ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 2 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 534.87

КАУСТИКИ С АНОМАЛЬНЫМ ФАЗОВЫМ СДВИГОМ

Ю. И. Орлов

Исследуются особенности дополнительного (к эйконалу) фазового сдвига поля на каустике. Показано, что кроме обычной потери фазы на каустике $-\pi/2$ возможен аномальный сдвиг фазы $+\pi/2$. Приводятся примеры пространственных каустик с аномальным фазовым сдвигом, образующихся в анизотропных средах, и аналогичных пространственно-временных каустик, возникающих при распространении импульсов в средах с частотной дисперсией. Рассмотрены особенности равномерной эйри-асимптотики, справедливой для определения волнового поля в окрестности неособого участка каустики с аномальным фазовым сдвигом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дополнительный фазовый сдвиг на каустике необходимо учитывать при расчете волнового поля в условиях многолучевости, когда

$$u(\boldsymbol{r}) = \sum_{\nu} A_{\nu} e^{ik\psi_{\nu}} = \sum_{\nu} \frac{A_{\nu}^{0}}{\sqrt{j_{\nu}}} e^{ik\psi_{\nu}}. \tag{1}$$

Здесь A_ν и ψ_ν — амплитуда и эйконал волны на ν-м луче, $j = ndS/n_0\,dS_0$ — расходимость лучей, $n = n(\boldsymbol{r})$ — показатель преломления неоднородной среды, dS — поперечное сечение лучевой трубки, а индекс нуль относится к начальной точке луча $\boldsymbol{r}_0$: $n_0 \equiv n(\boldsymbol{r}_0)$, $dS_0 \equiv dS(\boldsymbol{r}_0)$, $A_\nu^0 \equiv A_\nu(\boldsymbol{r}_0)$. Суммирование в (1) проводится по всем лучам, приходящим в точку наблюдения, и учет дополнительного (к эйконалу ψ) фазового сдвига на луче, коснувшемся каустики, необходим для правильного описания интерференционной волновой картины.

Хотя природа дополнительного фазового сдвига связана с дифракционными явлениями на каустике, он может быть легко проинтерпретирован и в терминах геометрической оптики [1]. Действительно, если расходимость лучей j на каустике имеет нуль первого порядка и отрицательна после каустики ($j < 0$), то независимо от геометрии каустики при $j < 0$ имеем

$$j^{-1/2} = |j|^{-1/2} e^{\mp i(\pi/2)}. \tag{2}$$

Далее обычно из дополнительных соображений [1–3] выбирают лишь аргумент $-\pi/2$ и рассматривают каустики с «потерей» фазы φ: $\varphi = k\psi - \pi/2$. Однако оставалось неясным, возможно ли появление каустик с необычным (аномальным) фазовым сдвигом $+\pi/2$. Как показано ниже, такие каустики образуются при определенных условиях; назовем их каустиками с аномальным фазовым сдвигом.

Целесообразно с самого начала подчеркнуть, что аномальный фазовый сдвиг на каустике связан не с особой геометрией каустики, а с определенными физическими характеристиками среды, где происходит распространение волны. Важно отметить, что в большинстве ситуаций все же возникают каустики с обычным фазовым сдвигом $-\pi/2$. Сформулируем теперь более аккуратные условия образования каустик с аномальным или обычным фазовым сдвигом.

2. ОБРАЗОВАНИЕ КАУСТИК С АНОМАЛЬНЫМ ФАЗОВЫМ СДВИГОМ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Рассмотрим каустики плоского амплитудно-фазового экрана в однородной анизотропной среде, например, соответствующие распространению плоского волнового пучка. Для каждой из независимых нормальных волн поле двумерного пучка может быть представлено в виде разложения по плоским волнам:

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{E}_0(\varkappa) \exp\{i[k_z(\varkappa) z - \varkappa x]\} d\varkappa, \tag{3а}$$

где

$$\widetilde{E}_0(\varkappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\xi) e^{i\varkappa\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\xi) \exp[i\varphi_0(\xi) + i\varkappa\xi] d\xi, \tag{3б}$$

$A_0(x)$, $\varphi_0(x)$ — начальные (при $z=0$) амплитудное и фазовое распределения поля $E_0(x) = E(x, z=0)$, $\widetilde{E}_0(\varkappa)$ — пространственный спектр начального поля (диаграмма направленности пучка). Зависимость $k_z(\varkappa)$ в (3а) определяется свойствами среды: в изотропной среде $k_z(\varkappa) = \sqrt{k^2 - \varkappa^2}$, в анизотропных средах функция $k_z(\varkappa)$ исследовалась во многих работах (например, в [4, 5] применительно к магнитоактивной плазме) и имеет в общем случае немонотонный характер с точками перегиба [4].

Согласно (3а) и (3б) имеем

$$E(x, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(\xi) \exp[i\varphi(x, z, \xi, \varkappa)] d\xi d\varkappa, \tag{4}$$

где

$$\varphi(x, z, \xi, \varkappa) = \varphi_0(\xi) + k_z(\varkappa) z + \varkappa(\xi - x).$$

Точки стационарной фазы этого интеграла ξ_s, $\varkappa_s$ определяются из условий

$$x = \xi + z\frac{dk_z}{d\varkappa}, \qquad \varkappa = -\varphi_0'(\xi) \equiv \varkappa_s, \tag{5}$$

которые можно представить в виде уравнения семейства лучей

$$x = \xi + z\frac{d}{d\varkappa} k_z(\varkappa_s) \equiv x(z, \xi), \tag{6}$$

где $\varkappa_s = -\varphi_0'(\xi)$, а ξ — координата точки выхода луча из начальной плоскости $z=0$. Наклон прямолинейных лучей (6) определяется функциями $\varphi_0'(\xi)$ и $dk_z/d\varkappa$.

Образуемая лучами (6) каустика находится из условия $\frac{\partial}{\partial\xi} x(z, \xi) = 0$ и описывается уравнениями

$$\begin{gathered} z = \left\{\varphi_0''(\xi) \frac{d^2}{d\varkappa^2} k_z(\varkappa_s)\right\}^{-1} \equiv z_k(\xi), \\ x = \xi + \frac{d}{d\varkappa} k_z(\varkappa)\left\{\varphi_0''(\xi) \frac{d^2}{d\varkappa^2} k_z(\varkappa_s)\right\}^{-1} \equiv x_k(\xi). \end{gathered} \tag{7}$$

Согласно (7), каустика возникает в области $z > 0$ при условии $\varphi_0''(\xi)\,\frac{d^2}{d\varkappa^2}k_z(\varkappa_s) > 0$. Это условие накладывает ограничение как на закон пространственной модуляции пучка $\varphi_0(\xi)$, так и на свойства среды $k_z(\varkappa)$. Отметим, что в особом направлении, где $\frac{d^2 k_z}{d\varkappa^2} = 0$, каустика (7) асимптотически уходит на бесконечность ($z_k \to \infty$, $x_k \to \infty$)*.

Вычисление интеграла в (4) с помощью двумерного метода стационарной фазы, как обычно, приводит к формуле геометрической оптики, описывающей закон изменения поля вдоль луча (6):

$$E(x, z) = A_0(\xi_s)\left|1 - \frac{z}{z_k(\xi_s)}\right|^{-1/2} \exp\,[i\varphi(x, z, \xi_s, \varkappa_s) + i(\pi/4)\Delta], \tag{8}$$

где

$$\Delta = \left\{1 - \operatorname{sgn}\left[1 - \frac{z}{z_k(\xi_s)}\right]\right\}\operatorname{sgn}\varphi_0''(\xi_s), \tag{9}$$

а $\xi_s = \xi_s(x, z)$ — корень уравнения (6), определяющий лучевую координату точки наблюдения (x, z). Если стационарных точек ξ_s несколько, то, как и в (1), берется сумма выражений (8), соответствующих различным $\xi_\nu = \xi_\nu(x, z)$.

Величина Δ в (8) определяет дополнительный фазовый сдвиг поля на каустике (7). При $\varphi_0''(\xi)\,(d^2 k_z/d\varkappa^2) < 0$, когда образуется лишь мнимая каустика ($z_k < 0$), величина Δ равна нулю, что соответствует отсутствию каустического сдвига фазы. Аналогично $\Delta = 0$, если $z_k > 0$, но $z < z_k$, т. е. на участке луча до его касания с каустикой (7). Дополнительный фазовый сдвиг ($\Delta \neq 0$) возникает лишь при $z > z_k > 0$, при этом, согласно (9),

$$\Delta = 2\operatorname{sgn}\,\varphi_0''(\xi) = 2\operatorname{sgn}\frac{d^2}{d\varkappa^2}k_z(\varkappa_s),$$

и соответствующий фазовый множитель в (8) равен

$$\exp\left(i\frac{\pi}{4}\Delta\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\frac{d^2 k_z}{d\varkappa^2}\right) = \begin{cases}\exp\left(-i\dfrac{\pi}{2}\right), & (d^2k_z/d\varkappa^2) < 0,\\[2mm] \exp\left(+i\dfrac{\pi}{2}\right), & (d^2k_z/d\varkappa^2) > 0.\end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, обычный каустический фазовый сдвиг $e^{-i(\pi/2)}$ возникает, когда каустика (7) образуется при $(d^2 k_z/d\varkappa^2) < 0$, при этом, согласно (7), $\varphi_0''(\xi) < 0$**. Например, в изотропной среде $k_z(\varkappa) = \sqrt{k^2 - \varkappa^2}$, $d^2k_z/d\varkappa^2 = -k^2/k_z < 0$, а следовательно, здесь возможно появление лишь каустик с обычным фазовым сдвигом. Как следует из (10), каустики с аномальным фазовым сдвигом $e^{i(\pi/2)}$ образуются в анизотропной среде при условии $d^2 k_z/d\varkappa^2 > 0$, т. е. в средах, для которых зависимость $k_z(\varkappa)$ обращена вогнутостью вверх (рис. 1б). Указанное условие реализуется, например, в магнитоактивной плазме при определенных условиях [5] (см. также [4]). Отметим, что для появления «аномальной» каустики пучок должен быть промодулирован специальным образом, а именно так, чтобы выполнялось неравенство $\varphi_0''(\xi) > 0$ (рис. 1а).

---

* В этом особом направлении наблюдается более медленное дифракционное расплывание пучка, чем в изотропной среде [5].

** Соответствующий закон пространственной модуляции пучка $\varphi_0(\xi)$ такой же, как у сходящегося начального (при $z = 0$) волнового фронта

3. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ КАУСТИКИ С АНОМАЛЬНЫМ ФАЗОВЫМ СДВИГОМ

Рассмотрим теперь пространственно-временной аналог предыдущей задачи: распространение плоского частотно-модулированного импульса в однородной среде с произвольным законом частотной дисперсии $n = n(\omega)$. Пусть поле импульса при $z = 0$ равно

$$E(0,\ t) = A_0(t)\exp[i\,\varphi_0\,(t)] \equiv E_0(t). \qquad (11)$$

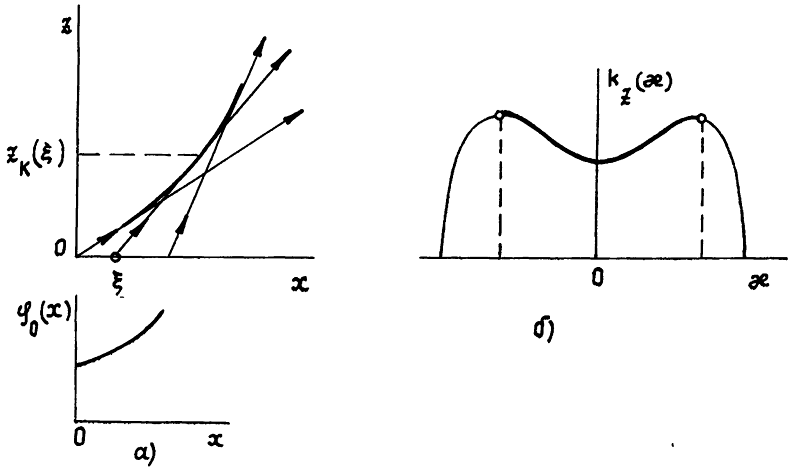

Рис. 1. Образование „аномальной" каустики в анизотропной среде.

Тогда при $z > 0$ аналогично (4) имеем [6, 7]

$$E(z,\ t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int A_0(\xi)\exp\left[i\,\varphi\,(z,\ t,\ \xi,\ \omega)\right]d\,\xi\,d\,\omega\,, \qquad (12)$$

где

$$\varphi\,(z,\ t,\ \xi,\ \omega) = \varphi_0\,(\xi) + k\,(\omega)\,z + \omega\,(\xi - t)\,,$$

а $k(\omega) = \dfrac{\omega}{c}\,n\,(\omega)$ — волновое число в среде $n(\omega)$.

Метод стационарной фазы, примененный к двукратному интегралу (12), приводит к приближению пространственно-временной геометрической оптики [4, 7–9], дополненному законом о каустическом фазовом сдвиге

$$E(z,\ t) = A_0(\xi_s)\left|1 - \frac{z}{z_k(\xi_s)}\right|^{-1/2}\exp\left[i\,\varphi\,(z,\ t,\ \xi_s,\ \omega_s) + i\,(\pi/4)\,\Delta\right], \qquad (13)$$

где

$$\Delta = \left\{\mathrm{sgn}\left[1 - \frac{z}{z_k(\xi_s)}\right] - 1\right\}\mathrm{sgn}\left(\left.\frac{dv_{\text{гр}}}{d\,\omega}\right|_{\omega=\omega_s}\right). \qquad (14)$$

Здесь $\xi_s = \xi_s(z,\ t)$ определяется из уравнения семейства пространственно-временных лучей

$$z = \left.\left(\frac{dk}{d\,\omega}\right)^{-1}\right|_{\omega=\omega_s}(t - \xi) = v_{\text{гр}}\,(\omega_s)\,(t - \xi) \equiv z\,(t,\ \xi) \qquad (15)$$

и соответствует начальному моменту выхода луча из плоскости $z = 0$; $v_{\text{гр}}(\omega) = (dk/d\,\omega)^{-1}$ — локальная групповая скорость волны в среде;

$\omega_s = -d\varphi_0(\xi)/d\xi = \omega_s(\xi)$ — функция, описывающая начальный закон частотной модуляции импульса (11); $z_k = z_k(\xi)$ — координата пространственно-временной каустики, образуемой семейством лучей (15).

Уравнения каустики лучей (15) находятся из (15) при условии $(\partial/\partial\xi)\,z(t, \xi) = 0$ и имеют вид

$$z = v_{\text{гр}}^2(\omega_s)\left\{\frac{d}{d\omega} v_{\text{гр}}(\omega_s)\frac{d\omega_s}{d\xi}\right\}^{-1} \equiv z_k(\xi),$$
$$t = \xi + v_{\text{гр}}(\omega_s)\left\{\frac{d}{d\omega} v_{\text{гр}}(\omega_s)\frac{d\omega_s}{d\xi}\right\}^{-1} \equiv t_k(\xi). \qquad (16)$$

Отсюда следует, что реальная каустика ($z_k > 0$) образуется только при условии $\frac{d v_{\text{гр}}}{d\omega}\frac{d\omega_s}{d\xi} > 0$. В противном случае каустика (16) является мнимой ($z_k < 0$).

Величина Δ, определяющая дополнительный фазовый сдвиг на каустике (16), согласно (14), равна нулю при $z_k < 0$ и при $z < z_k$, если $z_k > 0$. При $z > z_k > 0$ имеем

$$\Delta = -2\operatorname{sgn}\frac{d\omega_s}{d\xi} = -2\operatorname{sgn}\frac{dv_{\text{гр}}}{d\omega},$$

откуда находим

$$\exp\left(i\frac{\pi}{4}\Delta\right) = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\frac{dv_{\text{гр}}}{d\omega}\right) = \begin{cases}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right), & \frac{dv_{\text{гр}}}{d\omega} > 0\\ \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right), & \frac{dv_{\text{гр}}}{d\omega} < 0\end{cases}. \qquad (17)$$

Как следует из (17), пространственно-временная каустика с аномальным фазовым сдвигом $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$ образуется в диспергирующей среде, обладающей спадающей дисперсионной характеристикой $v_{\text{гр}}(\omega)$ (рис. 2а)*. Таким свойством обладает, например, магнитоактивная плазма на определенных частотных интервалах (рис. 2б) [4, 9]. В холодной изотропной плазме $v_{\text{гр}}(\omega) = c\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}$ (ω_p — плазменная частота) имеем $dv_{\text{гр}}/d\omega > 0$, и согласно (17) наблюдается обычный каустический фазовый сдвиг $\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)$.

4. ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ В ОКРЕСТНОСТИ НЕОСОБОГО УЧАСТКА КАУСТИКИ С АНОМАЛЬНЫМ ФАЗОВЫМ СДВИГОМ

При наличии неособой каустики формула геометрической оптики (1) имеет вид

$$u(\boldsymbol{r}) = A_1\exp(ik\psi_1) + A_2\exp(ik\psi_2), \qquad (18)$$

* Для образования каустики (16) в области $z > 0$ начальный импульс, согласно (16), должен иметь при этом убывающий закон частотной модуляции $\omega_s = \omega_s(\xi)$ $d\omega_s/d\xi < 0$ (подробнее см. [7])

где индекс 1 в области света относится к лучу, приходящему в точку наблюдения $\vec{r}$ после касания каустики, а 2 — до ее касания (рис. 3). Особенность рассматриваемой каустики проявляется в том, что в области света $A_1 = |A_1| \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right)$ и $\psi_1 < \psi_2$ (для обычной каустики $A_1 = |A_1| \exp\left(-i \frac{\pi}{2}\right)$ и $\psi_1 > \psi_2$).

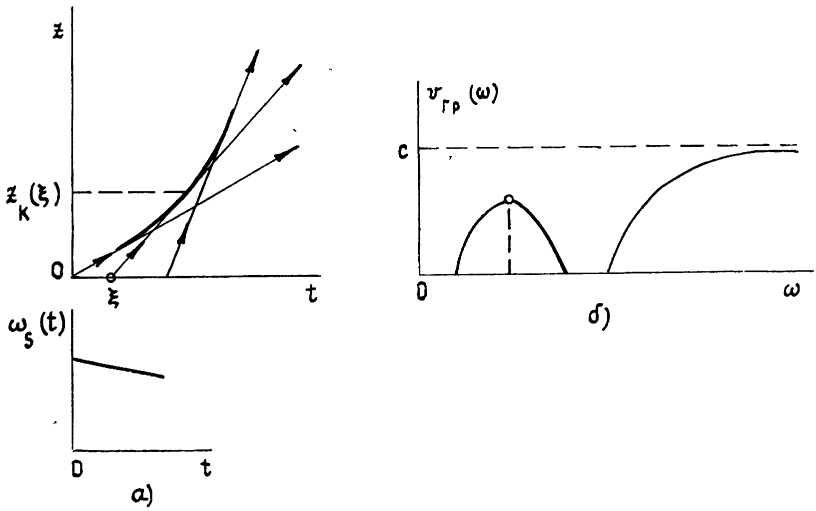

Рис. 2. Образование „аномальной“ пространственно-временной каустики.

Равномерная эйри-асимптотика для поля в окрестности неособой каустики имеет вид [10, 11]

$$u(\boldsymbol{r}) = k^{1/6} \exp\left(ik\theta - i\frac{\pi}{4}\right) \{Av(k^{2/3}\zeta_0) + ik^{-1/3} Bv'(k^{2/3}\zeta_0)\}, \qquad (19)$$

где функции ζ_0, θ, A и B алгебраически выражаются через амплитуды $A_{1,2}$ и эйконалы $\psi_{1,2}$ двух лучей (18). Выражения для функций ζ_0, θ, A и B принимают другой вид в случае каустики с аномальным фазовым сдвигом; они легко находятся асимптотическим «сшиванием» каустической асимптотики (19) с лучевой формулой (18).

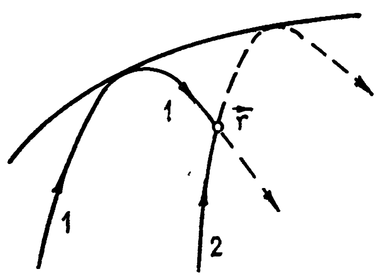

Рис. 3. Лучи в окрестности неособой каустики.

Подставляя в (19) ВКБ-асимптотику функции Эйри $v(\zeta)$ при $|\zeta| \gg 1$, из (19) получим вдали от каустики

$$u(\boldsymbol{r}) = A^- e^{ik\psi^-} + A^+ e^{ik\psi^+}, \qquad (20)$$

где

$$\psi^{\mp} = \theta \mp \frac{2}{3}(-\zeta_0)^{3/2},$$

$$A^{\mp} = \frac{1}{2} \exp\left[-i\frac{\pi}{4}(1 \mp 1)\right] [A(-\zeta_0)^{-1/4} \mp B(-\zeta_0)^{1/4}]. \qquad (21)$$

* Разумеется, процедура сшивания может быть обоснована с помощью уравнений метода эталонных функций [10, 11], которые следуют из подстановки (19) в волновое уравнение.

Полагая далее $\psi^- = \psi_1$, $\psi^+ = \psi_2$, $A^- = A_1$, $A^+ = A_2$, из (21) находим

$$A = (-\zeta_0)^{1/4}(iA_2 + A_1), \quad B = (-\zeta_0)^{-1/4}(iA_2 - A_1),$$
$$\theta = \frac{1}{2}(\psi_2 + \psi_1), \quad \zeta_0 = -\left[\frac{3}{4}(\psi_2 - \psi_1)\right]^{2/3}. \tag{22}$$

Принимая во внимание (22), представим главный член равномерной асимптотики (19) в следующем окончательном виде:

$$u(r) = \exp\left(ik\theta - i\frac{\pi}{4}\right)\{(-\zeta)^{1/4}(iA_2 + A_1)\,v(\zeta) + i(-\zeta)^{-1/4}(iA_2 - A_1)\,v'(\zeta)\}, \tag{23}$$

где

$$\zeta = -\left[\frac{3k}{4}(\psi_2 - \psi_1)\right]^{2/3}.$$

Полученная каустическая асимптотика (23) отличается от обычной [10, 11] только взаимными заменами: A_2 на A_1, A_1 на A_2, ψ_1 на ψ_2 и ψ_2 на ψ_1.

Выражения (23) подтверждаются асимптотикой точных решений (4) и (12), если интегралы в них вычислить с помощью модификации метода стационарной фазы, справедливой в случае двух произвольно расположенных стационарных точек [12].

В заключение отметим, что возможно образование каустик с аномальным фазовым сдвигом более общего вида (чем $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$), которые отвечают различным степеням вырождения расходимости лучевой трубки j на каустике, где $j = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В. М — В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн — Л.: Гос. ун-т, 1961, вып. 5, с. 115.
2. Lewis R. M. — Arch. Ration. Mechan. Anal., 1965, **20**, № 3, p. 191.
3. Маслов В. П., Федорюк М В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М : Наука, 1976.
4. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978. — т. 1, 2.
5. Бродский Ю. Я., Кондратьев И. Г., Миллер М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1969, **12**, № 9, с. 1339.
6 Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
7. Орлов Ю. И. Лекции на V Всесоюзной школе по дифракции волн (Челябинск, 1979). — В сб.: Прямые и обратные задачи теории дифракции. — М.: ИРЭ АН СССР, 1979, с. 5.
8 Кравцов Ю. А, Островский Л. А., Степанов Н. С. — ТИИЭР, 1974, **62**, № 11, с. 91.
9. Felsen L. B. — IEEE Trans. Ant. Propag., 1969, **AP-17**, № 2, p. 191.
10. Кравцов Ю. А — Изв. вузов — Радиофизика, 1964, **7**, № 4, с. 664.
11. Кравцов Ю. А. — Акуст. журн., 1968, **14**, № 1, с. 1.
12. Федорюк М. В. Метод перевала. — М : Наука, 1977.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
2 января 1980 г.

CAUSTICS WITH ANOMALOUS PHASE SHIFT

Yu. I. Orlov

Peculiarities of additional (to eikonal) phase shift of a caustic field are investigated. It is shown that besides an ordinary phase loss on caustic — $\pi/2$ an anomalous phase shift + $\pi/2$ is possible. Example are presented of space caustics with anomalous phase shift formed in anisotropic media as well as anologous space-time caustics occur in the propagation of pulses in media with frequency dispersion. Peculiarities of a uniform Airy-asymptotic are considered which is valid for the definition of a wave field in the vicinity of nonparticular section of the caustic with anomalous phase shift.