

УДК 538.56 : 627.372.55

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АДАПТИВНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО ФИЛЬТРА

А. А. Мальцев, Е. Т. Патронис

Исследуются стационарные характеристики адаптивного трансверсального фильтра с произвольным числом весовых коэффициентов при экспоненциально-коррелированных входных сигналах. Найдены аналитические выражения для оптимальных весовых коэффициентов и мощности сигнала ошибки. Применение этих выражений проиллюстрировано двумя примерами на использование адаптивного фильтра для моделирования фиксированной временной задержки и низкочастотного линейного фильтра первого порядка.

В последние годы адаптивные трансверсальные фильтры находят все более широкое применение для решения большого круга радиотехнических задач при недостаточной априорной информации о сигналах, помехах, каналах их распространения, используемых системах и т. п. (см., например, [1-4]). Однако несмотря на то, что к настоящему времени исследованию характеристик адаптивных фильтров посвящено уже довольно много работ, основным методом их анализа в случае большого числа регулируемых весовых коэффициентов являлось численное моделирование фильтров на ЭВМ [2, 3]. Поэтому задача нахождения точных аналитических выражений для стационарных характеристик адаптивных трансверсальных фильтров представляется весьма актуальной.

В настоящей работе эта задача решается для экспоненциально-коррелированных входных сигналов. Полученные результаты позволяют, в частности, быстро оценивать эффективность работы адаптивного трансверсального фильтра при использовании его в целях идентификации неизвестных систем или для автоматической компенсации помех [4].

1. ОБРАЩЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ И НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЕСОВОГО ВЕКТОРА

Рассмотрим общепринятую форму адаптивного трансверсального фильтра, показанного на рис. 1. Фильтр состоит из линии задержки 1

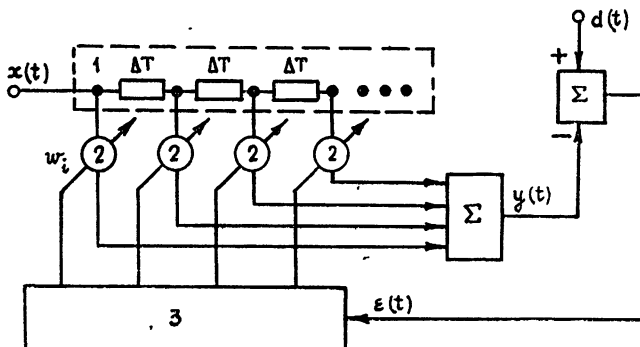


Рис. 1. Адаптивный трансверсальный фильтр.

с отводами, соединенными через регулируемые усилители 2 с сумматором. Весовые коэффициенты w_i (коэффициенты усиления) регулируемых усилителей подбираются адаптивным процессором 3 в соответствии с некоторым алгоритмом так, чтобы минимизировать средний квадрат ошибки $\varepsilon(t)$ между выходом фильтра $y(t)$ и «желаемым» откликом $d(t)$, который обычно представляет собой результат применения некоторого оператора к входному сигналу $x(t)$.

Предположим, что линия задержки имеет равномерно расположенные отводы, отстоящие друг от друга на ΔT , и что входной сигнал $x(t)$ — стационарный случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией

$$R_x[\tau] \equiv \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \sigma_x^2 \exp(-|\tau|/\tau_k). \quad (1)$$

Вектор входных сигналов $X(t)$ определим как*

$$X^T(t) \equiv [x_1, x_2, \dots, x_M],$$

где $x_i = x(t - T_i)$, $T_i = (i - 1)\Delta T$, M — число отводов у линии задержки.

Если вектор весовых коэффициентов W положить равным

$$W^T \equiv [w_1, w_2, \dots, w_M],$$

то выходное напряжение адаптивного фильтра будет выражаться через скалярное произведение

$$y(t) = W^T X(t) = \sum_{i=1}^M w_i x_i.$$

Средний квадрат ошибки $\varepsilon(t) = d(t) - y(t)$ на выходе сумматора равен

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \langle d^2(t) \rangle - 2P^T W + W^T \hat{R}_{xx} W. \quad (2)$$

Здесь P — корреляционный вектор входных сигналов и желаемого отклика:

$$P \equiv \langle d(t) X(t) \rangle, \quad (3)$$

а \hat{R}_{xx} — симметричная, положительно определенная корреляционная матрица входных сигналов:

$$\hat{R}_{xx} \equiv \langle X(t) X^T(t) \rangle. \quad (4)$$

Хорошо известно (см., например, [1, 2]), что оптимальный весовой вектор W^* , который минимизирует среднюю квадратичную ошибку (СКО) (2), получается как решение матричного уравнения Винера—Хопфа:

$$\hat{R}_{xx} W^* = P. \quad (5)$$

Подстановка решения этого уравнения в (2) приводит к минимальной СКО:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\min} = \langle d^2(t) \rangle - W^{*T} P = \langle d^2(t) \rangle - P^T \hat{R}_{xx}^{-1} P. \quad (6)$$

Наиболее распространенным алгоритмом решения уравнения (5) является градиентный алгоритм наискорейшего спуска [1-4]:

$$dW/dt = -(\gamma/2) \nabla_w \langle \varepsilon^2(t) \rangle, \quad (7)$$

* Верхним индексом «Т» мы обозначаем операцию транспонирования матрицы или вектора.

где γ — коэффициент, определяющий скорость настройки системы. При практической реализации алгоритма (7) неизвестное среднее значение градиента СКО обычно заменяется его мгновенной оценкой [1, 2]:

$$\nabla_w \langle \varepsilon^2(t) \rangle = 2 \langle \varepsilon(t) \nabla_w \varepsilon(t) \rangle \approx -2 \varepsilon(t) X(t). \quad (8)$$

Таким образом, с учетом (8) алгоритм настройки весовых коэффициентов описывается следующим векторным уравнением:

$$dW/dt = \gamma \varepsilon(t) X(t) = \gamma X(t) [d(t) - W^T X(t)]. \quad (9)$$

Это уравнение определяет структуру адаптивного процессора фильтра, показанного на рис. 1. Несложно показать, что при выполнении условия малости флуктуаций весовых коэффициентов стационарное решение уравнения (9) совпадает с оптимальным решением уравнения Винера—Хопфа (5).

Как видно из (5), (6), при получении аналитических выражений для компонент оптимального весового вектора и минимальной СКО требуется обращение корреляционной матрицы входных сигналов \hat{R}_{xx} размерности $[M \times M]$.

Используя (1) и (4), выражение для корреляционной матрицы \hat{R}_{xx} в нашем случае можно записать в простой форме:

$$\hat{R}_{xx} = \sigma_x^2 \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^{M-1} \\ r & 1 & r & \dots & r^{M-2} \\ r^2 & r & 1 & \dots & r^{M-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^{M-1} & r^{M-2} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где

$$r \equiv (1/\sigma_x^2) \langle x(t) x(t + \tau) \rangle = \exp(-\Delta T/\tau_k). \quad (11)$$

Легко показать, что обратная матрица для (10) равна

$$\hat{R}_{xx}^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2 (1 - r^2)} \begin{bmatrix} 1 & -r & 0 & 0 \dots 0 \\ -r & 1 + r^2 & -r & 0 \dots 0 \\ 0 & -r & 1 + r^2 & -r \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & -r \ 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (5) и (6), получим следующие выражения для компонент оптимального весового вектора W^* :

$$\begin{aligned} w_1^* &= (1/\sigma_x^2 (1 - r^2)) [p_1 - r p_2], \\ w_i^* &= (1/\sigma_x^2 (1 - r^2)) [-r p_{i-1} + (1 + r^2) p_i - r p_{i+1}] \\ &\quad (2 \leq i \leq M - 1), \\ w_M^* &= (1/\sigma_x^2 (1 - r^2)) [-r p_{M-1} + p_M], \end{aligned} \quad (13)$$

и минимальной СКО адаптивного фильтра:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\min} = \langle d^2(t) \rangle - \frac{1}{\sigma_x^2} \left[p_1^2 + \frac{1}{1 - r^2} \sum_{m=1}^{M-1} (r p_m - p_{m+1})^2 \right] =$$

$$= \langle d^2(t) \rangle - \frac{1}{\sigma_x^2} \left[\frac{1}{1-r^2} \sum_{m=1}^{M-1} (p_m - r p_{m+1})^2 + p_M^2 \right], \quad (14)$$

через компоненты корреляционного вектора P .

Интересно отметить, что каждая компонента оптимального весового вектора W^* (кроме первой — w_1^* — и последней — w_M^*) зависит только от трех «ближайших» компонент корреляционного вектора P . Это свойство является главным следствием экспоненциальной коррелированности входного сигнала.

Формулы (13), (14) дают точные аналитические выражения для оптимального вектора весовых коэффициентов и минимальной СКО адаптивного трансверсального фильтра с произвольным числом весовых коэффициентов M . Следует, однако, отметить, что обычно применяемые адаптивные процессоры находят оптимальные весовые коэффициенты с небольшой ошибкой и, как следствие этого, имеют СКО несколько больше минимальной (14) (см., например, [3, 5]). В следующих ниже примерах мы будем предполагать, что этими поправками можно пренебречь.

2. ДВА ПРИМЕРА МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

Чтобы проиллюстрировать применение формул (13), (14), мы рассмотрим два примера моделирования неизвестных динамических систем с помощью адаптивного трансверсального фильтра (см. рис. 2). Сигнал $x(t)$ подается одновременно на вход неизвестной системы и на вход адаптивного фильтра. Выходной сигналом неизвестной системы является в данной задаче «желаемым» откликом $d(t)$. Настройка фильтра производится по сигналу ошибки $\varepsilon(t)$.

В первом примере в качестве неизвестной системы берется фиксированная временная задержка, во втором — низкочастотный линейный фильтр первого порядка*.

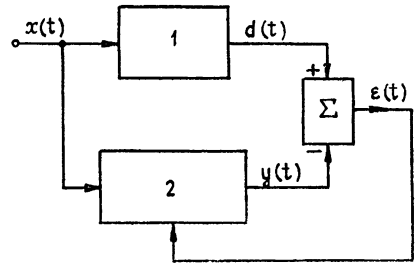


Рис. 2. Моделирование неизвестной системы (1) с помощью адаптивного трансверсального фильтра (2).

1. Моделирование фиксированной временной задержки.

Предположим, что неизвестная фиксированная задержка T_0 находится между T_{k-1} и T_k ($k-1$ -м и k -м) отводами линии задержки адаптивного фильтра. Таким образом, мы можем записать

$$T_0 = T_k - \delta, \quad 0 \leq \delta < \Delta T.$$

Выходной сигнал «неизвестной» системы $d(t)$ будет равен

$$d(t) = x(t - T_0) = x(t - T_k + \delta). \quad (15)$$

Используя (1), (3) и (15), получим следующее выражение для корреляционного вектора P :

$$P \equiv \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{k-1} \\ p_k \\ p_{k+1} \\ \dots \\ p_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{k-1} \exp(\delta/\tau_k) \\ r^{k-2} \exp(\delta/\tau_k) \\ \dots \\ r \exp(\delta/\tau_k) \\ 1 \exp(-\delta/\tau_k) \\ r \exp(-\delta/\tau_k) \\ \dots \\ r^{M-k} \exp(-\delta/\tau_k) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

* Эти примеры для цифрового адаптивного фильтра исследовались с помощью численного моделирования на ЭВМ в [3].

Подставляя (16) в (13), находим компоненты оптимального весового вектора

$$\begin{aligned} w_i^* &= 0 \quad (i \neq k-1, k), \\ w_{k-1}^* &= \frac{2r}{1-r^2} \operatorname{sh} \left(\frac{\Delta T/2 - \Delta}{\tau_k} \right), \\ w_k^* &= \frac{2r}{1-r^2} \operatorname{sh} \left(\frac{\Delta T/2 + \Delta}{\tau_k} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Delta = \Delta T/2 - \delta = T_0 - (T_{k-1} + T_k)/2$ — расстройка неизвестной временной задержки T_0 от середины между $k-1$ -м и k -м отводами линии задержки. На рис. 3 показана зависимость оптимальных весовых коэффициентов w_{k-1}^* , w_k^* от относительной расстройки $\Delta/\Delta T$ для различных отношений $\Delta T/\tau_k$ (все другие весовые коэффициенты при этом равны нулю).

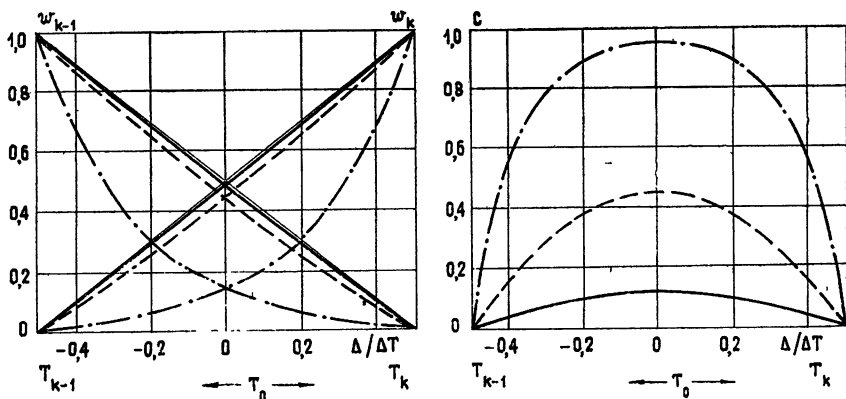


Рис. 3, 4. Моделирование фиксированной временной задержки: рис. 3 — оптимальные весовые коэффициенты, рис. 4 — коэффициент подавления шума $C = \langle \varepsilon^2 \rangle_{\min} / \sigma_x^2$ в зависимости от относительной расстройки $\Delta/\Delta T$.

Кривые приведены для разных отношений $\Delta T/\tau_k$: $\Delta T = 0,25 \tau_k$ — сплошные линии, $\Delta T = \tau_k$ — штриховые линии, $\Delta T = 4\tau_k$ — штрихпунктирные линии.

Выражение для минимальной СКО $\langle \varepsilon^2 \rangle_{\min}$ может быть получено подстановкой (16) в (14) или (еще проще) подстановкой (16) и (17) в (6):

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\min} = \sigma_x^2 \frac{\operatorname{ch}(\Delta T/\tau_k) - \operatorname{ch}(2\Delta/\tau_k)}{\operatorname{sh}(\Delta T/\tau_k)}. \quad (18)$$

На рис. 4 приведены графики для коэффициента подавления помехи (коэффициента адаптивности)

$$C \equiv \langle \varepsilon^2 \rangle_{\min} / \langle d^2(t) \rangle \quad (19)$$

в зависимости от относительной расстройки $\Delta/\Delta T$ при различных отношениях $\Delta T/\tau_k$. Коэффициент подавления помехи C является наиболее важной характеристикой адаптивного фильтра при использовании его в качестве адаптивного компенсатора помех [4].

Заметим, прежде всего, что только в отдельных точках, когда $T_0 = \dots, T_{k-1}, T_k, \dots$, соответствующие весовые коэффициенты равны единице (см. рис. 3) и только в этих точках наблюдается полное подавление шума $C = 0$ (см. рис. 4). Во-вторых, с уменьшением $\Delta T/\tau_k$ (для более частых отводов) зависимость w_{k-1}^* , w_k^* от $\Delta/\Delta T$ стремится к ли-

нейной (в интервале $|\Delta| \leq \Delta T/2$) и минимальная СКО уменьшается для любых T_0 . Однако для того, чтобы достигнуть $\langle \varepsilon^2 \rangle_{\min}$, например, меньше, чем $0,1 \sigma_x^2$ (-10 дБ) в наилучшей точке ($\Delta = 0$, $T_0 = (T_{k-1} + T_k)/2$), необходимо сделать очень частые отводы ($\Delta T/\tau_k < 0,25$) и, следовательно, иметь большое число регулируемых весовых коэффициентов.

2. Моделирование низкочастотного линейного фильтра первого порядка. В этом случае стационарный выходной сигнал системы представим интегралом Дюамеля

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (20)$$

где $h(\tau)$ — импульсная характеристика системы. Для низкочастотного фильтра первого порядка

$$h(\tau) = \begin{cases} be^{-q\tau}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}. \quad (21)$$

Здесь $1/q \equiv \tau_c$ — постоянная времени системы, b — коэффициент усиления.

Пользуясь формулами (3) и (20), найдем выражение для компонент корреляционного вектора \mathbf{P} через импульсную характеристику неизвестной линейной системы и корреляционную функцию входного сигнала

$$p_i = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) R_x [T_i - \tau] d\tau. \quad (22)$$

Подставляя (1) и (21) в (22), получим

$$p_i = \frac{b \sigma_x^2}{a^2 - q^2} [2a \exp(-qT_i) - (a + q) \exp(-aT_i)], \quad (23)$$

где $a \equiv 1/\tau_c$ — полоса спектра входного шума. Выражения для компонент оптимального весового вектора \mathbf{W}^* получаются подстановкой (23) в (13)*:

$$w_1^* = \frac{2abr}{(a^2 - q^2)(1 - r^2)} \left[\operatorname{ch} a\Delta T - \frac{q}{a} \operatorname{sh} a\Delta T - e^{-q\Delta T} \right],$$

$$w_i^* = \frac{4abr \exp(-qT_i)}{(a^2 - q^2)(1 - r^2)} [\operatorname{ch} a\Delta T - \operatorname{ch} q\Delta T] \quad (2 \leq i \leq M - 1), \quad (24)$$

$$w_M^* = \frac{2ab \exp(-qT_M)}{(a^2 - q^2)(1 - r^2)} [e^{a\Delta T} - e^{q\Delta T}].$$

Мощность сигнала на выходе моделируемой системы равна

$$\langle d^2(t) \rangle = b^2 \sigma_x^2 / q(a + q). \quad (25)$$

Подставляя (23) и (25) в (14), найдем минимальную СКО:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\min} = \frac{b^2 \sigma_x^2}{q(a + q)} \left\{ 1 - \frac{q}{a + q} \left[1 + \frac{4a^2}{(a - q)^2} \times \right. \right.$$

* Выражения (23), (24) формально справедливы в случае $a \neq q$, для $a = q$ они легко могут быть найдены корректным предельным переходом $a \rightarrow q$.

$$\times \left. \frac{\operatorname{sh}^2 \left[\frac{a-q}{2} \Delta T \right]}{\operatorname{sh}(a\Delta T) \operatorname{sh}(q\Delta T)} [1 - \exp(-2q(M-1)\Delta T)] \right\}. \quad (26)$$

Выражения (24) и (26) дают возможность оценить точность идентификации адаптивным трансверсальным фильтром неизвестного линейного фильтра и подсчитать по формуле (19) коэффициент подавления помехи C для любых величин τ_c , τ_k , ΔT и любого числа весовых коэффициентов M . Например, на рис. 5 показаны графики для коэффициента C в зависимости от $\Delta T/\tau_k$ для различного числа отводов M и различных отношений τ_c/τ_k . Из приведенных графиков видно, что существует оптимальное расстояние между соседними отводами ΔT^* , которое зависит как от числа отводов M (см. рис. 5а), так и от величины отношения $\tau_c/\tau_k \equiv a/q$ (см. рис. 5б). При этом увеличение M уменьшает минимальную СКО, а увеличение отношения τ_c/τ_k увеличивает ее.

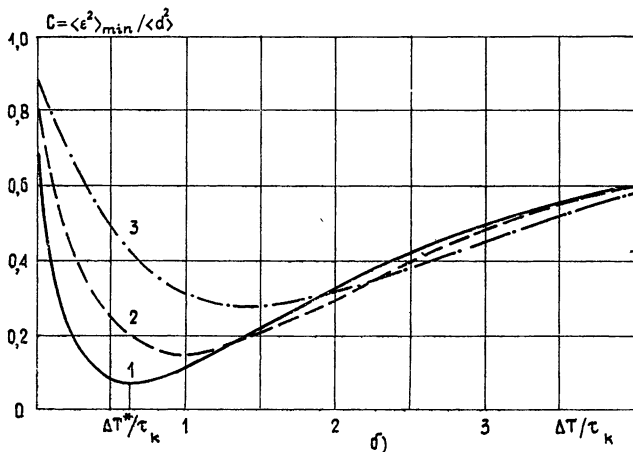
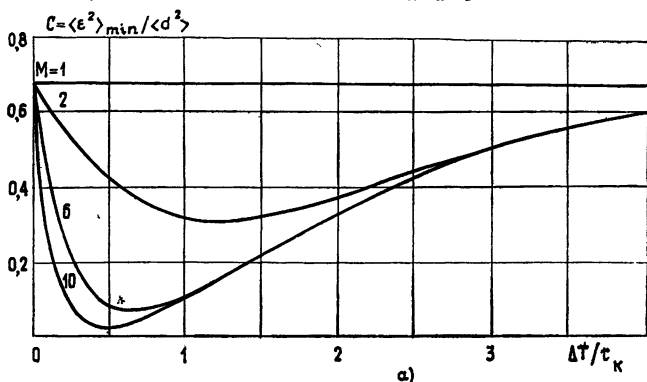


Рис. 5. Моделирование низкочастотного фильтра. Коэффициент подавления шума C как функция относительного расстояния между отводами $\Delta T/\tau_k$; кривые приведены а) для $\tau_c/\tau_k = 2$ и разного числа весовых коэффициентов M , б) для $M = 6$ и разной величины отношения τ_c/τ_k : 1 — $\tau_c = 2\tau_k$, 2 — $\tau_c = 4\tau_k$, 3 — $\tau_c = 8\tau_k$.

Выражения (24) и (25) существенно упрощаются в предельном случае широкополосного входного сигнала («белого» шума) и достаточно гладкой импульсной характеристики неизвестной системы, когда выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\Delta T}{\tau_k} = a\Delta T \gg 1, \quad \frac{\Delta T}{\tau_c} = q\Delta T \ll 1, \quad (27)$$

При этих условиях предельный переход в формулах (24) и (26) дает

$$\begin{aligned} w_1^* &= \tau_c h(0), \\ w_i^* &= 2 \tau_c h(T_i) \quad (i = 2, 3, \dots, M) \end{aligned} \quad (28)$$

и

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\min} = \langle d^2(t) \rangle \left[1 - \frac{2 \tau_c}{\Delta T} (1 - \exp(-2T_M/\tau_c)) \right]. \quad (29)$$

В случае большого числа отводов, когда

$$\frac{T_M}{\tau_c} = \frac{(M-1)\Delta T}{\tau_c} \gg 1, \quad (30)$$

формула (29) упрощается:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\min} = \langle d^2(t) \rangle \left[1 - \frac{2 \tau_c}{\Delta T} \right]. \quad (31)$$

Несложно показать, что предельные выражения для компонент оптимального весового вектора (28) и для минимальной СКО (31) при выполнении условий (27), (30) справедливы для любой неизвестной линейной системы. Формулы (28), (31), в частности, показывают, что при «белых» входных шумах адаптивный трансверсальный фильтр может с успехом использоваться для решения задачи идентификации линейных систем (см. (28)), однако его эффективность как компенсатора помех в этом случае довольно низкая (см. (31)).

В заключение отметим, что полученные в данной работе основные формулы (13), (14) точно описывают стационарные характеристики адаптивного трансверсального фильтра при любых экспоненциально-коррелированных входных сигналах: гауссовых марковских процессах, процессах Кубо—Андерсона [6] и других.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающихся систем.— М.: Наука, 1970.
2. Уидроу Б. и др.— ТИИЭР, 1976, 64, № 8, с. 37.
3. Widrow B., Mccool J. M.— IEEE Trans., 1976, AP-24, № 5, p. 615.
4. Уидроу Б. и др.— ТИИЭР, 1975, 63, № 12, с. 69.
5. Kretschmer F. F., Lewis B. L.— IEEE Trans., 1978, AES-14, № 1, p. 165
6. Brissaud A., Frish U.— J. Math. Phys., 1974, 15, № 5, p. 524.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
17 января 1980 г.

STATIONARY CHARACTERISTICS OF ADAPTIVE TRANSVERSAL FILTER

A. A. Mal'tsev, E. T. Patronis

Stationary characteristics are studied of an adaptive transversal filter with an arbitrary number of weights and exponentially correlated input signals. Analytical expressions have been derived for optimal weights and the power of an error signal. Application of these expressions is illustrated by two examples for the use of an adaptive filter in modelling of a fixed time delay and the first order low frequency linear filter.