ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1981*

УДК 538.3

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ ОБЩЕГО ВИДА

Л. А. Юдин

Предлагается метод расчета сдвига дисперсионных характеристик электромагнитных систем при наличии произвольных возмущений Показано, что решение невозмущенной электродинамической задачи сразу позволяет написать выражение для сдвига частоты или постоянной распространения, обусловленного возмущением. Метод применен, в частности, к исследованию явления циклотронного резонанса при прохождении слаботочного пучка через замедляющую структуру.

Набор собственных частот резонатора, связь частоты собственных волн с постоянной распространения в волноводах или с волновым вектором в однородной среде принято называть дисперсионными характеристиками соответствующей электромагнитной системы. Знание их играет важную роль в задачах дифракции и возбуждения, поскольку определяет поведение поля вблизи резонанса. Если в систему внесено возмущение, то искажаются и ее дисперсионные характеристики. Использование теории возмущений для нахождения собственных частот или постоянных распространения системы связано с разложением полей по собственным функциям невозмущенной задачи, отвечающим (при прочих фиксированных параметрах) различным собственным частотам. Однако в том случае, когда система содержит среды с дисперсией, собственные поля не обязательно ортогональны. В качестве примера можно указать на собственные колебания резонатора, заполненного неоднородной средой с дисперсией: $\varepsilon = \varepsilon(\omega, \boldsymbol{r})$. Поэтому теория возмущений в ее традиционной форме развита лишь для таких систем, которые содержат бездисперсные среды [1, 2].

Между тем, аппарат макроскопической электродинамики с успехом применяется в последние годы для таких сред, как плазма (в том числе и высокотемпературная) или электронные пучки (см., например, [3]). Эти объекты можно в линейном приближении описать с помощью тензоров проницаемостей, временная и пространственная дисперсия которых весьма существенны. В связи с этим представляется желательным распространить методы теории возмущений на дисперсные и движущиеся среды.

Метод, предлагаемый в данной работе, основан на разложении поля по собственным функциям некоторой вспомогательной задачи, отличающейся от реальной введением параметра λ, выполняющего роль чисто мнимой электрической и магнитной проводимостей среды. Частота и волновой вектор в этой задаче рассматриваются как параметры, а система ортогональных собственных функций находится как решение задачи на собственные значения величины λ. Значения частоты, при которых $\lambda_n(\omega)$ обращается в нуль, суть собственные частоты реальной физической системы, а соответствующие им векторы (нуль-вектор, по терминологии [4]) — собственные поля этой системы.

Предлагаемый подход перекликается с известным обобщенным методом собственных колебаний [5] и методом, примененным в работах [4, 6] для задач геометрической оптики. Подчеркнем, однако, что для решения поставленной здесь задачи (если ограничиться первым порядком теории возмущений) не требуется находить ни λ_n, ни вспомогательные собственные функции, поскольку окончательные результаты выражаются через поля, соответствующие собственным частотам реальной (не вспомогательной) задачи.

Данный вариант теории возмущений применим как к объемным, так и граничным возмущениям. Результаты, полученные в разд. 2 и 3, обобщают известные на случай произвольных (в том числе и движущихся) непоглощающих сред.

1. ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДА. ОБЪЕМНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Запишем уравнения Максвелла для гармонических ($\sim e^{-i\omega t}$) полей

$$\begin{aligned} \omega \boldsymbol{D} - ic \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= 0, \\ ic \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \omega \boldsymbol{B} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

В общем случае движущихся сред материальные уравнения, связывающие индукции и напряженности полей, имеют вид (см., например, [7])

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \hat{P}\boldsymbol{E} + \hat{L}\boldsymbol{H}, \\ \boldsymbol{B} &= \hat{N}\boldsymbol{E} + \hat{Q}\boldsymbol{H}. \end{aligned} \tag{2}$$

Если среда неподвижна, то $\hat{P} = \hat{\varepsilon}$, $\hat{L} = \hat{N} = 0$, $\hat{Q} = \hat{\mu}$. Для движущихся сред уравнения (2) получаются из соотношений Минковского. Но в любом случае можно утверждать, что если в системе отсчета, связанного с данным элементом среды, проницаемости $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ описываются эрмитовыми тензорами, то

$$\hat{P}^+ = \hat{P}, \quad \hat{N}^+ = \hat{L}, \quad \hat{Q}^+ = \hat{Q}, \tag{3}$$

где символ «+» означает эрмитово сопряжение.

Будем считать, что в невозмущенной системе соотношения (3) выполнены, и, кроме того, границы невозмущенной системы, если они есть, идеально проводящие, так что на них удовлетворяется условие

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = 0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали.

Запишем уравнения (1) в операторной форме

$$\hat{M}\boldsymbol{F} = 0, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{F}$ — шестимерный вектор с компонентами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, а оператор $\hat{M}$, который ниже будем называть оператором Максвелла,

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \omega \hat{P} & \omega \hat{L} - ic \operatorname{rot} \\ \omega \hat{N} + ic \operatorname{rot} & \omega \hat{Q} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

и рассмотрим вспомогательную задачу на собственные значения

$$\hat{M}\tilde{\boldsymbol{F}}_s = \lambda_s \tilde{\boldsymbol{F}}_s \tag{7}$$

с граничным условием (4):

$$\hat{n}\tilde{F}_s = \begin{pmatrix} (n\times) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{F}_s = 0.$$

Как известно, если оператор $\hat{M}$ — эрмитов, то его собственные значения действительны, а собственные функции ортогональны.

В дальнейшем будем различать три класса задач. Задачи резонаторного типа, когда поля отличны от нуля внутри некоторого объема V, ограниченного поверхностью $\sum$. Этот тип задач будем называть типом *а*. К типу *б* отнесем системы, носящие волноводный характер, т. е. однородные вдоль оси z, ограниченные в поперечной плоскости идеальным проводником. Зависимость собственных волн от координаты z в таких задачах описывается множителем e^{ihz}. И, наконец, тип *в* включает однородные неограниченные системы, а собственные поля суть плоские волны $\sim e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$. В задачах типа *б* и *в* оператор $\hat{M}$ и собственные значения λ являются функциями $(\omega, \boldsymbol{h})$ и $(\omega, \boldsymbol{k})$ соответственно.

Условие ортогональности собственных функций оператора $\hat{M}$ можно записать в виде

$$(\tilde{F}_s^*, \tilde{F}_{s'}) = \delta_{ss'}(\tilde{F}_s^*, \tilde{F}_s),$$

где символ $(\tilde{F}^*, G)$ для указанных типов задач раскрывается следующим образом. Для задач типа *а*

$$(\tilde{F}^*, G) = \int_V \tilde{F}^*(\omega, \boldsymbol{r})\, G(\omega, \boldsymbol{r})\, dv. \tag{8а}$$

Для задач типа *б*

$$(\tilde{F}^*, G) = \int_S \tilde{F}^*(\omega, h, x, y)\, G(\omega, h, x, y)\, dxdy. \tag{8б}$$

В задачах типа *в*

$$(\tilde{F}^*, G) = \tilde{F}^*(\omega, \boldsymbol{k})\, G(\omega, \boldsymbol{k}). \tag{8в}$$

Собственные значения оператора Максвелла равны

$$\lambda_s = (\tilde{F}_s^*, \hat{M}\tilde{F}_s)/(\tilde{F}_s^*, \tilde{F}_s). \tag{9}$$

Как ясно видно из сравнения уравнений (7) и (5), истинные моды F_s соответствуют нулевому собственному значению, т. е. при тех значениях частоты, при которых

$$\lambda_s = 0, \tag{10}$$

собственные функции

$$\tilde{F}_s = F_s. \tag{11}$$

Пусть теперь оператор Максвелла испытывает возмущение, так что $\tilde{\hat{M}} = \hat{M} + \delta\hat{M}$. При этом будем считать, что тип задачи при наличии возмущения остается тем же. Это значит, что в случае *а* поля можно считать сосредоточенными внутри того же или слабо возмущенного объема, в случае *б* — возмущение не нарушает однородности вдоль оси z, а в задачах типа *в* возмущение однородно во всем пространстве.

Кроме того, будем полагать, что возмущение не меняет существенным образом характер задачи, так что можно считать, что и возмущенная задача допускает постановку вопроса о модах и дисперсионных характеристиках системы.

Обозначая поправку к собственному значению λ_s через $\delta\lambda_s$, перепишем уравнение для собственных частот возмущенной системы (10) в виде

$$\tilde{\lambda}_s = \lambda_s + \delta\lambda_s = 0. \qquad (12)$$

При указанных выше предположениях нет необходимости требовать эрмитовости оператора $\delta\hat{M}$, и в первом порядке по возмущению

$$\delta\lambda_s = (\tilde{F}_s^*, \delta\hat{M}\tilde{F}_s)/(\tilde{F}_s^*, \tilde{F}_s), \qquad (13)$$

где $\tilde{F}_s$ — собственные функции невозмущенного (эрмитова) оператора $\hat{M}$.

Уравнение (12) представляет собой дисперсионное уравнение, полученное с помощью теории возмущений, причем, как λ_s, так и $\delta\lambda_s$ являются функциями искомого параметра ω. Дальнейшее упрощение дисперсионного уравнения связано со следующими соображениями. В задачах типа *а* уравнение (10) удовлетворяется при определенном наборе частот $\omega = \omega_l^{(0)}$, в задачах типа *б* на дисперсионных кривых $\omega = \omega_l^{(0)}(h)$, в задачах типа *в* — при $\omega = \omega_l^{(0)}(\boldsymbol{k})$. Отыскивая поправки к этим значениям $\omega_l^{(0)}$, можно разложить по частоте (при фиксированных h и $\boldsymbol{k}$, если задача относится к типам *б* или *в*) первое слагаемое в уравнении (12). Если возмущение $\delta\hat{M}$ не содержит особенности при $\omega = \omega_l^{(0)}$, то в (13) можно положить частоту, равной невозмущенной. Тогда

$$\omega_l - \omega_l^{(0)} = -\left[\frac{(F_l^*, \delta\hat{M}F_l)}{\partial\lambda_l/\partial\omega}\right]_{\omega=\omega_l^{(0)}}. \qquad (14)$$

Если же $\delta\hat{M}$ имеет особенность при $\omega = \omega_l^{(0)}$, то ее можно выделить. Так, если особенность — полюс порядка n, то, представив возмущение в виде $\delta\hat{M} = [(\omega-\omega_0)^n\delta\hat{M}]_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)^{-n}$, получим следующее уравнение для сдвига частоты:

$$[\omega_l - \omega_l^{(0)}]^{n+1} = -\left[\frac{(F_l^*, (\omega-\omega_l^{(0)})^n\delta\hat{M}F_l)}{\partial\lambda_l/\partial\omega}\right]_{\omega=\omega_l^{(0)}}. \qquad (14а)$$

При решении граничных задач типа *б* возникает необходимость определения постоянной распространения при заданной частоте. Сдвиг постоянной распространения находится аналогично:

$$h_l - h_l^{(0)} = -\left[\frac{(F_l^*, \delta\hat{M}F_l)}{\partial\lambda_l/\partial h}\right]_{h=h_l^{(0)}} \qquad (15)$$

в отсутствие особенности оператора $\delta\hat{M}$ и

$$[h_l - h_l^{(0)}]^{n+1} = -\left[\frac{(F_l^*, (h-h_l^{(0)})^n\delta\hat{M}F_l)}{\partial\lambda_l/\partial h}\right]_{h=h_l^{(0)}} \qquad (15а)$$

при наличии резонанса.

Существенно, что при вычислении квадратичных форм в правых частях равенств (14) и (15) в силу (11) следует подставлять в них истинные поля невозмущенной задачи $\boldsymbol{F}_l$.

Укажем также, что формула (13) записана в предположении, что собственное значение λ_s не вырождено. При наличии вырождения значения $\delta\lambda_s$ находятся из соответствующего детерминантного уравнения, как в традиционном методе возмущений.

Выражения $\partial\lambda/\partial\omega$ и $\partial\lambda/\partial h$, стоящие в знаменателях (14) и (15), имеют простой физический смысл. Именно, непосредственным дифференцированием формулы (9) нетрудно убедиться, что

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\omega}\right)_{|\lambda=0} = 16\pi\, W/(\boldsymbol{F}^*, \boldsymbol{F}),$$
$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial h}\right)_{|\lambda=0} = -16\pi\, \Pi_z/(\boldsymbol{F}^*, \boldsymbol{F}), \tag{16}$$

где W — энергия поля в задачах типа *а*, энергия пакета волн, приходящаяся на единицу длины, в задачах типа *б* и плотность энергии в задачах типа *в*. Аналогично, Π_z — поток энергии через поперечное сечение в задачах типа *б*.

Таким образом, формулы (14) и (15) можно переписать в виде

$$\omega_l - \omega_l^{(0)} \doteq -\frac{(\boldsymbol{F}_l^*, \delta\hat{M}(\omega_l^{(0)})\,\boldsymbol{F}_l)}{16\pi W_l}; \tag{17}$$

$$h_l - h_l^{(0)} = \frac{(\boldsymbol{F}_l^*, \delta\hat{M}\,\boldsymbol{F}_l)}{16\pi\,\Pi_z}. \tag{17a}$$

Формулы (14а) и (15а) имеют аналогичный вид. Подчеркнем, что выражение (17а) имеет смысл и при чисто мнимом значении $h_l^{(0)}$, при этом поток энергии Π_z, определяемый той же формулой (16), также чисто мнимый.

Соотношения (17) и (17а) решают поставленную задачу.

2. УЧЕТ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ГРАНИЦ

Во многих задачах точные граничные условия заменяются на приближенные импедансные. Если их отличие от условия (4) на идеальном проводнике мало (например, если импеданс отличен от нуля на малом участке границы), то можно воспользоваться изложенным здесь методом, сведя граничное возмущение к объемному. Поясним это на примере граничных условий Леонтовича [8]

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E} - \zeta\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}) = 0,$$

где

$$\zeta = (1-i)\,(\omega/8\pi\sigma)^{1/2} \tag{18}$$

— импеданс стенок камеры, учитывающий их конечную проводимость σ.

Следуя идее Малюжинца [9], выберем произвольное дифференцируемое поле векторов $\boldsymbol{n}$, совпадающее на границе с единичным вектором нормали, и введем вместо поля $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ поле $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ — такое, что

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' + \zeta\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}',$$
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}'. \tag{19}$$

Очевидно, что $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ удовлетворяет идеальным граничным условиям (4). Уравнения же, описывающие поля $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{H}'$, будут иметь вид (5) с оператором $\hat{M}' = \hat{M} + \delta\hat{M}$, причем

$$\delta \hat{M} = \hat{M} \begin{pmatrix} 0 & \zeta(n \times) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Таким образом, возмущение граничных условий сведено к возмущению оператора $\hat{M}$. Вычисляя $\delta\lambda$ и используя соотношение

$$c \operatorname{rot} H^* = i \omega E^* \hat{P} + i \omega H^* \hat{N},$$

вытекающее из условий (3), получим известное равенство

$$\omega_l - \omega_l^{(0)} = c \frac{\oint \zeta \, | H_l |^2 \, d\sigma}{16\pi W_l}, \tag{21}$$

где интегрирование невозмущенного поля $|H|^2$ ведется по поверхности, ограничивающей объем, в задачах резонаторного типа или по контуру, ограничивающему поперечное сечение, в волноводах. Если в последних требуется вычислить сдвиг постоянной распространения при заданной частоте, то аналогично найдем

$$h_l - h_l^{(0)} = - \frac{c}{16\pi} \frac{\oint \zeta \, | H_l |^2 \, d\sigma}{\Pi_{zl}}. \tag{22}$$

Эти соотношения имеют простой энергетический смысл, и, обычно исходя из него, получают значения $\operatorname{Im} \omega$ и $\operatorname{Im} h$ [8, 10]. В излагаемом методе они получаются непосредственно из уравнений Максвелла, причем, определяют также и действительный сдвиг ω и h.

Отметим, что, как следует из (21) и (18), $\operatorname{Im} \omega > 0$ при $W < 0$ и наоборот. Таким образом, резистивные потери всегда приводят к неустойчивости волн отрицательной энергии. Этот факт, впрочем, очевиден.

3. ВОЗМУЩЕНИЕ ФОРМЫ ГРАНИЦЫ

Пусть условие (4) выполняется на границе Σ', целиком лежащей внутри идеальной границы Σ, мало отличающейся от Σ'. В этом случае удобнее подсчитать $\delta\lambda$ непосредственно из уравнений (7).

Запишем эти уравнения для полей $\vec{\mathscr{E}}_s$ и $\tilde{H}_s$, удовлетворяющих условиям (4) на поверхности Σ, и полей $\vec{\mathscr{E}}'_s$, $\tilde{H}'_s$, для которых границей является Σ'. Имеем

$$\begin{aligned} &\omega \hat{P} \vec{\mathscr{E}}_s + \omega \hat{L} \tilde{H}_s - ic \operatorname{rot} \tilde{H}_s = \lambda_s \vec{\mathscr{E}}_s, \\ &ic \operatorname{rot} \vec{\mathscr{E}}_s + \omega \hat{N} \vec{\mathscr{E}}_s + \omega \hat{Q} \tilde{H}_s = \lambda_s \tilde{H}_s \end{aligned} \tag{23}$$

и

$$\begin{aligned} &\omega \vec{\mathscr{E}}'^*_s \hat{P} + \omega \tilde{H}'^*_s \hat{N} + ic \operatorname{rot} \tilde{H}'^*_s = \lambda'_s \vec{\mathscr{E}}'^*_s, \\ &- ic \operatorname{rot} \vec{\mathscr{E}}'^*_s + \omega \vec{\mathscr{E}}'^*_s \hat{L} + \omega \tilde{H}'^*_s \hat{Q} = \lambda'_s \tilde{H}'^*_s. \end{aligned} \tag{24}$$

Умножая первое из уравнений (23) на $\vec{\mathscr{E}}'^*_s$, второе — на $\tilde{H}'^*_s$, а уравнения (24) соответственно на $\vec{\mathscr{E}}_s$ и $\tilde{H}_s$, нетрудно получить

$$ic \operatorname{div} ([\vec{\mathscr{E}}_s, \tilde{H}'^*_s] + [\vec{\mathscr{E}}'^*_s, \tilde{H}_s]) = (\lambda'_s - \lambda_s) (\vec{\mathscr{E}}'^*_s \vec{\mathscr{E}}_s + \tilde{H}'^*_s \tilde{H}_s).$$

Это равенство имеет смысл во всех точках объема V', находящегося внутри поверхности Σ'. Проинтегрировав его по этому объему, найдем

$$\delta\lambda_s = ic \oint\limits_{\Sigma'} (\boldsymbol{n}[\vec{\mathscr{E}}_s, \widetilde{\boldsymbol{H}}^*_s])\,d\sigma/(\widetilde{\boldsymbol{F}}^*_s, \widetilde{\boldsymbol{F}}_s), \tag{25}$$

где учтено условие (4) и в первом порядке теории возмущений положено $\widetilde{F}' = \widetilde{F}$. Подставляя (25) в (17), получим

$$\omega_i - \omega_i^{(0)} = -ic \oint\limits_{\Sigma'} (\boldsymbol{n}[\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{H}^*_i])\,d\sigma/16\pi W_i. \tag{26}$$

Так как $\int\limits_{\Sigma} d\sigma(\boldsymbol{n}[\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{H}^*_i]) = 0$, можно интегрирование в формуле (26) заменить на интегрирование по поверхности $\sum + \sum'$ и перейти обратно к интегрированию по объему δV, заключенному между $\sum$ и $\sum'$. Простые преобразования дают тогда

$$\omega_i - \omega_i^{(0)} = \omega_i^{(0)} \frac{\int\limits_{\delta V} (\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{H}^*_i - \boldsymbol{E}_i\boldsymbol{D}^*_i)\,dv}{16\pi W_i}. \tag{26a}$$

Аналогичная формула для сред без дисперсии хорошо известна (см., например, [2, 11]).

4. ПЛАЗМО-ПУЧКОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Предложенный метод применим также к исследованию неустойчивости, обусловленной прохождением слаботочного пучка через среду, в которой могут распространяться медленные волны. В этом и следующем пункте будут приведены два примера, иллюстрирующие это применение.

Рассмотрим замагниченную плазму, описываемую тензором

$$\hat{\varepsilon}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_p \end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon_p = 1 - \omega_p^2/\omega^2, \tag{27}$$

ω_p — плазменная частота. В такой среде могут распространяться продольно-поперечные волны, описываемые дисперсионным уравнением

$$\varepsilon_p(\omega^2/c^2 - k_z^2) = k_\perp^2, \tag{28}$$

причем выраженные через компоненту E_z поля имеют вид

$$\boldsymbol{E} = \frac{k_z\boldsymbol{k} - \omega^2\boldsymbol{e}_z/c^2}{k_z^2 - \omega^2/c^2} E_z, \qquad \boldsymbol{H} = -\frac{\omega[\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{k}]/c}{k_z^2 - \omega^2/c^2} E_z.$$

Плотность энергии пакета этих волн

$$\begin{aligned} W &= \frac{|E_z|^2}{16\pi} \frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega\left(\varepsilon_p - \frac{k_\perp^2}{\omega^2/c^2 - k_z^2}\right)\right] = \\ &= \frac{|E_z|^2}{8\pi} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left[1 + \frac{\omega^4 k_\perp^2 c^2}{\omega_p^2(\omega^2 - k_z^2c^2)^2}\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Пусть теперь через плазму в направлении оси z идет со скоростью u поток, описываемый в отсутствие плазмы тензором

$$\hat{\varepsilon}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_b \end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon_b = 1 - \omega_b^2 / \gamma^2 (\omega - k_z u)^2, \qquad (30)$$

$\omega_b = (4\pi n_b e^2/m\gamma)^{1/2}$ — плазменная частота пучка, n_b — его плотность, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$. Тогда, рассматривая $(\varepsilon_b - 1)$ как возмущение, получим

$$(F^*, \delta\hat{M} F) = \omega(\varepsilon_b - 1) \mid E_z \mid^2.$$

Подставляя это выражение и выражение для энергии (29) в формулу (17), определим сдвиг частоты

$$\delta\omega = \frac{\omega^3 \omega_b^2}{2\gamma^2 (\omega - k_z u)^2 \omega_p^2} \left[1 + \frac{\omega^4 k_\perp^2 c^2}{\omega_p^2 (\omega^2 - k_z^2 c^2)^2} \right]^{-1}. \qquad (31)$$

Среди решений уравнения (28) есть одно, соответствующее медленной $(\omega < ck_z)$ волне. Если плазма достаточно плотная, так что $\omega_p^2 > \gamma^2 u^2 k_\perp^2$, то эта ветвь пересекается с пучковой ветвью $\omega = k_z u$ в точке $k_z = (\omega_p^2 / \gamma^2 u^2 - k_\perp^2)^{1/2}$, где правая часть (31) имеет полюс 2-го порядка. Поэтому вблизи этой точки следует исходить из уравнения (14а). В результате получаем неустойчивое решение

$$\delta\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \frac{\omega}{\gamma} \left(\frac{n_b}{2n_p} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{k_\perp^2}{\omega_p^2 c^2} \gamma^4 u^4 \right)^{-1/3},$$

которое совпадает с найденным из точного дисперсионного уравнения в [3].

5. ЦИКЛОТРОННЫЙ РЕЗОНАНС ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ПУЧКА ЧЕРЕЗ ЗАМЕДЛЯЮЩУЮ СТРУКТУРУ

Пусть вдоль оси некоторой замедляющей структуры движется со скоростью u пучок, находящийся в продольном магнитном поле B_z. Такой пучок можно рассматривать как среду, описываемую в системе покоя тензором

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & -ig & 0 \\ +ig & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}, \qquad (32)$$

где $\varepsilon_\perp = 1 - \dfrac{\omega_b^2}{\omega'^2 - \Omega^2}$, $g = \dfrac{\omega_b^2}{\omega'^2 - \Omega^2} \dfrac{\Omega}{\omega'}$, $\varepsilon_\parallel = 1 - \dfrac{\omega_b^2}{\omega'^2}$, $\omega' = \gamma(\omega - hu)$ — частота волны в системе, связанной с пучком, $\Omega = eB_z/mc$ — циклотронная частота.

Решая уравнения Минковского с тензором $\hat{\varepsilon}$, в первом порядке по $(\hat{\varepsilon} - 1)$ найдем следующие выражения для возмущения входящих в оператор $\hat{M}$ матриц:

$$\delta\hat{P} = \begin{pmatrix} \gamma^2(\varepsilon_\perp - 1) & -i\gamma^2 g & 0 \\ i\gamma^2 g & \gamma^2(\varepsilon_\perp - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel - 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta\hat{L} = -\delta\hat{N} = -\gamma^2 \frac{u}{c} \begin{pmatrix} ig & \varepsilon_\perp - 1 & 0 \\ -(\varepsilon_\perp - 1) & ig & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\delta\hat{Q} = \gamma^2 \frac{u^2}{c^2} \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp - 1 & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon_\perp - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате

$$(\boldsymbol{F}^*, \delta\hat{M}\boldsymbol{F}) = \omega \int\limits_{\Sigma_b} d\sigma \{\gamma^2(\varepsilon_\perp - 1)|\boldsymbol{K}|^2 - ig\gamma^2(\boldsymbol{e}_z[\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{K}]) + (\varepsilon_\parallel - 1)|E_z|^2\}, \quad (33)$$

где

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{E}_\perp + (1/c)\,[u\boldsymbol{H}_\perp], \quad (34)$$

$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ — поля замедляющей структуры, а интегрирование производится по сечению пучка. Если пучок полностью замагничен, т. е. $\varepsilon_\perp = 1$, $g = 0$, то подстановка выражения (33) в формулу (17) приводит к уравнению, совпадающему с известным уравнением [12], которое описывает резонанс медленной волны с плазменными модами пучка, если в нем воспользоваться приближением малого тока.

В интересующем нас здесь случае резонанса с медленной циклотронной модой пучка $h \approx (\omega + (|\Omega|/\gamma))/u$ можно положить $\varepsilon_\parallel = 1$ и кроме того $g = (\varepsilon_\perp - 1)\Omega/|\Omega|$. Тогда уравнение (15а) представляется в виде

$$(h - h_s)(h - h_e - h_c) = -\varepsilon_c^2 h_c^2, \quad (35)$$

где $h_e = \omega/u$, $h_c = |\Omega|/\gamma u$, h_s — постоянная распространения в отсутствие пучка. Здесь учтено наличие расстройки между h_s и $(h_e + h_c)$. Величину ε_c по аналогии с терминологией, используемой в теории ламп бегущей волны, можно назвать коэффициентом циклотронного усиления. В рассматриваемом здесь приближении слаботочного пучка

$$\varepsilon_c = \left\{ \frac{h_b^2 h_e}{2h_c^3} \frac{u \int\limits_{\Sigma_b} d\sigma \left(|\boldsymbol{K}|^2 - i\frac{|\Omega|}{\Omega} \boldsymbol{e}_z[\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{K}] \right)}{16\pi \Pi_z} \right\}^{1/2}, \quad (36)$$

где $h_b = \omega_b/u$.

Пусть, например, цилиндрический пучок радиуса b движется вдоль оси спирального волновода радиуса a. Ограничимся примером азимутально симметричной волны. Используя выражения для компонент электромагнитного поля из монографии [13] и учитывая, что в пустой структуре вектор потока энергии Π_z совпадает с вектором Пойнтинга, нетрудно рассчитать коэффициент усиления. Приведем его здесь для наиболее интересного случая сильно замедленной волны $\omega \ll hu$:

$$\varepsilon_c = h_b b \left| \left(\frac{K_0(h_s a)}{I_0(h_s a)} \right)^{1/2} \pm \frac{u}{c} \left(\frac{K_1(h_s a)}{I_1(h_s a)} \right)^{1/2} \right| \times$$

$$\times \left\{ \frac{I_1^2(h_s b) - I_0^2(h_s b) + (2/h_s b) I_1(h_s b) I_0(h_s b)}{4 - h_s a \left[1 + \frac{I_1(h_s a) K_1(h_s a)}{I_0(h_s a) K_0(h_s a)} \right] \left[\frac{I_0(h_s a)}{I_1(h_s a)} - \frac{K_0(h_s a)}{K_1(h_s a)} \right]} \right\}^{1/2}. \quad (37)$$

Здесь $I_n(x)$ и $K_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда. Знак «+» в формуле (37) относится к случаю, когда направление обмотки спирали образует правый винт, если смотреть с конца вектора $\Omega = eB/mc$ (с учетом знака заряда e!). Знак «—» — к противоположному случаю. При выводе (37) использовано дисперсионное уравнение пустой спиральной структуры

$$\omega^2 = p^2 \operatorname{tg}^2 \varphi [I_0(pa)K_0(pa)]/[I_1(pa)K_1(pa)],$$

φ — угол намотки спирали, $p = (h^2 - \omega^2)^{1/2}$.

Для релятивистского пучка

$$\varepsilon_c \approx (\sqrt{3/8})(h_b b^2/a)(u/c)$$

при $h_s a \ll 1$ и

$$\varepsilon_c \approx \frac{h_b b}{8h_s a}\left(1 \pm \frac{u}{c}\right) \exp[-h_s(b-a)],$$

если $h_s b \gg 1$. В точном резонансе $(\operatorname{Im} h)/h_c = -\varepsilon_c$. Видно, что короткие волны весьма чувствительны к взаимной ориентации намотки спирали и магнитного поля, в то время как длинные волны — «безразличны».

Изложенный в работе метод позволяет с единой точки зрения охватить широкий круг задач, в которых используется теория возмущений. При этом в ряде случаев он практически более прост, чем методы, базирующиеся на приближенном решении точного дисперсионного уравнения.

Автор весьма признателен М. Л. Левину и Ю. А. Кравцову за полезные замечания, а также С. П. Ефимову, И. Л. Кореневу и М. И. Капчинскому за помощь и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. — М.: ИЛ, 1960.
2. Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. — М: Наука, 1967.
3. Александров А. Ф, Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы — М: Высшая школа, 1978.
4. Lewis R. M. — Arch. Rational Mechanics Analysis, 1965, **20**, № 3, p. 191.
5. Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. — М.: Наука, 1977.
6 Апресян Л А., Кравцов Ю А. и др — Изв вузов — Радиофизика, 1976, **19**, № 9, с. 1296.
7. Chambers L. G.— J. Math. Anal. Appl., 1962, **4**, № 3, p. 411.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М Электродинамика сплошных сред — М· Гостехиздат, 1957.
9. Малюжинец Г. Д. — ДАН СССР, 1948, **60**, с. 367.
10. Каценеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика. — М.: Наука, 1966.
11. Гуревич Л. Г. Полые резонаторы и волноводы. — М.: Сов. радио, 1952.
12. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике — М: Сов. радио, 1973.
13 Вайнштейн Л. А Электромагнитные волны. — М: Сов. радио, 1957.

Поступила в редакцию
2 января 1980 г.

A NEW INVESTIGATION METHOD FOR DISPERSIVE CHARACTERISTICS AT DISTURBANCES OF A GENERAL FORM

L. A. Yudin

A calculation method is suggested of dispersive characteristic shifts of electromagnetic systems in the presence of arbitrary disturbances. It is snown that a solution of undistorved electrodynamic problem permits to write at once an expression for the frequency shift or a wave number. The method is applied, in particular, to the study of a cyclotron resonance phenomenon when a weak current beam passes through a delay structure.