ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 2 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 537 291

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ИСПЫТЫВАЮЩЕЙ УСКОРЕНИЕ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ПУТИ

Б. М. Болотовский, В. А. Давыдов

Рассматривается спектр излучения заряженной частицы, у которой первоначальная скорость движения равна v_1, конечная скорость равна v_2, а изменение скорости от v_1 до v_2 происходит плавно на ограниченном участке пути.

При взаимодействии заряженной частицы с внешними полями или с рассеивающими центрами ее скорость меняется. При этом часто изменение ее скорости происходит в некоторой ограниченной области пространства, где частица подвергается действию внешних сил. До влета в эту область скорость частицы равна некоторому начальному значению v_1, после вылета из области действия сил скорость принимает конечное значение v_2. Изменение скорости частицы сопровождается электромагнитным излучением. В настоящей работе определяется спектр излучения для некоторого частного закона движения. Пусть точечная заряженная частица движется по оси z, причем зависимость скорости от времени определяется выражением

$$v(t) = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_2 - v_1}{2} \operatorname{th}(\alpha t). \tag{1}$$

Очевидно, при выбранном законе движения скорость частицы при $t = -\infty$ равна v_1, скорость при $t = +\infty$ равна v_2. Переход от скорости v_1 к скорости v_2 происходит вблизи от момента времени $t = 0$. При $t = 0$ скорость равна среднему арифметическому от v_1 и v_2. Длительность перехода T от начального значения скорости v_1 к конечному значению скорости v_2 имеет порядок $1/\alpha$. В дальнейшем мы будем для простоты полагать

$$T = 1/\alpha. \tag{2}$$

Закон движения (1) обладает тем свойством, что функция $v(t)$ имеет производные любого порядка, так что изменение скорости является гладким. В реальных случаях изменение скорости также является гладким, и поэтому излучение, возникающее при рассматриваемом законе движения, может отражать некоторые особенности, имеющие место в реально происходящих событиях. В частности, как будет показано, асимптотические свойства излучения при малых и больших частотах, характерные для закона движения (1), характерны также для широкого класса гладких траекторий. Обозначим

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = u_1, \quad \frac{v_2 - v_1}{2} = u_2. \tag{3}$$

Тогда закон движения (1) можно переписать в виде

$$v(t) = u_1 + u_2 \operatorname{th}(\alpha t). \tag{4}$$

Интегрирование выражения (4) дает зависимость координаты от времени

$$z(t) = u_1 t + \frac{u_2}{\alpha} \ln \operatorname{ch}(\alpha t), \tag{5}$$

где константа интегрирования выбрана так, чтобы при $t = 0$ заряженная частица находилась в начале координат ($z = 0$).

Как известно, вектор-потенциал $\boldsymbol{A}_\omega(\boldsymbol{r})$, описывающий излучение на частоте ω, на больших расстояниях r от пути частицы имеет вид [1]

$$\boldsymbol{A}_\omega = \frac{q}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{v}(t) \exp\{i[\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}(t)]\}\, dt, \tag{6}$$

где q — заряд частицы, $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор излучаемой волны, c — скорость света. В нашем случае, когда закон движения задается формулами (1), (3)—(5), интеграл выражения (6) для вектора-потенциала есть вектор, направленный по оси z, величина которого равна

$$l = \int_{-\infty}^{\infty} (u_1 + u_2 \operatorname{th} \alpha t) \exp\left\{i\left[(\omega - k_z u_1)t - \frac{k_z u_2}{\alpha} \ln \operatorname{ch}(\alpha t)\right]\right\} dt, \tag{7}$$

где $k_z = \frac{\omega}{c}\cos\theta$ — проекция волнового вектора $\boldsymbol{k}$ на ось z. Величина l имеет размерность длины и равна численно длине пути, с которого собирается излучение. На пути l волны с заданными значениями ω, $\boldsymbol{k}$ излучаются в фазе. Представим l в виде

$$l = u_1 \tau_1 + u_2 \tau_2, \tag{8}$$

где

$$\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\omega t - k_z u_1 t - \frac{k_z u_2}{\alpha} \ln \operatorname{ch}(\alpha t)\right)\right] dt. \tag{9}$$

Величина τ_2 отличается от τ_1 множителем $\operatorname{th} \alpha t$ под знаком интеграла. Вычислим сначала τ_1. Для этого перепишем (9) в виде

$$\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{ch} \alpha t)^{-i(k_z u_2/\alpha)} \exp[i(\omega - k_z u_1)t]\, dt. \tag{10}$$

Сделаем замену переменных $s = e^{\alpha t}$. Тогда (10) примет вид

$$\tau_1 = \frac{1}{\alpha} 2^{i(k_z u_2/\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{s^{(i/\alpha)(\omega - k_z u_1 + k_z u_2) - 1}}{(1+s^2)^{i(k_z u_2/\alpha)}}\, ds. \tag{11}$$

Для сходимости интеграла добавим к показателю степени s в числителе и к показателю степени $1 + s^2$ в знаменателе малые действительные положительные добавки, которые в окончательном результате будем считать равными нулю*. Тогда можно воспользоваться известной формулой [2]

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\infty} \frac{s^{2x-1}}{(1+s^2)^{x+y}}\, ds \quad (\operatorname{Re} x > 0,\ \operatorname{Re} y > 0). \tag{12}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. С помощью формулы (12) получаем из (11)

* Из сравнения интегралов (9) и (11) видно, что эта процедура эквивалентна общепринятому введению малой мнимой части у частоты.

$$\tau_1 = \frac{1}{\alpha}\, 2^{i(k_z u_2/\alpha)-1}\, \frac{\Gamma\left[(i/2\alpha)(\omega - k_z u_1 + k_z u_2)\right] \cdot \Gamma\left[(i/2\alpha)(k_z u_1 + k_z u_2 - \omega)\right]}{\Gamma\left[(i/\alpha)\, k_z u_2\right]}. \tag{13}$$

Таким образом, величина τ_1 выражается через гамма-функции от мнимого аргумента. Аналогичным образом вычисляется и величина τ_2. Окончательно получаем

$$l = \frac{1}{\alpha}\, \frac{\omega}{k_z}\, 2^{i(k_z/2\alpha)(v_2 - v_1)-1}\, \frac{\Gamma(iA)\,\Gamma(iB)}{\Gamma(iA + iB)}, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\alpha}(\omega - k_z v_1) = \frac{1}{2}\, T(\omega - k_z v_1), \\ B &= -\frac{1}{2\alpha}(\omega - k_z v_2) = -\frac{1}{2}\, T(\omega - k_z v_2). \end{aligned} \tag{15}$$

Угловое и спектральное распределение излучения выражаются через величину l следующим образом:

$$d\varepsilon_\omega = \frac{q^2\omega^2}{4\pi^2 c^3}\, |l|^2 \sin^2\theta\, d\Omega = W_\omega(\theta)\, d\Omega, \tag{16}$$

где θ — угол между волновым вектором k излученной волны и осью z, $d\Omega$ — элемент телесного угла. Подставляя в (16) выражение (14) и используя соотношение [2]

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y\, \mathrm{sh}\, \pi y} \qquad (\mathrm{Im}\, y = 0), \tag{17}$$

получим

$$\begin{aligned} W_\omega(\theta) = {} & \frac{q^2\omega T \sin^2\theta\, u_2}{4\pi c^2 \cos\theta\, [1 - (v_1/c)\cos\theta]\, [1 - (v_2/c)\cos\theta]} \times \\ & \times \frac{\mathrm{sh}\, [(u_2/c)\pi\omega T\cos\theta]}{\mathrm{sh}\, \{(\pi\omega T/2)\, [1 - (v_1/c)\cos\theta]\}\, \mathrm{sh}\, \{(\pi\omega T/2)\, [1 - (v_2/c)\cos\theta]\}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим теперь асимптотику полученного спектра в случае больших и малых значений величин A и B, определяемых формулами (15). Предварительно заметим, что величина

$$\frac{1}{\omega - k_z v} = t \tag{19}$$

дает по порядку величины время, в течение которого частица, движущаяся со скоростью v, в каждой точке своего пути излучает волны, которые мало отличаются по фазе и поэтому складываются (имеются в виду волны частоты ω и с проекцией волнового вектора на ось z, равной k_z). Величина t, определяемая формулой (19), называется временем формирования излучения или просто временем формирования [3]. Теперь мы можем переписать (15) следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\, \frac{T}{t_1} \qquad \left(t_1 = \frac{1}{\omega - k_z v_1}\right), \\ B &= -\frac{1}{2}\, \frac{T}{t_2} \qquad \left(t_2 = \frac{1}{\omega - k_z v_2}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Величины A и B, таким образом, пропорциональны отношению времени перехода T, в течение которого меняется скорость, к времени формирования соответственно для начальной скорости v_1 и конечной скорости v_2. Рассмотрим сначала предельный случай $|A| \ll 1$, $|B| \ll 1$. Этот случай имеет место, если время перехода T мало или мала частота излучаемой волны, т. е. времена формирования t_1 и t_2 велики. Точнее можно сказать, что в этом случае времена формирования t_1 и t_2 оказываются значительно больше, чем время перехода T. В этом случае получаем

$$W_\omega(\theta) = \frac{q^2(v_2 - v_1)^2 \sin^2\theta}{4\pi^2 c^3[1 - (v_1/c)\cos\theta]^2[1 - (v_2/c)\cos\theta]^2}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\frac{T^2}{t_1 t_2} + \ldots\right]. \quad (21)$$

Величина, стоящая в (21) перед квадратными скобками — это интенсивность излучения при мгновенном изменении скорости частицы от v_1 до v_2 В обратном случае, когда время перехода T много больше времени формирования t_1 и t_2 ($|A| \gg 1$, $|B| \gg 1$), получаем

$$W_\omega(\theta) = \frac{q^2 \omega T |v_2 - v_1| \sin^2\theta}{4\pi c^2 \cos\theta[1 - (v_1/c)\cos\theta][1 - (v_2/c)\cos\theta]} \exp\left(-\pi \frac{T}{\max(t_1, t_2)}\right), \quad (22)$$

где знаком $\max(t_1, t_2)$ обозначена наибольшая из величин t_1, t_2. В этом случае спектр спадает на высоких частотах экспоненциально, причем в показателе экспоненты стоит отношение времени перехода к времени формирования. Такой закон спадания характерен для достаточно гладких траекторий (например, для синхротронного излучения, для излучения гармонического осциллятора, колеблющегося с конечной амплитудой [4]). Причина экспоненциального спадания спектра заключается в том, что во всех этих случаях закон движения $r = r(t)$ представляет собой гладкую функцию, у которой существуют непрерывные производные всех порядков. Величина

$$l = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \exp\{i[\omega t - \mathbf{kr}(t)]\}\, dt,$$

определяющая величину поля излучения (6), есть компонента Фурье от плотности тока, связанного с движущимся зарядом. Если $r(t)$ есть функция, непрерывная со всеми своими производными, то, по теории преобразования Фурье, величина l при больших значениях ω спадает быстрее любой конечной степени ω. Таким образом, быстрое падение спектра излучения с ростом частоты есть общее свойство излучения для достаточно гладких траекторий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973
2. Градштейн И. С, Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений — М.: Наука, 1971.
3 Гинзбург В Л., Цытович В. Н. — УФН, 1978, **126**, вып. 4, с. 553.
4. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. — М.: Наука, 1974

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию 11 декабря 1979 г.

RADIATION OF A CHARGED PARTICLE WITH ACCELERATION AT A FINITE PATH LENGTH

B. M. Bolotovskij, V. A. Davydov

A radiation spectrum of a charged particle is considered the initial velocity of which is equal to v_1, the finite velocity is equal to v_2 and the velocity variation from v_1 up to v_2 occurs smoothly at a limited path length.