

УДК 538.574.6

ПОЛУТЕНЕВЫЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Ю. И. Орлов, С. К. Тропкин

Получены равномерные асимптотические решения волнового уравнения в плавно неоднородной среде в условиях образования зоны полутени для геометрикооптических или дифракционных лучей. Решения используют функцию параболического цилиндра (функцию Вебера) и ее первую производную и справедливы как вдали, так и вблизи от области полутени. Показано, что амплитудные коэффициенты и аргументы равномерной асимптотики алгебраически определяются через амплитуды и эйконалы геометрикооптического и дифракционного лучей. Полученные решения обобщают формулы геометрической теории дифракции на область полутени в неоднородной среде и дают новую равномерную полутеневую асимптотику, применимую для более широкого круга задач, чем известная равномерная полутеневая асимптотика на основе интегралов Френеля. Последняя является частным случаем асимптотики, построенной в данной работе. Приводятся примеры применения полученной асимптотики.

Геометрическая теория дифракции (ГТД) и ее известные полутеневая [1-3] и каустическая [4-6] модификации позволяют определять волновые поля в разнообразных задачах высокочастотной дифракции, в частности, при дифракции волн на телах с кромками [2, 5, 6], при распространении волн в неоднородных средах «антиволноводного» типа [7], где возможно образование зоны тени. В последнем случае дифракционные лучи в зоне тени описывают распространение боковой волны, возникающей на границе раздела двух сред. Боковая волна в зоне тени достаточно подробно исследовалась в литературе (см., например, [7-10]). Формулы ГТД для поля боковой волны справедливо вдали от границы геометрической тени (вдали от некоторого предельного луча); в области полутени они требуют специальной модификации. Известная френелевская полутеневая асимптотика [1-3] в этом случае неприменима. В связи с этим окрестность границы тени для боковой волны специально рассматривалась в работах [7, 8, 11-13], где для ряда частных случаев была получена локальная асимптотика поля в области полутени. Однако известные решения не дают в общем случае равномерной асимптотики поля, справедливой на любых (как угодно малых и больших) расстояниях от границы тени.

В данной работе получено равномерное асимптотическое решение волнового уравнения в плавно неоднородной среде, справедливое вдали и вблизи от указанной области полутени. Решение использует функцию параболического цилиндра и ее первую производную*. Показано, что амплитудные коэффициенты и аргументы равномерной асимптотики алгебраически определяются через амплитуды и эйконалы геометрикооптического и дифракционного лучей. Полученное решение обобщает формулы ГТД на область полутени в неоднородной среде и дает новую

* Отметим, что сходная конструкция решения использовалась в [14-17] в других задачах: для описания волнового поля между двумя ветвями каустик и для определения поля в окрестности границы тени для волны, отраженной от боковой поверхности конуса.

равномерную полутеневую асимптотику, применимую, как будет показано ниже, для более широкого круга задач, чем известная френелевская равномерная полутеневая асимптотика [1-3]. Последняя является частным случаем асимптотики, построенной в данной работе.

1. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Будем искать коротковолновое асимптотическое (при $k \rightarrow \infty$) решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 n^2(\mathbf{r}) u = 0 \quad (1)$$

в плавно неоднородной среде с показателем преломления $n(\mathbf{r})$ в следующем виде:

$$u(\mathbf{r}) = k^{-\nu/2} e^{ik\theta} \left[D_{-\nu-1}(\zeta) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(ik)^m} + k^{-1/2} D'_{-\nu-1}(\zeta) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{(ik)^m} \right], \quad (2)$$

где $\zeta = k^{1/2} \zeta_0$; A_m , B_m , ζ_0 , θ — искомые функции координат \mathbf{r} , имеющие по k порядок $O(1)$ *; $D'_{-\nu-1}(\zeta) \equiv (d/d\zeta) D_{-\nu-1}(\zeta)$; $D_{\nu}(\zeta)$ — функция параболического цилиндра (функция Вебера) [18], удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$D_{\nu}''(\zeta) + [\mu + (1/2) - (1/4)\zeta^2] D_{\nu}'(\zeta) = 0. \quad (3)$$

Поясним основную структуру решения (2). Будем считать, что $\zeta = 0$ на некотором предельном (граничном) луче, разделяющем две различные области лучевой картины. Рассмотрим асимптотику поля (2) вдали от граничного луча. При $|\zeta| \gg 1$ и $\arg \zeta = 3\pi/4$ справедлива асимптотика [18]

$$D_{-\nu-1}(\zeta) = \zeta^{-\nu-1} e^{-\zeta^2/4} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\nu+1)} e^{-i\pi(\nu+1)} \zeta^{\nu} e^{\zeta^2/4}, \quad (4)$$

с учетом которой из (2) получим в нулевом ($m=0$) приближении

$$u(\mathbf{r}) = U^{(1)} e^{ik\varphi^{(1)}} + U^{(2)} e^{ik\varphi^{(2)}}, \quad (5)$$

где

$$U^{(1)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\nu+1)} e^{-i\pi\nu} \zeta_0^{\nu} \left(A_0 + \frac{1}{2} \zeta_0 B_0 \right), \quad \varphi^{(1)} = \theta - \frac{i}{4} \zeta_0^2, \quad (6)$$

$$U^{(2)} = k^{-\nu-1/2} \zeta_0^{-\nu-1} \left(A_0 - \frac{1}{2} \zeta_0 B_0 \right), \quad \varphi^{(2)} = \theta + \frac{i}{4} \zeta_0^2.$$

Аналогично при $|\zeta| \gg 1$ и $\arg \zeta = -\pi/4$, учитывая асимптотику [18]

$$D_{-\nu-1}(\zeta) = \zeta^{-\nu-1} e^{-\zeta^2/4}, \quad (7)$$

из (2) при $m=0$ найдем

$$u(\mathbf{r}) = U^{(2)} e^{ik\varphi^{(2)}}, \quad (8)$$

где $U^{(2)}$ и $\varphi^{(2)}$ даются формулами (6). Асимптотики поля (5) и (8) имеют лучевую структуру, причем различную в разных областях. Решение же (2) описывает плавный переход одной лучевой структуры в другую при пересечении граничного луча $\zeta = 0$.

Перейдем теперь к определению неизвестных функций в решении

* Как обычно, здесь и далее порядок по k понимается не как зависимость от частоты, а как зависимость от безразмерного большого параметра kL , где L — характерный масштаб изменения поля и среды.

(2). Подставим (2) в уравнение (1), исключим высшие производные $D''_{-\nu-1}$, $D'''_{-\nu-1}$ с помощью уравнения (3) и его следствия ($\mu = -\nu - 1$):

$$D''_{\mu}(\zeta) - \frac{1}{2}\zeta D_{\mu}(\zeta) + \left[\mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\zeta^2 \right] D'_{\mu}(\zeta) = 0.$$

Затем приравняем нулю коэффициенты при $D_{-\nu-1}(\zeta)$ и $D'_{-\nu-1}(\zeta)$ (в силу их линейной независимости) и коэффициенты при одинаковых степенях k^{-m} . Тогда можно получить следующие уравнения для определения неизвестных фазовых функций ζ_0 и θ и амплитудных функций нулевого приближения ($m = 0$) A_0, B_0 :

$$(\nabla\theta)^2 - (1/4)\zeta_0^2(\nabla\zeta_0)^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad \nabla\theta\nabla\zeta_0 = 0; \quad (9)$$

$$L_2(B_0) - i(\nu + (1/2))(\nabla\zeta_0)^2 B_0 + L_1(A_0) = 0; \quad (10)$$

$$L_2(A_0) - i(\nu + 1/2)(\nabla\zeta_0)^2 A_0 - 1/2\zeta_0(\nabla\zeta_0)^2 B_0 - \quad (11)$$

$$-1/4\zeta_0^2 L_1(B_0) = 0,$$

где

$$L_1(\psi) \equiv 2\nabla\psi\nabla\zeta_0 + \psi\Delta\zeta_0, \quad L_2(\psi) \equiv 2\nabla\psi\nabla\theta + \psi\Delta\theta.$$

Уравнения (9), как обычно [4-6, 14], являются следствием условия нетривиальной разрешимости системы уравнений для A_0 и B_0 . Они легко могут быть сведены к уравнению эйконала $(\nabla\varphi)^2 = n^2(\mathbf{r})$ для функций

$$\varphi^{(1,2)} = \theta \mp (i/4)\zeta_0^2, \quad (12)$$

совпадающих с (6). Действительно, умножая второе уравнение в (9) на $\mp i\zeta_0$ и складывая его с первым, получим

$$(\nabla\theta)^2 \mp i\zeta_0(\nabla\theta\nabla\zeta_0) - (1/4)\zeta_0^2(\nabla\zeta_0)^2 \equiv [\nabla(\theta \mp (i/4)\zeta_0^2)]^2 \equiv (\nabla\varphi^{(1,2)})^2 \equiv n^2(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Аналогично, хотя и более громоздко, можно показать, что уравнения (10), (11) сводятся к уравнениям переноса для функций $U^{(1)}, U^{(2)}$, определяемых формулами (6):

$$\operatorname{div} [(U^{(1)})^2 \nabla\varphi^{(1)}] = U^{(1)} (2\nabla U^{(1)} \nabla\varphi^{(1)} + U^{(1)} \Delta\varphi^{(1)}) = 0, \quad (14)$$

$$\operatorname{div} [(U^{(2)})^2 \nabla\varphi^{(2)}] = U^{(2)} (2\nabla U^{(2)} \nabla\varphi^{(2)} + U^{(2)} \Delta\varphi^{(2)}) = 0.$$

Справедливость (14) можно, например, проверить, если подставить выражения (6), (12) для $U^{(1,2)}$ и $\varphi^{(1,2)}$ в (14) и учесть уравнения (10), (11).

Из полученных уравнений (13), (14) и выражений (5), (8) следует, что функции $U^{(1,2)}$ и $\varphi^{(1,2)}$ могут быть выражены через амплитуды и эйконалы соответствующих лучей. При этом, согласно (6), $U^{(2)} = O(k^{-\nu-1/2} U^{(1)})$, что присуще полю дифракционных лучей. Поэтому следует положить $U^{(1)} \equiv U_{\Gamma_0}$, $\varphi^{(1)} \equiv \varphi_{\Gamma_0}$, $U^{(2)} \equiv U_{\mathbf{d}}$, $\varphi^{(2)} \equiv \varphi_{\mathbf{d}}$, где U_{Γ_0} , φ_{Γ_0} , $U_{\mathbf{d}}$, $\varphi_{\mathbf{d}}$ — амплитуды и эйконалы соответственно геометрического и дифракционного лучей. Величины U_{Γ_0} , φ_{Γ_0} , $U_{\mathbf{d}}$, $\varphi_{\mathbf{d}}$ могут быть найдены с помощью формул геометрической оптики и ГТД и ниже предполагаются известными. Если $\arg\zeta$ ниже выбирать так же, как и в формулах (4), (7), то, согласно (6), $\varphi^{(2)} \geq \varphi^{(1)}$, а значит, $\varphi_{\mathbf{d}} \geq \varphi_{\Gamma_0}$. Будем считать сначала, что это условие выполняется.

Учитывая вышесказанное, из формул (6) и (12) можно найти все неизвестные функции в (2), выразив их алгебраически через амплитуды и эйконалы геометрического и дифракционного лучей:

$$A_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi}} e^{i\pi\nu} \zeta_0^{-\nu} U_{\Gamma_0} + \zeta_0^{\nu+1} U_{\lambda}^{(0)} \right), \quad (15)$$

$$B_0 = \frac{1}{\zeta_0} \left(\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi}} e^{i\pi\nu} \zeta_0^{-\nu} U_{\Gamma_0} - \zeta_0^{\nu+1} U_{\lambda}^{(0)} \right);$$

$$\theta = (1/2)(\varphi_{\lambda} + \varphi_{\Gamma_0}), \quad \zeta_0 = \pm e^{-i(\pi/4)} \sqrt{2(\varphi_{\lambda} - \varphi_{\Gamma_0})}, \quad (16)$$

где $U_{\lambda}^{(0)} = k^{\nu+1/2} U_{\lambda} = O(1)$, а знак минус в формуле для ζ_0 отвечает $\arg \zeta_0 = 3\pi/4$.

Подставляя полученные выражения (15), (16) в (2), представим главный член ($m=0$) равномерной асимптотики (2) в следующем каноническом виде:

$$u(\mathbf{r}) = e^{ik\theta} \left[\frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) D_{-\nu-1}(\zeta) + \frac{1}{\zeta} (Q_1 - Q_2) D'_{-\nu-1}(\zeta) \right], \quad (17)$$

где

$$Q_1 = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi}} e^{i\pi\nu} \zeta^{-\nu} U_{\Gamma_0}, \quad Q_2 = \zeta^{\nu+1} U_{\lambda}, \quad (18)$$

$$\theta = \frac{1}{2} (\varphi_{\lambda} + \varphi_{\Gamma_0}), \quad \zeta = e^{i(\pi/4) \pm i(\pi/2)} \sqrt{2k(\varphi_{\lambda} - \varphi_{\Gamma_0})},$$

при этом $\varphi_{\lambda} \geq \varphi_{\Gamma_0}$, а правило выбора $\arg \zeta$ обсуждается ниже.

2. ОБСУЖДЕНИЕ И ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ

В случае $|\zeta| \gg 1$ и $\arg \zeta = 3\pi/4$, согласно (5), (6), из решения (17) вытекает следующая лучевая асимптотика:

$$u(\mathbf{r}) = U_{\Gamma_0} e^{ik\varphi_{\Gamma_0}} + U_{\lambda} e^{ik\varphi_{\lambda}}, \quad (19)$$

которая представляет сумму полей геометрического и дифракционного лучей. Аналогично в области $|\zeta| \gg 1$ и $\arg \zeta = -\pi/4$ из (17) находим

$$u(\mathbf{r}) = U_{\lambda} e^{ik\varphi_{\lambda}}, \quad (20)$$

что отвечает вкладу только дифракционного луча. Из сравнения (19), (20) видно, что поверхность $\zeta = 0$ является границей тени для лучей геометрической оптики. Лучевая картина, соответствующая лучевой асимптотике (19), (20), а следовательно, и равномерной асимптотике (17), изображена на рис. 1а. При этом $\arg \zeta = 3\pi/4$ в области I (рис. 1а) и $\arg \zeta = -\pi/4$ — в области II.

Лучевое приближение (19), (20) неприменимо вблизи границы тени для лучей геометрической оптики (вблизи предельного луча геометрической оптики $\zeta = 0$), так как здесь, согласно ГТД, $U_{\lambda} \rightarrow \infty$. В отличие от (19), (20), решение (17), (18) справедливо и в области полутени ($|\zeta| \sim 1$), и на произвольном расстоянии от нее. Поэтому оно дает равномерную полутеневую асимптотику волнового поля, совпадающую вдали от границы тени с лучевой асимптотикой (19), (20).

Напомним, что при выводе формул (17), (18) предполагалось, что $\varphi_{\lambda} \geq \varphi_{\Gamma_0}$. В противном случае, когда $\varphi_{\Gamma_0} \geq \varphi_{\lambda}$, но лучевая картина по-прежнему имеет вид, показанный на рис. 1а, равномерная полутеневая асимптотика поля принимает вид

$$u(\mathbf{r}) = e^{ik\theta} \left[\frac{1}{2} (Q_1 e^{-i2\pi\nu} + Q_2) D_{-\nu-1}(\zeta) + \frac{1}{\zeta} (Q_1 e^{-i2\pi\nu} - Q_2) D'_{-\nu-1}(\zeta) \right], \quad (21)$$

где

$$\zeta = e^{-i(\pi/4) \mp i(\pi/2)} \sqrt{2k(\varphi_{r,0} - \varphi_d)}, \quad (22)$$

а остальные величины даются выражениями (18), причём $\arg \zeta = -3\pi/4$ в области I (рис. 1а) и $\arg \zeta = \pi/4$ — в области II.

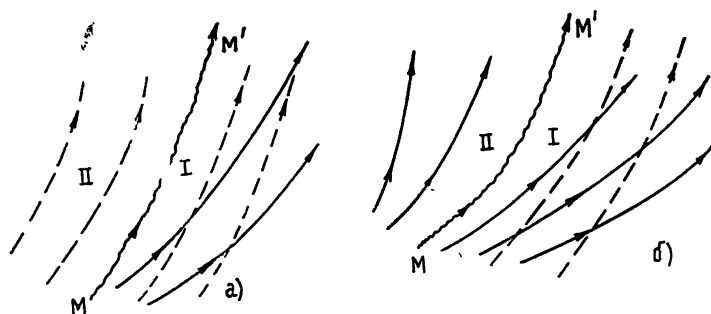


Рис. 1. Лучевые картины полутеневого дифракции.

Сплошные линии — лучи геометрической оптики. Пунктир — дифракционные лучи.

- а) MM' — предельный луч геометрической оптики (граница тени).
 б) MM' — предельный дифракционный луч (граница тени для дифракционной волны).

Формулы равномерной асимптотики (17) и (21) были получены из выражения (2) при использовании в нем одного из возможных решений уравнения (3), а именно $D_\mu(\zeta)$ ($\mu = -\nu - 1$). Основные уравнения метода (9)–(11) не изменяются при замене $D_\mu(\zeta)$ в выражении (2) на функции $D_\mu(-\zeta)$, $D_{-\mu-1}(\pm i\zeta)$, которые также удовлетворяют (3) [18]. Рассмотрим в качестве новой эталонной функции $D_{-\mu-1}(i\zeta)$ или, что то же, $D_\nu(i\zeta)$ ($\mu = -\nu - 1$)*. В этом случае равномерная полутеневая асимптотика поля строится аналогично (17), (18) и имеет следующий вид:

$$u(r) = e^{ik\theta} \left[\frac{1}{2} (P_2 + P_1) D_\nu(\xi) + \frac{1}{\xi} (P_2 - P_1) D'_\nu(\xi) \right] + U_{r,0}^0 e^{ik\varphi_{r,0}}, \quad (23)$$

где

$$P_1 = \xi^{-\nu} \tilde{U}_{r,0} = \xi^{-\nu} (U_{r,0} - U_{r,0}^0), \quad P_2 = \frac{\Gamma(-\nu)}{\sqrt{2\pi}} e^{i\pi(\nu+1)} \xi^{\nu+1} U_d, \quad (24)$$

$$\theta = \frac{1}{2} (\varphi_d + \varphi_{r,0}), \quad \xi = e^{-i(\pi/4) \mp i(\pi/2)} \sqrt{2k(\varphi_d - \varphi_{r,0})},$$

а $U_{r,0}^0 = U_{r,0}^{rp} (J_{rp}/J)^{1/2}$, $U_{r,0}^{rp}$ — амплитуда геометрического луча на границе тени (при $\xi = 0$)**. Лучевая картина, соответствующая решению (23), представлена на рис. 1б. В области тени II для дифракционных лучей (рис. 1б) поле определяется геометрическими лучами, а в области I — геометрическими и дифракционными лучами. При этом $\varphi_d \gg \varphi_{r,0}$ и $\arg \xi = -3\pi/4$ в области I, а в области II — $\arg \xi = \pi/4$. Решение (23) справедливо вблизи и вдали от границы

* Можно показать, что применение других решений $D_\mu(-\zeta)$ и $D_{-\mu-1}(-i\zeta)$ не приводит к принципиально новым вариантам лучевой картины, а лишь переставляет местами две различные области I и II на лучевых картинах рис. 1 (в соответствии с заменой ζ на $-\zeta$).

** Здесь $J = ndS/n^0 dS^0$ — расходимость геометрических лучей, а J_{rp} — расходимость, вычисленная на границе тени.

тени для дифракционных лучей и описывает переход из области света I в область тени II. Специфика полученной асимптотики связана с тем, что в случае лучевой картины, изображенной на рис. 16, геометрооптическое поле непрерывно в пространстве, в то время как поле дифракционных лучей сингулярно и испытывает разрыв на границе тени. Наличие разности $U_{\Gamma_0} - U_{\Gamma_0}^0$ в решении (23), (24) обеспечивает компенсацию сингулярности поля дифракционных лучей и тем самым обеспечивает регулярность решения (23) в области полутени.

В случае $\varphi_{\Gamma_0} \geq \varphi_{\Delta}$ для решения, соответствующего лучевой картине рис. 16, аналогично (21) имеем

$$u(\mathbf{r}) = e^{ik\theta} \left[\frac{1}{2} (P_2 e^{-i2\pi\nu} + P_1) D_\nu(\xi) + \frac{1}{\xi} (P_2 e^{-i2\pi\nu} - P_1) D'_\nu(\xi) \right] + U_{\Gamma_0}^0 e^{ik\varphi_{\Gamma_0}}, \quad (25)$$

где $P_{1,2}$, θ определяются формулами (24), а

$$\xi = e^{i(\pi/4) \pm i(\pi/2)} \sqrt{2k(\varphi_{\Gamma_0} - \varphi_{\Delta})}, \quad (26)$$

причем $\arg \xi = 3\pi/4$ в области I (рис. 16) и $\arg \xi = -\pi/4$ в области II.

Подчеркнем, что все полученные выше равномерные асимптотические решения применимы к любой задаче с полутеневой дифракцией, в которой дифракционное поле имеет степенной порядок по k : $U_{\Delta} = O(k^{-\nu-1/2} U_{\Gamma_0}^0)^*$, а лучевая картина имеет вид, представленный на рис. 1. Примерами таких задач являются распространение волн в неоднородных средах «антиволноводного» типа с зоной тени**, излучение источников над границами раздела однородных и неоднородных сред, дифракция волн на криволинейных экранах и телах с кромками и т. п.

3. ПРИМЕРЫ

а) Полутеневая дифракция на криволинейной поверхности с ребром (на криволинейном клине). Поле в области полутени падающей или отраженной волны в этом случае определяется формулой (17), соответствующей лучевой картине рис. 1а. При этом, согласно ГТД, для поля краевой волны, испускаемой ребром поверхности, имеем $\varphi_{\Delta} \geq \varphi_{\Gamma_0}$ и $U_{\Delta} = O(k^{-1/2} U_{\Gamma_0}^0)$, что в соответствии с (6) дает $\nu = 0$. Тогда из (17), (18) получим

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\theta} \left[\frac{1}{2} (U_{\Gamma_0}^0 + \sqrt{2\pi} \zeta U_{\Delta}) D_{-1}(\zeta) + \frac{1}{\zeta} (U_{\Gamma_0}^0 - \sqrt{2\pi} \zeta U_{\Delta}) D'_{-1}(\zeta) \right], \quad (27)$$

где

$$\zeta = \sqrt{2} e^{-i\pi/4} \tau_0, \quad \tau_0 = \mp \sqrt{k(\varphi_{\Delta} - \varphi_{\Gamma_0})}, \quad \theta = (1/2)(\varphi_{\Delta} + \varphi_{\Gamma_0}),$$

а верхний (нижний) знак для τ_0 берется в области света (тени). Воспользовавшись далее формулой связи $D_{-1}(\zeta)$ с интегралом вероятности ([19], с. 1081),

* Напомним, что подразумевается не частотная зависимость, а порядок по безразмерному большому параметру kL .

** При исследовании боковых волн, распространяющихся вдоль металлической и импедансной границ [12, 13] или вдоль произвольной криволинейной границы раздела двух неоднородных сред, оказывается, что дифракционное поле имеет экспоненциальный (а не степенной) порядок по k . В этом случае полученные решения должны быть специальным образом видоизменены.

$$D_{-1}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\xi^2/4} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi/\sqrt{2}} e^{-t^2} dt \right),$$

из (27) окончательно находим

$$u(\mathbf{r}) = U_d e^{ik\varphi_d} + U_{r.o} e^{ik\varphi_{r.o}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\tau_0}^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau + \frac{\exp(i\tau_0^2)}{2i\tau_0} \right). \quad (28)$$

Формула (28) совпадает с френелевской [1-3] равномерной полутене-вой асимптотикой, отвечающей случаю $\varphi_{r.o} \leq \varphi_d$ (см., например, (14а) в [5]). Аналогично из выражения (21) при $\nu = 0$ вытекает другой вариант френелевской асимптотики для $\varphi_{r.o} \geq \varphi_d$ (см., например, (14б) в [5]).

б) Излучение точечного источника над границей раздела двух однородных сред (рис. 2) при $n_1 > n_2$ сопровождается, как известно [7, 8], появлением боковой волны за лучом полного отражения. Послед-

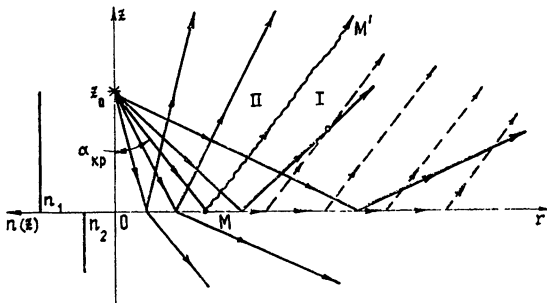


Рис 2 Боковая волна на границе раздела двух однородных сред.

Сплошные линии — лучи геометрической оптики.
Пунктир — дифракционные лучи (боковая волна).
 MM' — луч полного отражения.

ний является границей тени II (рис. 2) для боковой волны (дифракционных лучей), что соответствует лучевой картине рис. 1б. Согласно [7, 8], для поля боковой волны имеем $U_d = O(k^{-1} U_{r.o})$ и $\varphi_d \leq \varphi_{r.o}$, что в соответствии с (6) дает $\nu = 1/2$. Тогда из (25), (24) получим равномерную асимптотику отраженного поля в среде n_1 (рис. 2):

$$u(\mathbf{r}) = e^{ik\theta} \left[\frac{1}{2\sqrt{\xi}} (\tilde{U}_{r.o} - i\sqrt{2}\xi^2 U_d) D_{1/2}(\xi) - \frac{1}{\xi\sqrt{\xi}} (\tilde{U}_{r.o} + i\sqrt{2}\xi^2 U_d) D'_{1/2}(\xi) \right] + U_{r.o}^0 e^{ik\varphi_{r.o}}, \quad (29)$$

где

$$\theta = 1/2 (\varphi_d + \varphi_{r.o}), \quad \xi = e^{i(\pi/4) \pm i(\pi/2)} \sqrt{2k (\varphi_{r.o} - \varphi_d)},$$

а верхний (нижний) знак берется в области света (тени) дифракционных лучей.

Для рассматриваемой задачи амплитуды и эйконалы геометрических и дифракционных лучей определяются следующими формулами [7, 8]:

$$\tilde{U}_{r.o} = - \frac{2\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n^2 \cos\alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \frac{1}{R}, \quad U_{r.o}^0 = \frac{1}{R},$$

$$U_{r,0} = \tilde{U}_{r,0} + U_{r,0}^0, \quad \varphi_{r,0} = R = \sqrt{(z + z_0)^2 + r^2}, \quad (30)$$

$$U_d = 2 / \{ i k n \sqrt{r \cos \alpha_{кр}} [R \sin(\alpha - \alpha_{кр})]^{3/2} \}, \quad \varphi_d = R \cos(\alpha - \alpha_{кр}),$$

где

$$n = n_2/n_1, \quad \sin \alpha = r/R, \quad \sin \alpha_{кр} = n, \quad k = (\omega/c) n_1.$$

Вблизи луча полного отражения $\alpha = \alpha_{кр}$ формула (29) переходит в более простую локальную полутеневую асимптотику, совпадающую с асимптотикой точного решения задачи [7]. Если интеграл в точном решении задачи [7] вычислить с помощью асимптотического метода [11], справедливого при произвольном (в том числе сколь угодно близком) расположении точки ветвления и перевальной точки, то получим выражение для поля, полностью совпадающее с равномерной асимптотикой (29)*.

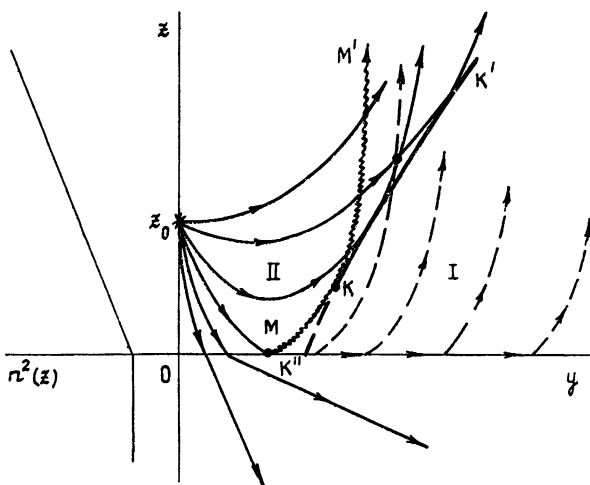


Рис. 3 Боковая волна на слабой границе раздела в неоднородной среде.

Сплошные линии — лучи геометрической оптики. Пунктир — дифракционные лучи (боковая волна). MM' — предельный луч (область полутени боковой волны)

в) *Излучение точечного источника вблизи слабой границы раздела в линейном слое.* Геометрия задачи изображена на рис. 3. Если рассматривать точку наблюдения вдаль от каустики $K'KK''$, то структура поля в области полутени боковой волны (вблизи предельного луча MKM' , касающегося границы раздела) аналогична случаю, обсуждаемому в п. б, и описывается вблизи KM' формулой (29). Вблизи MK , где $\varphi_d \geq \varphi_{r,0}$, поле определяется формулами (23), (24) (при $\nu = 1/2$). При этом амплитуды и эйконалы геометрического и дифракционного лучей для данной задачи могут быть без труда определены (см., в частности, [9, 10]). Можно показать, что равномерные асимптотические формулы для полутеневого поля в этой задаче совпадают с асимптотикой точного решения.

В заключение статьи отметим, что полученная в данной работе полутеневая асимптотика неприменима в окрестности каустик, где она должна быть специальным образом модифицирована. Напомним, что

* В работе [11] в качестве примера исследовалось отдельно поле боковой волны, что является неестественным для области полутени, где происходит зарождение боковой волны, и поэтому существует только полное поле, которое и должно здесь рассматриваться (см. (29))

каустическая модификация обычной френелевской полутеневой асимптотики предложена в работах [5, 6], где исследовалось поле в окрестности каустик, расположенных в области полутени (в окрестности полутеневых каустик). Очевидно, что полученные решения (17), (21), (23), (25) допускают обобщения на векторный (электромагнитный) случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lewis R M., Boersma J.—J. Math Phys., 1969, 10, № 12, p. 2291.
2. Ahluwalia D A.—SIAM J. Appl Math, 1970, 18, № 2, p. 287.
3. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции — М.: Связь, 1978
4. Кравцов Ю. А — Изв. вузов — Радиофизика, 1964, 7, № 4, с. 664; № 6, с. 1049; — Акуст. журн., 1968, 14, № 1, с. 1
5. Орлов Ю И — Радиотехника и электроника, 1975, 20, № 2, с. 242.
6. Орлов Ю И — Радиотехника и электроника, 1976, 21, № 1, с. 62
7. Бреховских Л М Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973
8. Фелсен Л., Маркувиц Н Излучение и рассеяние волн — М.: Мир, 1978.
9. Цепелев Н В — Записки научных семинаров ЛОМИ, 1969, 15, № 2, с. 187; 1970, 17, № 3, с. 209
10. Тинин М. В — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 4, с. 505
11. Bleistein N.—Comm. Pure and Appl. Math., 1966, 19, № 4, p. 353.
12. Jones D. S.—Philos. Trans. Roy. Soc. Lond, 1963, 255, № 1058, p. 341.
13. Levey L, Felsen L. B — J. Inst. Math. Appl., 1967, 3, № 1, p. 76.
14. Кравцов Ю А.—Изв вузов — Радиофизика, 1965, 8, № 4, с. 659
15. Быков В П.—Изв вузов — Радиофизика, 1971, 14, № 6, с. 880.
16. Янсон З А — Записки научных семинаров ЛОМИ, 1970, 17, № 3, с. 218
17. Бродская А. Л, Попов А В, Хозиоский С. А. Краткие тексты докладов VI Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. 1973, 1, с. 227.
18. Уиттекер Э. Т, Ватсон Д Н Курс современного анализа. — М. Физматгиз, 1963 — Т. 2.
19. Градштейн И С., Рыжик И М Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений — М.: Физматгиз, 1963.

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
11 января 1980 г.

PENUMBRA DIFFRACTION FIELDS IN INHOMOGENEOUS MEDIA

Yu. I. Orlov, S. K. Troppin

Uniform asymptotic solutions of a wave equation have been derived in a smoothly inhomogeneous medium under the condition of a penumbra zone formation for geometrooptical and diffraction rays. Solutions utilize the function of a parabolic cylinder (Weber function) and its first derivative and they are valid close to the penumbra region and far from it. It is shown that amplitude coefficients and arguments of the uniform asymptotics are defined algebraically by amplitudes and eikonals of geometrooptical and diffraction rays. Solutions obtained generalize formulas of the geometrical diffraction theory for penumbra region in an inhomogeneous medium and give new uniform penumbra asymptotics used for a wider range of problems than the known uniform penumbra asymptotics based on Fresnel integrals. The latter is a particular case of the asymptotics built in the given paper. Examples of the asymptotics utilization are presented.