xi, \eta, \zeta$  отличны от нуля только диагональные компоненты линейной поляризуемости  $\chi_{\alpha\beta}$ , если ось бесконечного порядка совместить с осью  $\zeta$ , и равны

$$\chi_{\xi\xi} = \chi_{\eta\eta} = \chi_{\perp}, \quad \chi_{\zeta\zeta} = \chi_{\parallel}.$$

В тензоре гиперполяризуемости  $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}$  от нуля отличны

$$\chi_{\xi\xi\xi\xi} = \chi_{\eta\eta\eta\eta} = 3\chi_{\xi\xi\eta\eta} = \chi_1,$$

$$\chi_{\xi\xi\zeta\zeta} = \chi_{\eta\eta\zeta\zeta} = \chi_2, \quad \chi_{\zeta\zeta\zeta\zeta} = \chi_3$$

и компоненты, получаемые перестановкой индексов ( $\chi_{\xi\xi\xi\xi} = \chi_2$  и т. д.).

Макроскопическая (структурная) ПД намного существенней внутримолекулярной. Линейная оптическая активность, например, для первого механизма на 3—4 порядка выше связанной со вторым механизмом [2]. Поэтому достаточно — в силу малости внутримолекулярного параметра ПД, пропорционального отношению размера молекулы ( $10^{-7} — 10^{-6}$  см) к длине волны ( $10^{-4} — 10^{-5}$  см), — для расчета поляризуемости электродипольное приближение должно быть дополнено при расчете функции  $F$  распределения молекул по ориентациям учетом магнитодипольного и электроквадрупольного взаимодействий [7]. Этот учет в приближении молекулярного поля [8] дает периодическую зависимость  $F$  от координаты:

$$F = k \exp[u \cos^2 \alpha], \quad (1)$$

где  $k$  — константа нормировки,  $u$  — безразмерная константа ван-дер-ваальса взаимодействия,  $\cos \alpha = (\mathbf{n}\mathbf{n}_0)$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль

\* О линейных задачах см. монографию [3]; детальное изложение метода связанных волн в нелинейных задачах представлено в [4].

длинной оси  $\zeta$  молекулы, а директор структуры  $n_0 = (\cos p_z, \sin p_z, 0)$ ,  $p$  — обратный шаг спирали ХЖК.

Усреднением поляризумостей с помощью (1) получаем восприимчивости в лабораторной системе координат  $(x, y, z)$ . Ненулевые компоненты линейной восприимчивости  $\chi_{ij}$  равны

$$\begin{aligned}\chi_{xx}(yy) &= \chi_0 \pm \chi_a \cos 2 p_z, \quad \chi_{xy} = \chi_a \sin 2 p_z, \\ \chi_{zz} &= \chi_0 - \chi_a,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\chi_0 = (N/3) [(\chi_{\parallel} + 2\chi_{\perp}) + S_2(\chi_{\parallel} - \chi_{\perp})/2]$ ,  $\chi_a = (NS_2/2)(\chi_{\parallel} - \chi_{\perp})$ ,  $N$  — концентрация ХЖК; параметр порядка  $S_2$ , характеризующий степень упорядоченности ХЖК, есть среднее по (1) от лежандровского полинома  $P_2(\cos \alpha)$ . Ненулевые компоненты нелинейной восприимчивости  $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , во-первых, содержат высшие пространственные гармоники, причем наличие только вторых гармоник — это специфика спиральной структуры ХЖК; для обычных кристаллов нелинейные восприимчивости содержат все высшие гармоники. Во-вторых, они зависят и от четвертого момента  $S_4$  функции распределения,  $S_4 = \langle P_4(\cos \alpha) \rangle$ :

$$\begin{aligned}\chi_{xxxx}(yyyy) &= \chi_1 \pm \chi_2 \cos 2 p_z + \chi_3 \cos 4 p_z, \quad \chi_{zzzz} = \chi_1 - \chi_2 + \chi_3, \\ \chi_{xxyy} &= \chi_1/3 - \chi_3 \cos 4 p_z, \quad \chi_{xyzz} = [(\chi_2 - 4\chi_3) \sin 2 p_z]/6, \\ \chi_{xxxx}(yyzz) &= [2\chi_1 - \chi_2 - 2\chi_3 \pm (\chi_2 - 4\chi_3) \cos 2 p_z]/6, \\ \chi_{xxxx}(yyux) &= [\chi_2 \sin 2 p_z \pm 2\chi_3 \sin 4 p_z]/2.\end{aligned}\tag{3}$$

В предположении об отсутствии поглощения перестановки индексов не изменяют компонент восприимчивости. Основные константы нелинейности  $\chi_{1,2,3}$  выражаются через гиперполяризуемости  $\chi_{1,2,3}$  и зависят от температуры через величины  $S_{2,4}$ :

$$\begin{aligned}\chi_1/N &= \chi_1 + \left( \frac{1}{5} + \frac{S_2}{7} + \frac{9S_4}{280} \right) \tilde{\chi}_1 + (2 + S_2) \tilde{\chi}_2, \\ \chi_2/N &= 3S_2 \tilde{\chi}_2 + (6S_2 + S_4) \tilde{\chi}_1/14, \quad \chi_3/N = \tilde{\chi}_1 S_4/8,\end{aligned}\tag{4}$$

где  $\tilde{\chi}_1 = \chi_1 - 6\chi_2 + \chi_3$ ,  $\tilde{\chi}_2 = \chi_2 - \chi_1/3$ . Второй канал температурной зависимости связан с зависимостью  $p(T)$ . Существенно, что коэффициенты  $\chi_{2,3}$ , а следовательно, и периодическая зависимость восприимчивости от координаты исчезают в изотропной фазе, в которой  $S_{2,4} = 0$ ; при этом  $\chi_1 = (8\chi_1 + 12\chi_2 + 3\chi_3)/N/15 \neq 0$ .

Отношения компонент нелинейной восприимчивости оцениваются естественным образом:  $\chi_1/\chi_2 \sim \chi_2/\chi_3 \sim \chi_{\perp}/\chi_{\parallel}$ . Для произвольных молекул это отношение изменяется в пределах от нуля (молекулы «иглообразной» формы,  $\chi_{\parallel} \gg \chi_{\perp}$ ) до единицы («шарообразные» молекулы,  $\chi_{\parallel} \approx \chi_{\perp}$ ), для резко анизотропных молекул ЖК типичны значения порядка  $10^{-2}$ . В соответствии с этим определяются пределы изменения нормированных на величину  $\chi_1$  значений  $\chi_{2,3}$  во всем диапазоне температур:  $0 < \chi_2/\chi_1 < 4/3$ ,  $-4/3 < \chi_3/\chi_1 < 1/3$ . Здесь учтено, что предельные значения  $S_{2,4}$  в идеальном, т. е. низкотемпературном ХЖК, равны 1. Правые пределы, конечно, гипотетические: в этом случае  $\chi_a \rightarrow \chi_0$ .

## 2. ХАРАКТЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МАСШТАБЫ ЗАДАЧИ; УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВУХВОЛНОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Для анализа распространения монохроматического излучения в среде с определенными в разд. 1 восприимчивостями обратимся теперь к волновому уравнению

$$[\nabla [\nabla E]] = (\omega/c)^2 D,$$

где индукция  $D_i = E_i + 4\pi\chi_{ij}E_j + 4\pi\chi_{ijkl}E_j^*E_kE_l$ . Мы пренебрегаем при этом релаксацией восприимчивостей, имея в виду, что в широком температурном диапазоне существования холестерической фазы, включая предпереходную область, практически для любых скоростей модуляции излучения, пропорциональных  $\tau_i^{-1}$  ( $\tau_i$  — длительность импульса), можно получить  $\tau_p \ll \tau_i$ , где  $\tau_p$  — время релаксации оптического отклика [6]. Не учитывается также нагрев среды излучением; ослабление этого эффекта можно добиться переходом в полосу прозрачности хорошо очищенного ЖК-образца. Подробное же исследование этих эффектов не ставилось целью нашей работы.

Рассмотрим распространение падающего на ХЖК под углом  $\theta$  ограниченного пучка (с шириной  $r_0$ ), средний волновой вектор  $k_0$  которого удовлетворяет брэгговскому условию  $k_0 \sin \theta = p$ . Уместно заметить здесь, что учет отстройки от брэгговского резонанса в ХЖК, в отличие от ДР рентгеновских

лучей в твердых кристаллах, неактуален — широкий диапазон температурного изменения  $p$  позволяет всегда устраниТЬ отстройку (см., например, [2]). Эффективно взаимодействующими при этом оказываются проходящая волна  $E_0$  и рассеянная волна  $E_h$  с волновым вектором  $k_h = k_0 + 2p$ ,  $p$  — вектор вдоль оси спирали с длиной, равной ее обратному шагу (рис. 1):

$$E = [E_0 \exp(-ik_0r) + E_h \exp(-ik_hr)] + \text{к. с.}, \quad (5)$$

где  $E_0, h$  — зависящие от координаты векторные амплитуды. Качественно задача полностью характеризуется следующими пространственными масштабами, оценку величины которых приводим для типичных ХЖК в оптическом диапазоне: длина волны  $\lambda = 2\pi/k_0 \sim 10^{-4} \div 10^{-5} \text{ см}$ ; квазипериод маятниковых биений, или длина экстинкции [3, 5]  $L_e = 4 \cos \theta \epsilon_0/\epsilon_a k_0 (1 + \sin^2 \theta) \sim 10^{-2} \div 10^{-3} \text{ см}$  (здесь  $\epsilon_0 = 1 + 4\pi\chi_0$ ;  $\epsilon_a = 4\pi\chi_a$ ); длина экстинкционного расплывания  $L_s = r_0^2 (L_e \sin^2 \theta)^{-1} \sim 1 \div 10 \text{ см}$  при ширине пучка  $r_0 \sim 10^{-1} \div 10^{-2} \text{ см}$ ; дифракционная длина  $L_d = k_0 r_0^2 \geq 10 \div 10^2 \text{ см}$ , и, наконец, «нелинейная» длина  $L_{nl} = 3(1 + \sin^2 \theta) \cos \theta (4\pi k_0 \chi_1 |E|^2)^{-1}$ . Характер проявления нелинейности решающим образом определяется местом  $L_{nl}$  в достаточно четко выраженной последовательности:  $\lambda < L_e < L_s < L_d$ .

Экспериментальные данные относительно величины кубических восприимчивостей  $\chi_{1,2,3}$  ХЖК ограничены [1]. Их можно оценить отчасти, используя хорошо установленное сходство микроструктур ХЖК и несколько более подробно изученных нематических ЖК [2]. Кубическая восприимчивость последних (в основном, это относится к ориентационному механизму) может изменяться в зависимости от температуры и химического состава в широком диапазоне, достигая аномально больших значений: в предпереходной жидкой фазе  $\chi \sim 10^{-10} \div 10^{-8} \text{ см}^3/\text{эрз}$  [6], в низкотемпературной же упорядоченной фазе зафиксировано значение эффективной восприимчивости  $\chi_{\text{эфф}} \sim 10^{-2} \text{ см}^3/\text{эрз}$  [9]. Разумеется, при учете нестационарности входящая в определение  $L_{nl}$  величина  $\chi \sim \chi_{\text{эфф}} \tau_{nl}/\tau_p$ , но запас в сравнении с обычными жидкостями, для которых типичны значения  $\chi \sim 10^{-12} \div 10^{-11} \text{ см}^3/\text{эрз}$  [10], столь значителен, что можно с уверенностью говорить о выполнимости условий  $L_{nl} \sim L_e$  и, тем более,  $L_{nl} \sim L_s$  при плот-

ностях оптической мощности порядка  $10^2 - 10^4 \text{ кВт/см}^2$ . Гораздо более важным — и это присуще ЖК, обладающим очень подвижной структурой, — фактором, который может затруднить реализацию рассматриваемых эффектов, является термодинамическая неустойчивость ЖК [1]. Этот фактор в настоящее время доступен только экспериментальному исследованию; определенный оптимизм вызывают результаты в направлении, открытом работой [9].

Обеспечить выполнение неравенства  $L_{\text{нл}} < \lambda$  в ХЖК не представляется возможным; с другой стороны, при  $L_{\text{нл}} > L_d$  нелинейность не проявляется. При  $L_s < L_{\text{нл}} \leq L_d$  имеем дело с хорошо известным эффектом самофокусировки падающего пучка [10].

Возможности новых, специфических для ХЖК и вообще для пространственно периодических сред, нелинейных эффектов появляются при значениях  $L_{\text{нл}}$  в диапазоне  $L_s \leq L_{\text{нл}} \leq L'_s$ . Для их описания представим (5) в волновое уравнение, считая  $E_{0,h}$  медленно изменяющимся на длине волны функциями. В результате получаем нелинейные уравнения, обобщающие известные в рентгеновской оптике уравнения Такаги [11]. Соответствующие уравнения для линейных ХЖК приведены в [5]. Общий вид нелинейных уравнений достаточно громоздок, однако естественным для реальных образцов ХЖК является эксперимент с достаточно большими углами падения,  $\theta \geq \pi/2 - \arcsin(\epsilon_a/\epsilon_0)^{1/2}$ . В противоположном случае возникает необходимость специфического ориентирования молекул между подложками и связанные с этим трудности ввода излучения в ЖК-слой [2].

Кроме того, будем рассматривать взаимодействие пары волн собственной для ХЖК поляризаций (рис. 1):

$$A_{0,h} E^0 = \eta_{0,h} E_{0,h} \sin \theta + i y E_{0,h}, \quad (6)$$

где  $E^0$  — максимальная амплитуда волны на входной грани ЖК ( $x=0$ ,  $E_h(x=0)=0$ ),  $\eta_{0,h}$  и  $y$  — единичные векторы вдоль соответствующих осей (рис. 1). При равенстве нулю сопряженных (6) ( $\tilde{A}_{0,h} E_0 = \eta_{0,h} E_{0,h} \sin \theta - i y E_{0,h}$ ) компонент на входной грани уравнения для  $A_{0,h}$  имеют вид

$$\begin{aligned} i \left( \pm \operatorname{tg} \theta \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \right) A_{0,h} + L_s^{-1} A_{h,0} &= L_{\text{нл}}^{-1} \left[ \left( \frac{1}{2} |A_{0,h}|^2 + \right. \right. \\ &+ |A_{h,0}|^2 \left. \right) A_{0,h} - \frac{3 m_2}{4} \left[ \left( |A_{0,h}|^2 + \frac{1}{2} |A_{h,0}|^2 \right) A_{h,0} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} A_{0,h}^2 A_{h,0}^* \right] + \frac{3 m_3}{2} A_{h,0}^2 A_{0,h}^* \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $m_{2,3} = \chi_{2,3}/\chi_1$ , при равенстве нулю амплитуд (6) на границе аналогично выводятся легко разрешаемые независимые уравнения для  $\tilde{A}_{0,h}$ .

### 3. НЕЛИНЕЙНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ПЕРИОДА МАЯТНИКОВЫХ БИЕНИЙ

Если  $L_s \leq L_{\text{нл}} < L'_s$ , качественно новый эффект проявляется уже в рассеянии широких пучков; ограниченность пучка играет здесь второстепенную роль. Нелинейность в этой, по сути плосковолновой, ситуации, во-первых, наводит анизотропное однородное изменение показателя преломления, описываемое первой группой слагаемых в правой части (7). Во-вторых, и это присуще именно ХЖК с их неоднородностью, поле изменяет, и также анизотропно, пространственную модуля-

цию показателя преломления, т. е. эффективную экстинкционную длину. Это изменение описывают последние слагаемые в (7).

Система (7) с равными нулю производными по  $z$  имеет два интеграла:

$$|A_0|^2 + |A_h|^2 = 1, \quad (8)$$

что выражает постоянство потока энергии, и

$$4 \cos B = \frac{\sigma |A_0 A_h|}{(1 + 3\sigma m_2/8)} (1 + 3m_3 \cos 2B), \quad (9)$$

где  $B = \arg(A_0^* A_h)$ ,  $\sigma = L_\alpha/L_{\text{нл}}$ . Интеграл (9) связан с выражением для свободной энергии нелинейного диэлектрика.

С помощью (8) и (9) система (7) при  $\partial/\partial z = 0$  интегрируется точно. Решение для граничных условий  $A_0(0) = 1$ ,  $A_h(0) = 0$  имеет вид

$$|A_{0,h}|^2 = (1 \pm W)/2, \quad (10)$$

$$W = \frac{2\gamma^2 \operatorname{cn}(\xi, k)}{(\gamma^2 + 1) + (\gamma^2 - 1) \operatorname{sn}^2(\xi, k)}.$$

Здесь безразмерная координата  $\xi = 2\gamma x (1 + 3\sigma m_2/8)/L_\alpha$ , модуль эллиптического косинуса

$$k^2 = (1 - \gamma^2)[1 + \gamma^2 + 3m_3(\gamma^2 - 3)](24m_3\gamma^2)^{-1},$$

$$1 - \gamma^4 = 3m_3\sigma^2(1 - 3m_3)/8(1 + 3\sigma m_2/8)^2.$$

В пределе  $L_{\text{нл}} \rightarrow \infty$  ( $\sigma = 0$ ) решение (10) описывает линейные маятниковые биения с периодом  $X = \pi L_\alpha$ :

$$|A_{0,h}|^2 = [1 \pm \cos(2x/L_\alpha)]/2. \quad (11)$$

В присутствии нелинейности ( $\sigma \neq 0$ ) период биений изменяется:

$$X = 2K(k)L_\alpha/\gamma(1 + 3\sigma m_2/8), \quad (12)$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл. Качественное влияние нелинейности особенно наглядно при  $m_3 = 1/3$  («иглообразные» молекулы). При этом (10) переходит в равенство

$$W = \cos[2xL_\alpha^{-1}(1 + 3\sigma m_2/8)], \quad (13)$$

и биения вообще не зависят от параметра  $\chi_1$  однородной в пространстве нелинейности.

В общем случае характер изменения ДР в сильном поле определяется нелинейными свойствами среды (величиной и знаком  $\sigma$ ); с точностью до  $\sigma^1 \sim |E^0|^2$  период биений равен

$$X \approx \pi L_\alpha(1 - 3\sigma m_2/8). \quad (14)$$

При  $\sigma > 0$  (фокусирующая среда) происходит подчеркивание биений, в противоположном случае биения энергии между проходящей и рассеянной волной сглаживаются.

Так как молекулы ХЖК резко анизотропны,  $\chi_\perp/\chi_\parallel \gtrsim 10^{-1}$ , константы  $m_{2,3}$  могут составлять величину порядка  $10^{-2}$  или даже  $10^{-1}$ , если в молекуле действует механизм внутримолекулярного переноса заряда [1], поэтому практически условием наблюдения рассмотренных изменений периода служит  $L_{\text{нл}} \leq (1 - 10^{-1})L_\alpha$ . Оценки величин  $L_\alpha$  и  $L_{\text{нл}}$  (см. разд. 2) показывают, что наблюдение указанного эффекта реально лишь с использованием световых источников наносекундной

либо даже субпикосекундной длительности. Ясно, что общая картина эффекта сохранится и в такой нестационарной ситуации, но для количественного анализа эксперимента требуется проведение численного расчета.

#### 4. НЕЛИНЕЙНАЯ «МАЯТНИКОВАЯ ДИФРАКЦИЯ» — ПРИБЛИЖЕНИЕ ВТОРИЧНОГО УКОРОЧЕНИЯ

Доступней наблюдению последняя из возможных ситуаций  $L_3' \leq L_{\text{пл}} < L_d$ ; при таком соотношении параметров учет производных по поперечной координате  $z$  провести необходимо, но дифракционное расплывание пучков пренебрежимо мало, и поперечные лапласианы в преобразованном подстановкой (5) волновом уравнении по-прежнему следует опускать. В силу оценки  $L_3 < L_3'$  с запасом в два-три порядка (см. разд. 2), а также предполагаемого неравенства  $L_3 < L_{\text{пл}}$ , задача адекватно вторичное укорочение уравнений (7). Решение линейной плосковолновой задачи ( $\partial/\partial z = 0$ ,  $\chi_i = 0$ ) имеет вид [5]

$$A_{0, h} = [a_+ \exp(ix/L_3) \pm a_- \exp(-ix/L_3)]/2, \quad (15)$$

$a_{\pm}$  — константы. Обращаясь теперь к ограниченным пучкам в нелинейной среде, считаем  $a_{\pm}$  функциями, медленно изменяющимися — с разными масштабами изменений по  $x$  и  $z$  — на периоде  $2\pi L_3$ :  $a_{\pm} = a_{\pm}(x, \sqrt{\mu} z)$ . Результатом являются параболические нелинейные уравнения

$$\begin{aligned} & \left( 2i \frac{\partial}{\partial x} \mp L_3 \operatorname{tg}^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) a_{\pm} = \\ & = \frac{3}{4L_{\text{пл}}} (1 \mp m_2 + m_3) |a_{\pm}|^2 a_{\pm} + \frac{1 - 3m_3}{2L_{\text{пл}}} |a_{\mp}|^2 a_{\pm}, \end{aligned} \quad (16)$$

связь между которыми теряется в пределе  $m_3 = 1/3$ .

Система (16) имеет три интегральных инварианта. Два из них выражают постоянство потока энергии в пучках  $a_{\pm}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz |a_{\pm}|^2 = J_{\pm}. \quad (17)$$

Умножая (16) на  $\partial a_{\pm}^*/\partial x$  и складывая с комплексно-сопряженными выражениями, получим после интегрирования по  $z$  соотношения

$$\begin{aligned} & \mp \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ L_3 \operatorname{tg}^2 \theta \left| \frac{\partial a_{\pm}}{\partial z} \right|^2 \mp \frac{3}{8L_{\text{пл}}} (1 \mp m_2 + m_3) \times \right. \\ & \times |a_{\pm}|^4 \left. \right] + \frac{1 - 3m_3}{2L_{\text{пл}}} \int_{-\infty}^{\infty} dz |a_{\mp}|^2 \frac{\partial}{\partial x} |a_{\pm}|^2 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Их сумма дает третий интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dz \left\{ L_3 \operatorname{tg}^2 \theta \left[ \left| \frac{\partial a_-}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial a_+}{\partial z} \right|^2 \right] + \right. \\ & + \frac{3}{8L_{\text{пл}}} [(1 + m_2 + m_3) |a_-|^4 + \\ & \left. + (1 - m_2 + m_3) |a_+|^4 + 4(1 - 3m_3) |a_+|^2 |a_-|^2/3] \right\} = J. \end{aligned} \quad (19)$$

Принимая для определенности граничное условие  $A_0(0, z) = \exp(-z^2 \cos^2 \theta / 2 r_0^2)$  ( $r_0$  — ширина пучка,  $A_h(0, z) = 0$ ) и учитывая (17) — (19), естественно искать решение (16) в безаберрационном приближении:

$$a_{\pm} = f_{\pm}^{-1/2} \exp \left[ -\frac{z^2}{2 L_s L' \operatorname{tg}^2 \theta f_{\pm}^2} \mp \frac{iz^2 (df_{\pm}/dx)}{2 L_s \operatorname{tg}^2 \theta f_{\pm}} + i \varphi_{\pm} \right], \quad (20)$$

где  $f_{\pm}(x)$  — безразмерная ширина соответствующего пучка,  $\varphi_{\pm}$  — нелинейная плоская фаза. В согласии с (19) изменения  $f_{\pm}$  определяются уравнениями

$$L_s'^2 \frac{d^2 f_{\pm}}{dx^2} - \frac{1}{f_{\pm}^3} = \mp \frac{\sigma'}{2} \left[ \frac{1 \mp m_2 + m_3}{f_{\pm}^2} + \frac{4\sqrt{2}(1-3m_3)f_{\pm}}{3(f_+^2 + f_-^2)^{3/2}} \right], \quad (21)$$

где  $\sigma' = 3 L_s'/4\sqrt{2} L_{\text{пл}}$ .

При  $m_3 = 1/3$  система (21) решается аналитически. Решение в неявном виде задается следующими формулами:

$$f_{\pm} = [\alpha_{\pm} + (1 + \alpha_{\pm}) V_{\pm}] / (1 + 2\alpha_{\pm}),$$

$$\alpha_{\pm} = \sigma' (3m_2 \mp 4) / 6,$$

$$V_{\pm} = \operatorname{ch} \left\{ \frac{1 + 2\alpha_{\pm}}{\mp \alpha_{\pm}} \left[ \frac{x}{L_s'} |1 + 2\alpha_{\pm}| - \sqrt{(1 + 2\alpha_{\pm})f_{\pm}^2 - 2\alpha_{\pm}f_{\pm} - 1} \right] \right\}^{1/2}.$$

Эффект естественно характеризует амплитуда  $R(x)$  пространственных осцилляций нормированных мощностей  $I_{0,h}$  проходящего и рассеянного пучков, определяемых соотношениями

$$I_{0,h} \sim \int_{-\infty}^{\infty} dz |A_{0,h}|^2 = [1 \pm R(x) \cos(2x/L_s + \Phi(x))] / 2. \quad (22)$$

Функция  $R(x)$  выражается, как и  $\Phi(x)$ , через  $f_{\pm}$ :

$$4R^{-4} = (f_-/f_+ + f_+/f_-)^2 + L_s'^2 [d(f_+ f_-)/dx]^2. \quad (23)$$

В отсутствие нелинейности ( $L_{\text{пл}} \rightarrow \infty$ ) приходим к известному в теории двумерной дифракции результату:

$$f_{\pm}^2 = 1 + (x/L_s')^2,$$

$$R = [1 + (x/L_s')^2]^{-1/4}.$$

Обращаем внимание на то, что двухвольновое рассеяние по сути своей двумерно: переотражения в плоскости, перпендикулярной  $k_0$  и  $k_h$ , отсутствуют. Влияние нелинейности на изменение  $f_{\pm}$  иллюстрирует рис. 2, на котором представлены результаты численного решения (21) при  $\sigma' = 12$ ,  $m_2 = 0$ ,  $m_3 = 0.1$ . Пучок  $a_+$ , фазовая скорость которого в системе координат, движущейся со скоростью  $\omega/k_0$ , отрицательна, периодически фокусируется (кривая 1). Пучок  $a_-$  с положительной относительной скоростью дефокусируется (2) быстрее, чем в отсутствие нелинейности (3). При малых  $\sigma'$  происходит дефокусировка обоих пучков.

В соответствии с этим функция  $R(x)$  в нелинейной среде спадает быстрее, чем в линейной, причем процесс этот немонотонен (рис. 3). Кривые 1—3 рис. 3 построены численным решением (21) при  $m_{2,3} = 0$  и  $\sigma' = 0; 6; 12$ .

Убывание  $R(x) \sim \left| \int_{-\infty}^{\infty} da_+ a_-^* \right|$  объясняется изменением условий интерференции пучков  $a_+$  и  $a_-$ , фазовые фронты которых при дифракции искривляются (кривизна  $r_\phi \sim (df/dx)^2$ ), и, следовательно, в отличие от плосковолновой ситуации,  $\arg(a_+) - \arg(a_-) \neq \text{const}$ . Фронт

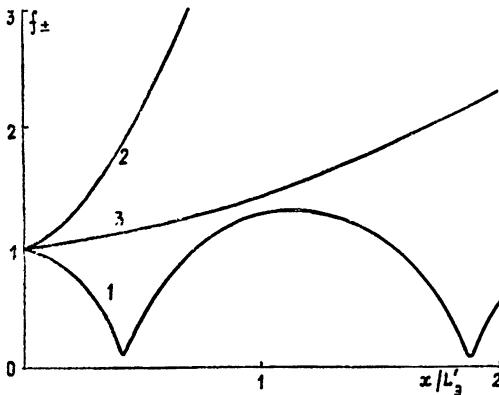


Рис. 2.

волны  $a_-$  искривляется сильнее, чем в отсутствие нелинейности (для этой волны среда дефокусирующая). При  $\sigma'(1 - m_2 + m_3) > 1$  для достаточно больших  $x/L'_3$  приближенное решение (21) имеет вид

$$f_- \approx (1 + \sqrt{1 + 4\tilde{\gamma}(x/L'_3)^2})/2,$$

где  $\tilde{\gamma} = \sigma'(1 + m_2 + m_3 + 4\sqrt{2}(1 - 3m_3)/3)$ , поэтому  $R(x, \sigma') < R(x, \sigma' = 0)$ . Осцилляции же интерференционного члена связаны с осцилляциями  $f_+$ :

$$f_+ \approx (1 + \cos(\sqrt{2}\sigma'(1 - m_2 + m_3)x/L'_3))/2. \quad (24)$$

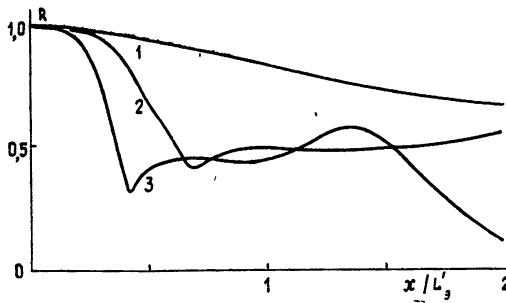


Рис. 3.

Пространственная модуляция нелинейности проявляется в основном в сглаживании осцилляций  $R(x)$ . При стремлении  $m_{2,3}$  к предельным анизотропным значениям (см. разд. 1) период осцилляций, как следует из (24), стремится к  $\infty$ . Это иллюстрирует рис. 4, кривые которого построены при фиксированных значениях  $\sigma' = 12$ ,  $m_3 = 0,1$ ; значения параметра  $m_2$  равны соответственно 1) — 0, 2) — 0,5, 3) — 0,75, 4) — 1,0.

Наблюдение описанных эффектов представляет наибольший интерес с точки зрения исследования структуры тензора кубической вос-

приимчивости ХЖК, именно связей между его компонентами, в особенности периодически изменяющимися с координатой. Эти связи несут информацию, во-первых, об анизотропии ангармонизма молекул ХЖК, имеющих достаточно сложное строение, во-вторых, об ориентационной функции распределения ХЖК. Модель функции распределения, описанная в разд. 1, практически единственно принята сейчас, однако ее нельзя считать строго обоснованной и не имеющей альтернатив [2].

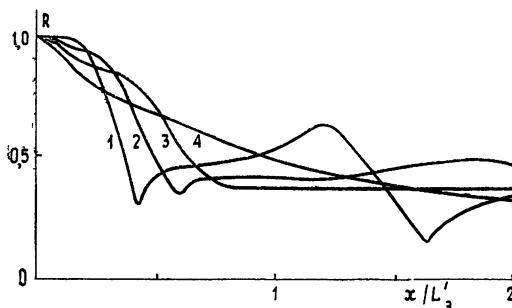


Рис. 4

Необходимо отметить при этом, что теория оптических эффектов на кубической нелинейности ХЖК, развитая выше, требует, прежде чем станет возможным предложение оптимального эксперимента, ряда количественных уточнений. Среди них основными являются учет нестационарности нелинейного отклика, а также изменений холестерической структуры сильным полем через термодинамические механизмы.

Авторы благодарны С. А. Ахманову за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Аракелян С. М., Ляхов Г. А., Чилингариан Ю. С. Препринт Гос. ун-та № КО-79-02 — Ереван, 1979, — УФН, 1980, 131, № 1, с. 3.
- 2 Де Жеен П. Физика жидких кристаллов — М.: Мир, 1977
- 3 Пинскер З. Г. Динамическая теория рассеяния рентгеновских лучей в идеальных кристаллах. — М.: Наука, 1974.
- 4 Горшков А. С., Марченко В. Ф. — Изв. вузов — Радиофизика, 1967, 10, № 6, с. 825
- 5 Ляхов Г. А., Макаров В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 12, с. 1453.
- 6 Hanson E. G., Shen J. R., Wong G. K. L. — Appl. Phys., 1977, 14, p. 65.
- 7 Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. — М.: Наука, 1979.
- 8 Maier W., Saure A.-Z. Naturforsch, 1960, A-15, p. 287.
- 9 Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Сухов А. В., Табирян Н. В. — Письма в ЖЭТФ, 1980, 31, с. 287.
- 10 Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. — УФН, 1967, 93, с. 19
- 11 Takagi S. — Acta Cryst., 1962, 15, p. 1311.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
26 февраля 1980 г.

#### SELF-ACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A PERIODICALLY INHOMOGENEOUS MEDIUM: DYNAMIC LIGHT SCATTERING BY CHOLESTERIC LIQUID CRYSTALS

G. A. Lyakhov, V. A. Makarov

An effect of optical nonlinearity on parameters of dynamic scattering in cholesteric liquid crystals is theoretically described. An effect of the nonlinear variation of the period of pendular beatings in two wave interaction has been suggested and calculated. A method of the secondary shortaining of the wave equation is developed; it is shown that the nonlinearity accelerates the process of diffraction energy division between passing and scattered beams.