ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 2 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 534.87

# ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ В ОКРЕСТНОСТИ КАУСТИКИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

*Ю. И. Орлов*

Исследуется коротковолновая асимптотика скалярного и электромагнитного полей в окрестности неособой каустики в случае, когда касание луча с каустикой имеет произвольный порядок (каустики произвольного порядка). Решение эталонной задачи о распространении плоской волны в одномерно неоднородной среде дает эталонную функцию Эйри — Харди $F_\nu(\xi)$. Выполнены исследования основных свойств этой функции. На основе асимптотического решения уравнения Гельмгольца и уравнений Максвелла получена общая равномерная асимптотика поля, справедливая в окрестности каустики произвольного порядка, которая содержит функцию Эйри — Харди $F_\nu(\xi)$ и ее производную $F'_\nu(\xi)$. Показано, что в частном случае каустики первого порядка полученная асимптотика совпадает с равномерной каустической асимптотикой на основе функции Эйри и ее производной.

Исследованию волновых полей в окрестности каустик (огибающих семейства лучей геометрической оптики) посвящено значительное число работ (см., например, [1–7] и цитированную там литературу); в частности, в [2–4] получена равномерная каустическая асимптотика поля. Однако во всех этих работах рассматривался случай, когда касание луча с каустикой имеет первый порядок. Такая каустика является многомерным аналогом простой точки поворота обыкновенного дифференциального уравнения, и асимптотика волнового поля здесь определяется на основе функции Эйри. Как известно, в этом случае лучи, образующие неособую (гладкую) каустику, имеют вблизи нее вид парабол. Фронт волны на каустике образует точку заострения («клюв») и в ее окрестности описывается полукубической параболой $x \sim \pm z^{3/2}$ ($z$ — расстояние по нормали к каустике). Однако, как показано ниже, возможна и другая геометрия лучей и волновых фронтов вблизи неособых каустик, которая возникает в случае произвольной степени касания луча с каустикой. Поэтому, если даже каустика и является неособой, но имеет порядок касания с лучом, отличный от первого, волновое поле в ее окрестности не может быть найдено с помощью известных методов [1–7]. Назовем каустику, имеющую произвольный порядок касания с лучом, каустикой произвольного порядка. Она является многомерным аналогом точки поворота произвольного порядка для обыкновенного дифференциального уравнения [8].

В данной работе на основе асимптотического решения уравнения Гельмгольца и уравнений Максвелла получена равномерная асимптотика волнового поля, справедливая в окрестности неособых каустик произвольного порядка. В качестве эталонной функции используется обобщение интеграла Эйри, данное Харди [10], — функция Эйри — Харди, обозначаемая далее как $F_\nu(\xi)$. Эта функция представляет собой специальную комбинацию функций Бесселя и описывает переход от осциллирующего поля в освещенной области к затухающему полю в области каустической тени. Полученная равномерная асимптотика содержит эту эталонную функцию $F_\nu(\xi)$ и ее производную $F'_\nu(\xi) = \frac{d}{d\xi} F_\nu(\xi)$, при этом неизвестные функции в решении удается выразить через амплитуды и эйконалы лучей, проходящих через точку наблюдения. В частном случае каустики первого порядка полученное решение совпадает с известной каустической асимптотикой [2–4], использующей функцию Эйри $v(\xi)$ и ее производную $v'(\xi)$.

## 1. ЭТАЛОННАЯ ЗАДАЧА И ЭТАЛОННАЯ ФУНКЦИЯ. ГЕОМЕТРИЯ ЛУЧЕЙ

Рассмотрим задачу распространения плоской волны в одномерно-неоднородной среде $z \geqslant 0$ с монотонно убывающей диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(z)$. Как известно, определение волнового поля $u(x, z) = f(z)\exp(ikx\sin\theta_0)$ в этом случае сводится к решению уравнения [1]

$$f''_{z^2}(z) + k^2[\varepsilon(z) - \varepsilon(0)\sin^2\theta_0] f(z) = 0, \tag{1}$$

где $\theta_0$ — угол, определяющий направление волны при $z = 0$. Решение уравнения (1) должно удовлетворять соответствующему условию на бесконечности $z \to \infty$.

В случае, когда $g(z) = \varepsilon(z) - \varepsilon(0)\sin^2\theta_0 = a^2(z_0 - z)^\alpha$, $\alpha > 0$ и $\operatorname{sgn} g(z) = \operatorname{sgn}(z_0 - z)$, уравнение (1) решается в цилиндрических функциях порядка $\nu = (2 + \alpha)^{-1}$ [8, 9, 14]. Взяв в качестве линейно-независимой системы решений функции Ханкеля, общее решение уравнения (1) в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= a(z_0 - z)^{1/2}\{AH_\nu^{(1)}(\tau) + BH_\nu^{(2)}(\tau)\}, \quad \tau = 2ka\nu(z_0 - z)^{1/2\nu}, \quad z < z_0, \\ f(z) &= a(z - z_0)^{1/2}\{CH_\nu^{(1)}(it) + DH_\nu^{(2)}(it)\}, \quad t = 2ka\nu(z - z_0)^{1/2\nu}, \quad z > z_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Из условия затухания поля на бесконечности (при $z \to \infty$) следует, что $D = 0$. Из условий непрерывности $f(z)$ и $f'(z)$ при $z = z_0$ или, что то же самое, из соотношений обхода для цилиндрических функций [10] можно получить $A = Be^{i\pi\nu}$, $C = 2i\sin(\pi\nu/2)e^{i\pi\nu}B$. В результате решение (2) представим в следующем каноническом виде:

$$f(z) = B\frac{2}{\sqrt{\pi\nu}}\exp\left(i\frac{\pi\nu}{2}\right)(ka)^{-\nu} F_\nu\{(ka)^{2\nu}(z - z_0)\}. \tag{3}$$

Здесь функция $F_\nu(\xi)$ определяется следующей комбинацией цилиндрических функций:

$$\begin{aligned} F_\nu(\xi) &= \frac{\sqrt{\pi\nu}}{2\cos(\pi\nu/2)}\xi^{1/2}[I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)] = \\ &= 2\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\xi^{1/2}K_\nu(t) \quad \text{при } \xi \geqslant 0; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} F_\nu(\xi) &= \frac{\sqrt{\pi\nu}}{2\cos(\pi\nu/2)}(-\xi)^{1/2}[J_{-\nu}(\tau) + J_\nu(\tau)] = \frac{\sqrt{\pi\nu}}{2}(-\xi)^{1/2} \times \\ &\times \left[\exp\left(-i\frac{\pi\nu}{2}\right)H_\nu^{(2)}(\tau) + \exp\left(i\frac{\pi\nu}{2}\right)H_\nu^{(1)}(\tau)\right] \quad \text{при } \xi \leqslant 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $t = 2\nu\xi^{1/2\nu}$, $\tau = 2\nu(-\xi)^{1/2\nu}$, $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ — функции Бесселя, $K_\nu(z)$ — — функция Макдональда. Очевидно, что $F_\nu(\xi)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2}{d\xi^2} F_\nu(\xi) = \xi^\alpha F_\nu(\xi), \qquad \nu = (2+\alpha)^{-1}, \tag{6}$$

удовлетворяющим условию затухания функции на бесконечности (при $\xi \to \infty$).

Как показано в Приложении, функцию $F_\nu(\xi)$, определяемую формулами (4), (5), нетрудно выразить через интеграл Эйри — Харди — обобщение интеграла Эйри, данное Харди [10]. В частном случае $\nu = \dfrac{1}{3}$ $(\alpha = 1)$ функция $F_\nu(\xi)$ совпадает с обычной функцией Эйри $v(\xi)$ [7]. Поэтому назовем функцию $F_\nu(\xi)$ функцией Эйри — Харди. Она является эталонной функцией при построении равномерной асимптотики для поля вблизи каустики произвольного порядка. Некоторые свойства функции Эйри — Харди $F_\nu(\xi)$ приведены в Приложении. На рис. 1 и 2 представлены графики функции $F_\nu(\xi)$ при различных $\nu$,

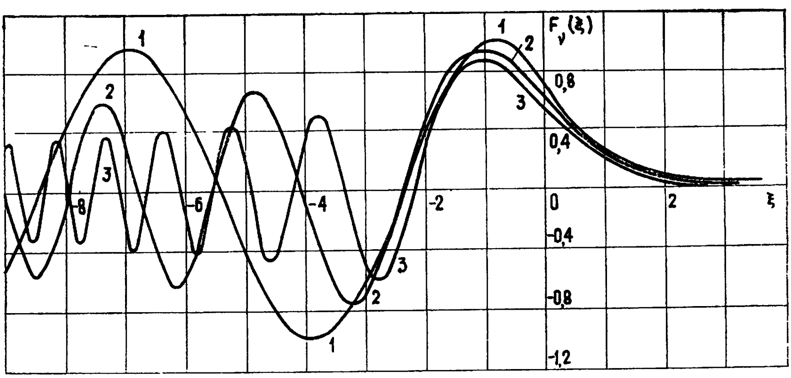


Рис. 1. Эталонная функция — функция Эйри—Харди $F_\nu(\xi)$; *1* — $\nu = 0{,}488$ $(\alpha = 1/21)$; *2* — $\nu = 0{,}(3)$ $(\alpha = 1)$; *3* — $\nu = 0{,}253$ $(\alpha = 41/21)$.

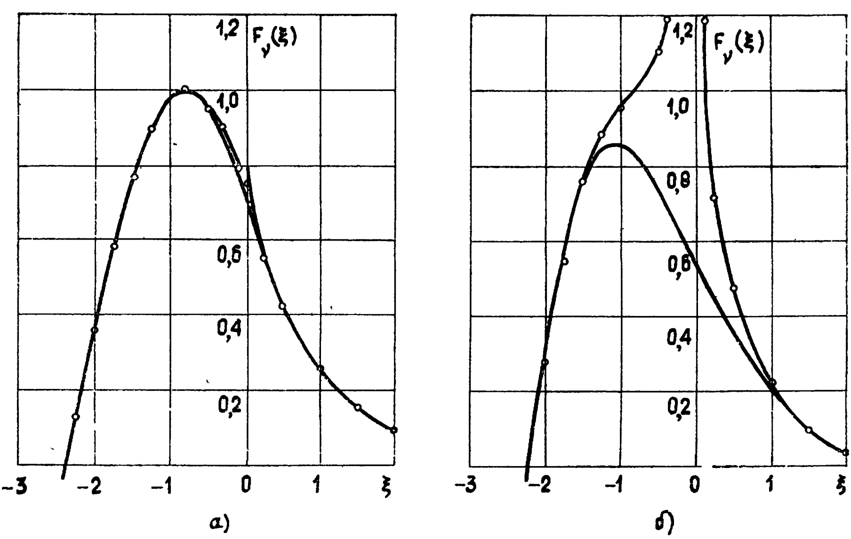


Рис. 2. Асимптотика функции Эйри—Харди $F_\nu(\xi)$, сплошная линия—точные значения; точки—асимптотические значения (П.4), (П.5); *а*) $\nu = 0{,}488$ $(\alpha = 1/21)$, *б*) $\nu = 0{,}253$ $(\alpha = 41/21)$.

рассчитанные на ЭВМ по точной и асимптотическим формулам (П.1)—(П.5) (см. Приложение).

Используя функцию $F_\nu(\xi)$ и метод эталонного уравнения [8], можно получить равномерное асимптотическое решение уравнения (1) в случае, когда

$$g(z) \equiv \varepsilon(z) - \varepsilon(0)\sin^2\theta_0 = (z_0 - z)^{\alpha} g_1(z), \quad \alpha > 0, \quad g_1(z) > 0, \tag{7}$$

а $\operatorname{sgn} g(z) = \operatorname{sgn}(z_0 - z)$. Главный член равномерной асимптотики уравнения (1), справедливый при условии (7) как вблизи, так и вдали от точки поворота $z = z_0$ произвольного порядка, имеет вид

$$f(z) = B\frac{2}{\sqrt{\pi k\nu}}\exp\left(i\frac{\pi\nu}{2}\right)(-\xi^{\alpha}g^{-1})^{1/4}F_\nu(\xi), \qquad \nu = (2+\alpha)^{-1}, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= -\left\{\frac{k}{2\nu}\int\limits_z^{z_0}\sqrt{g(z)}\,dz\right\}^{2\nu} \leqslant 0, \quad z \leqslant z_0, \\ \xi &= \left\{\frac{k}{2\nu}\int\limits_{z_0}^{z}\sqrt{-g(z)}\,dz\right\}^{2\nu} > 0, \quad z > z_0. \end{aligned} \tag{9}$$

Используя асимптотику (П.4), (П.5) (см. Приложение) функции $F_\nu(\xi)$, можно показать, что вдали от точки поворота $z = z_0$ (при $|\xi| \gg 1$) решение (8) асимптотически переходит в ВКБ-решение уравнения (1) [8], которое соответствует лучевому приближению. При этом плоскость $z = z_0$ является каустикой лучей геометрической оптики, уравнение которых в плоскослоистой среде $\varepsilon(z)$ имеет вид [1, 11]

$$\begin{aligned} x &= x(0) + \sqrt{\varepsilon(0)}\sin\theta_0\left(\int\limits_0^{z_0} \mp \int\limits_z^{z_0}\right)\frac{dz}{\sqrt{g(z)}} \equiv \\ &\equiv x_0 \mp \sqrt{\varepsilon(0)}\sin\theta_0\int\limits_z^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{g(z)}}, \end{aligned} \tag{10}$$

где $x(0)$ — координата точки выхода луча из начальной плоскости $z = 0$, $x_0$ — координата точки касания луча с каустикой, а $g(z)$ дается формулой (7). Верхний знак в (10) соответствует ветви луча, «падающего» на каустику $z = z_0$, а нижний — «отраженного» от нее.

С целью установления геометрического смысла параметра $\alpha$ (или $\nu$), входящего в решение (8), получим уравнение лучей вблизи каустики $z = z_0$ с помощью разложения выражения (10) в ряд Тейлора при малых $z_0 - z$:

$$x - x_0 = \mp b(z_0 - z)^{1-\alpha/2} \equiv \mp b(z_0 - z)^{2-1/2\nu}, \tag{11}$$

где $b = \sqrt{\varepsilon(0)}\sin\theta_0\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-1}[g_1(z_0)]^{-1/2}$. Как следует из (11), параметр $\alpha$ (и $\nu$) определяет порядок касания луча с каустикой $z = z_0$, при этом считается, что $\alpha < 2$.

Геометрия фронтов волны вблизи каустики произвольного порядка следует из выражений для эйконалов

$$\varphi_{1,2} = \sqrt{\varepsilon(0)}\cos\theta_0 x + \left(\int\limits_0^{z_0} \mp \int\limits_z^{z_0}\right)\sqrt{g(z)}\,dz, \tag{12}$$

откуда при $z \sim z_0$ получим уравнение фронтов

$$x - x_0 = \pm p (z_0 - z)^{1+\alpha/2} \equiv \pm p (z_0 - z)^{1/2\nu}, \tag{13}$$

где $p = 2\nu\, [g_1(z_0)]^{1/2} / \sqrt{\varepsilon(0)} \cos\theta_0$. Согласно (13), параметр $\alpha$ (и $\nu$) определяет также порядок точки заострения фронта на каустике.

В частном случае $\alpha = 1$ ($\nu = 1/3$) лучи (11) в окрестности каустики $z = z_0$ представляют собой параболы, а фронты (13) — полукубические параболы; образуемая ими каустика является хорошо исследованной каустикой первого порядка.

## 2. СКАЛЯРНАЯ КАУСТИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА

Для построения равномерного асимптотического (при $k \to \infty$) решения уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 \varepsilon(\boldsymbol{r})\, u = 0, \tag{14}$$

справедливого в окрестности каустики произвольного порядка, будем искать поле $u(\boldsymbol{r})$ в виде

$$u(\boldsymbol{r}) = \exp\left(ik\theta - i\frac{\pi}{4}\right) k^{(1-2\nu)/2} \left\{ F_\nu(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{(m)}}{(ik)^m} + \right. \\ \left. + ik^{2\nu-1} F'_\nu(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^{(m)}}{(ik)^m} \right\}, \tag{15}$$

где $\xi = k^{2\nu}\xi_0$; $\nu = (2+\alpha)^{-1}$; $\xi_0$, $\theta$, $A^{(m)}$, $B^{(m)}$ — искомые функции координат $\boldsymbol{r}$, а $F_\nu(\xi)$ и $F'_\nu(\xi)$ — функция Эйри — Харди (4), (5) и ее производная: $F'_\nu(\xi) \equiv \dfrac{d}{d\xi} F_\nu(\xi)$.

Подставляя (15) в уравнение (14), приравнивая нулю коэффициенты при функциях* $F_\nu(\xi)$ и $F'_\nu(\xi)$ и приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях $ik$, можно получить следующую систему рекуррентных уравнений для определения искомых функций $A^{(m)}$, $B^{(m)}$, $\xi_0$ и $\theta$:

$$(\nabla\theta)^2 - \xi_0^\alpha (\nabla\xi_0)^2 = \varepsilon(\boldsymbol{r}), \quad \nabla\theta\nabla\xi_0 = 0; \tag{16}$$

$$2\nabla\theta\nabla B^{(m)} + B^{(m)}\Delta\theta - 2\nabla\xi_0\nabla A^{(m)} - A^{(m)}\Delta\xi_0 = -\Delta B^{(m-1)}; \tag{17}$$

$$2\nabla\theta\nabla A^{(m)} + A^{(m)}\Delta\theta + \xi_0^\alpha (2\nabla\xi_0\nabla B^{(m)} + B^{(m)}\Delta\xi_0) + \\ + \alpha\xi_0^{\alpha-1}(\nabla\xi_0)^2 B^{(m)} = -\Delta A^{(m-1)}, \tag{18}$$

где $A^{(m)} = B^{(m)} \equiv 0$ при $m < 0$.

Умножая второе уравнение в (16) на $\pm(-\xi_0)^{\alpha/2}$ и складывая с первым, из (16) приходим к уравнениям эйконала для функций $\varphi_\pm$:

$$(\nabla\varphi_\pm)^2 = \varepsilon(\boldsymbol{r}), \quad \varphi_\pm = \theta \pm 2\nu(-\xi_0)^{1/2\nu}, \quad \nu = (2+\alpha)^{-1}. \tag{19}$$

Аналогично, умножая (17) на $\pm(-\xi_0)^{\alpha/4}$, а (18) — на $(-\xi_0)^{-\alpha/4}$ и складывая результаты, можно показать эквивалентность уравнений (17), (18) уравнениям переноса. При этом в нулевом приближении ($m = 0$) получим

* Высшие производные $F''_\nu(\xi)$, $F'''_\nu(\xi)$ при этом исключаются с помощью дифференциального уравнения (6).

$$2\nabla A_\pm \nabla\varphi_\pm + A_\pm \Delta\varphi_\pm = 0,$$

$$A_\pm = \frac{1}{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4} \mp i\frac{\pi}{4}\right)\{(-\xi_0)^{-\alpha/4}A^{(0)} \pm (-\xi_0)^{\alpha/4}B^{(0)}\}, \tag{20}$$

где $\varphi_\pm$ определяется соотношениями (19).

Для установления физического смысла функций $\varphi_\pm$, $A_\pm$ выясним связь решения (15) и приближения геометрической оптики:

$$u(\boldsymbol{r}) = A_1 e^{ik\varphi_1} + A_2 e^{ik\varphi_2}, \tag{21}$$

где $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ — амплитуды и эйконалы двух лучей, проходящих через точку наблюдения в освещенной области. Подставляя в (15) главный член асимптотики (П.5) (см. Приложение) функции $F_\nu(\xi)$ при $-\xi \gg 1$, справедливой вдали от каустики в освещенной области, получим

$$u(\boldsymbol{r}) = A_+ e^{ik\varphi_+} + A_- e^{ik\varphi_-}. \tag{22}$$

Из формул (19), (20) следует, что выражение (22) представляет собой лучевую асимптотику поля и, следовательно, может быть отождествлено с формулой геометрической оптики (21): $A_\pm \equiv A_{1,2}$, $\varphi_\pm \equiv \varphi_{1,2}$.

С учетом этого из (19) и (20) можно найти следующие выражения искомых функций через амплитуды $A_{1,2}$ и эйконалы $\varphi_{1,2}$ лучей геометрической оптики (21):

$$\begin{gathered}\xi_0 = -\left\{\frac{1}{4\nu}(\varphi_1-\varphi_2)\right\}^{2\nu}, \quad \theta = \frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2),\\ A^{(0)} = (-\xi_0)^{\alpha/4}(iA_1 + A_2), \quad B^{(0)} = (-\xi_0)^{-\alpha/4}(iA_1 - A_2),\end{gathered} \tag{23}$$

где индекс 1 в освещенной области ($\xi_0 < 0$) относится к лучу, приходящему в точку наблюдения $\boldsymbol{r}$ после касания каустики, а индекс 2 — до ее касания ($\varphi_1 > \varphi_2$).

Используя (23), представим главный член ($m = 0$) равномерной асимптотики (15) поля в окрестности неособой каустики произвольного порядка в следующем окончательном виде:

$$\begin{gathered}u(\boldsymbol{r}) = \exp\left(ik\theta - i\frac{\pi}{4}\right)\{(-\xi)^{\alpha/4}(iA_1 + A_2)F_\nu(\xi) + \\ + i(-\xi)^{-\alpha/4}(iA_1 - A_2)F_\nu'(\xi)\},\\ \xi = -\{k/4\nu(\varphi_1-\varphi_2)\}^{2\nu}, \quad \theta = 1/2(\varphi_1+\varphi_2), \quad \nu = (2+\alpha)^{-1}.\end{gathered} \tag{24}$$

Обсуждение полученного решения (24) проводится в разд. 4.

## 3. ВЕКТОРНАЯ КАУСТИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА

Асимптотическое решение уравнений Максвелла*

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - ik(w_0\boldsymbol{H}) = 0, \quad \operatorname{rot}(w_0\boldsymbol{H}) + ik\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E} = 0, \tag{25}$$

справедливое в окрестности неособой каустики произвольного порядка, ищется в виде

$$\left.\begin{matrix}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\\ w_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\end{matrix}\right\} = \exp\left(ik\theta - i\frac{\pi}{4}\right)k^{(1-2\nu)/2}\left\{F_\nu(\xi)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}_{E,H}^{(m)}}{(ik)^m} + \right. \\ \left. + ik^{2\nu-1}F_\nu'(\xi)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{B}_{E,H}^{(m)}}{(ik)^m}\right\}, \tag{26}$$

---

* Используется система единиц СИ и временной множитель $e^{-i\omega t}$, $w_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$ — волновое сопротивление вакуума

где $\xi = k^{2\nu}\xi_0$, $\nu = (2+\alpha)^{-1}$, а $F_\nu(\xi)$ — функция Эйри — Харди (4), (5).

Подставляя (26) в (25), аналогично скалярной задаче можно получить систему рекуррентных уравнений для определения $A^{(m)}_{E,H}$, $B^{(m)}_{E,H}$, $\xi_0$ и $\theta$:

$$[\nabla\theta\, A^{(m)}_E] + \xi_0^\alpha(\nabla\xi_0 B^{(m)}_E] - A^{(m)}_H = -\operatorname{rot} A^{(m-1)}_E; \tag{27а}$$

$$[\nabla\theta\, B^{(m)}_E] - [\nabla\xi_0 A^{(m)}_E] - B^{(m)}_H = -\operatorname{rot} B^{(m-1)}_E; \tag{27б}$$

$$[\nabla\theta\, A^{(m)}_H] + \xi_0^\alpha[\nabla\xi_0 B^{(m)}_H] + \varepsilon A^{(m)}_E = -\operatorname{rot} A^{(m-1)}_H; \tag{27в}$$

$$[\nabla\theta\, B^{(m)}_H] - [\nabla\xi_0 A^{(m)}_H] + \varepsilon B^{(m)}_E = -\operatorname{rot} B^{(m-1)}_H, \tag{27г}$$

где $A^{(m)}_{E,H} = B^{(m)}_{E,H} \equiv 0$ при $m < 0$.

Умножая (27а) и (27в) на $(-\xi_0)^{-\alpha/4}$, а (27б) и (27г) на $\pm(-\xi_0)^{\alpha/4}$ и складывая полученные результаты, уравнения (27) представим в виде, схожем с уравнениями векторной геометрической оптики [12]:

$$\begin{gathered}[\nabla\varphi_\pm E^{(m)}_\pm] - w_0 H^{(m)}_\pm = -\operatorname{rot} E^{(m-1)}_\pm \pm \frac{i\alpha}{4\xi_0}[\nabla\xi_0 E^{(m-1)}_\mp] \equiv X^{(m-1)}_\pm,\\ [\nabla\varphi_\pm w_0 H^{(m)}_\pm] + \varepsilon E^{(m)}_\pm = -\operatorname{rot}(w_0 H^{(m-1)}_\pm) \pm \frac{i\alpha}{4\xi_0}[\nabla\xi_0 w_0 H^{(m-1)}_\mp] \equiv Y^{(m-1)}_\pm,\end{gathered} \tag{28}$$

где

$$\begin{gathered}\varphi_\pm = \theta \pm 2\nu(-\xi_0)^{1/2\nu},\\ \left.\begin{matrix} E^{(m)}_\pm \\ w_0 H^{(m)}_\pm \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4} \mp i\frac{\pi}{4}\right)\{(-\xi_0)^{-\alpha/4} A^{(m)}_{E,H} \pm (-\xi_0)^{\alpha/4} B^{(m)}_{E,H}\}.\end{gathered} \tag{29}$$

Решение уравнений (28) проводится аналогично лучевому методу [12]: из условий нетривиальной разрешимости уравнений (28) в нулевом ($m = 0$) и первом ($m = 1$) приближениях* получим уравнения эйконала $(\nabla\varphi_\pm)^2 = \varepsilon(\boldsymbol{r})$, уравнения переноса и уравнения вращения плоскости поляризации:

$$\operatorname{div}\{(E^{(0)}_\pm)^2\nabla\varphi_\pm\} = 0, \quad \operatorname{div}\left\{\frac{1}{\varepsilon}(H^{(0)}_\pm)^2\nabla\varphi_\pm\right\} = 0, \qquad \frac{d\psi_\pm}{d\sigma_\pm} = \frac{1}{T_\pm}. \tag{30}$$

Здесь $\psi_\pm = \operatorname{Arccos}[(E^{(0)}_\pm \boldsymbol{n}_\pm)/|E^{(0)}_\pm|]$ — угол между вектором электрического поля $E^{(0)}_\pm$ и главной нормалью $\boldsymbol{n}_\pm$ к лучу — линии вектора $\nabla\varphi_\pm$, $T_\pm$ — радиус кручения луча, $d\sigma_\pm$ — элемент длины дуги соответствующего луча.

Если известны решения уравнений геометрической оптики (30), которые определяют амплитуды и фазы лучей вдали от каустики:

$$E = E_1 e^{ik\varphi_1} + E_2 e^{ik\varphi_2}, \qquad H = H_1 e^{ik\varphi_1} + H_2 e^{ik\varphi_2}, \tag{31}$$

то $E^{(0)}_\pm \equiv E_{1,2}$, $H^{(0)}_\pm \equiv H_{1,2}$ и $\varphi_\pm \equiv \varphi_{1,2}$. Отсюда, используя соотношения (29) и (30), можно найти искомые функции $A^{(0)}_{E,H}$, $B^{(0)}_{E,H}$, $\xi_0$ и $\theta$, выразив их алгебраически через $E_{1,2}$, $H_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$. В результате главный член равномерной асимптотики (26) электромагнитного поля в окрестности неособой каустики произвольного порядка принимает вид

* Эти условия сводятся соответственно к требованию обращения в нуль определителя однородной системы линейных уравнений для компонентов векторов $E^{(0)}_\pm$, $H^{(0)}_\pm$ и к требованию ортогональности столбца правых частей $\{X^{(0)}_\pm, Y^{(0)}_\pm\}$, системы уравнений в первом приближении ($m = 1$) и решений транспонированной системы соответствующих однородных уравнений.

$$
\begin{gathered}
E(r)=\exp\left(ik\theta-i\frac{\pi}{4}\right)\{(-\xi)^{\alpha/4}(iE_1+E_2)F_\nu(\xi)+\\
+i(-\xi)^{-\alpha/4}(iE_1-E_2)F'_\nu(\xi)\},\\
H(r)=\exp\left(ik\theta-i\frac{\pi}{4}\right)\{(-\xi)^{\alpha/4}(iH_1+H_2)F_\nu(\xi)+\\
+i(-\xi)^{-\alpha/4}(iH_1-H_2)F'_\nu(\xi)\},
\end{gathered}
\tag{32}
$$

где $\xi=-\left\{\frac{k}{4\nu}(\varphi_1-\varphi_2)\right\}^{2\nu},\quad \theta=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2),\quad \nu=(2+\alpha)^{-1}$

и использованы обозначения лучевой формулы (31).

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Равномерные асимптотические представления (24), (32) скалярного и электромагнитного полей справедливы на произвольном расстоянии от каустики как в освещенной области ($\xi<0$), так и в области тени ($\xi>0$). При этом в области тени два решения $\varphi_{1,2}$ уравнения эйконала $(\nabla\varphi)^2=\varepsilon_*(r)$ в среде без потерь ($\operatorname{Im}\varepsilon\equiv0$) являются комплексно-сопряженными функциями, т. е. $\varphi_1=\varphi_2^*$. В результате величины $\theta$ и $\xi$ в равномерных асимптотиках (24) и (32) в области тени определяются следующими выражениями:

$$
\theta=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)=\operatorname{Re}\varphi_1,\quad \xi=\left\{\frac{k}{2\nu}\operatorname{Im}\varphi_1\right\}^{2\nu},\quad \operatorname{Im}\varphi_1>0. \tag{33}
$$

Вблизи каустики ($|\xi|\lesssim1$) главным членом асимптотики (24) или (32) является первое слагаемое, содержащее функцию $F_\nu(\xi)$. Анализ асимптотики (П.5) (см. Приложение) функции $F_\nu(\xi)$ при $\xi\to-\infty$ показывает, что закон изменения фазы на неособой каустике произвольного порядка такой же, как и на каустике первого порядка, а именно: при прохождении волновой неособой каустики произвольного порядка фаза волны изменяется дополнительно (по сравнению с геометрической оптикой) на величину $-\pi/2$*. Поляризация электромагнитного поля (32) вдали от каустики, как следует из выражений (30), (31), определяется по законам геометрической оптики, и аналогично [3] никакого дополнительного (к геометрооптическому) вращения плоскости поляризации поля вблизи каустики произвольного порядка не происходит.

Вдали от каустики, когда $|\xi|\gg1$ и справедливы нулевые приближения (П.4), (П.5) асимптотических формул для $F_\nu(\xi)$, решения (24), (32) переходят в приближение вещественной геометрической оптики (21), (31) в области света ($\xi<0$) и в приближение комплексной геометрической оптики [13] в области тени ($\xi>0$). При этом ширина каустического слоя, где несправедлива геометрическая оптика, определяется условием

$$
k\,|\varphi_1-\varphi_2|\lesssim4\nu\,|\xi_{\text{гр}}|^{1/2\nu}, \tag{34}
$$

где $\xi_{\text{гр}}$ — значение аргумента функции Эйри — Харди $F_\nu(\xi)$, начиная с которой с заданной точностью функцию $F_\nu(\xi)$ можно заменить ее асимптотическими формулами (рис. 2). Как показывают разложения

* Полная фаза волны после касания каустики равна $\Phi_1=k\varphi_1-\pi/2$, где $\varphi_1$ — эйконал волны. Указанный закон изменения фазы на неособой каустике произвольного порядка подтверждается и решениями (3), (8) эталонной задачи (см. также [14]).

вблизи каустики, величина $|\varphi_1 - \varphi_2| = O(h^{1/2\nu})$, где $h$ — расстояние по нормали к каустике, и ширина $\Lambda$ каустического слоя (35) по нормали к каустике имеет порядок $k^{-2\nu}$: $\Lambda = O(k^{-2\nu})$. Это подтверждается и точным решением (3) эталонной задачи, и формулами (12), (13).

Важно подчеркнуть, что согласно формулам (34) порядок каустики $\alpha$ (или $\nu$) влияет на степень затухания поля в области тени, а также на период (частоту) осцилляций поля в области света и на характер убывания этих осцилляций по мере удаления от каустики (рис. 1). Кроме того, как следует из решений (24), (32), порядок каустики $\alpha$ определяет степень фокусировки полей на каустике. При этом амплитуда поля вблизи каустики имеет порядок $k^{\alpha/2(2+\alpha)}$ относительно лучевой амплитуды. Однако полезно отметить в целом «однотипность» функций $F_\nu(\xi)$ и $v(\xi)$ (рис. 1), а следовательно, и волновых полей в окрестности каустик различных порядков при довольно существенном различии формы лучей (11) и волновых фронтов (13).

В частном случае неособой каустики первого порядка ($\alpha = 1$, $\nu = 1/3$) полученные решения (24), (32) принимают вид

$$
\begin{aligned}
u(r) &= \exp\left(ik\theta - i\frac{\pi}{4}\right)\{(-\xi)^{1/4}(iA_1 + A_2)v(\xi) + \\
&\quad + i(-\xi)^{-1/4}(iA_1 - A_2)v'(\xi)\},\\
E(r) &= \exp\left(ik\theta - i\frac{\pi}{4}\right)\{(-\xi)^{1/4}(iE_1 + E_2)v(\xi) + \\
&\quad + i(-\xi)^{-1/4}(iE_1 - E_2)v'(\xi)\},\\
H(r) &= \exp\left(ik\theta - i\frac{\pi}{4}\right)\{(-\xi)^{1/4}(iH_1 + H_2)v(\xi) + \\
&\quad + i(-\xi)^{-1/4}(iH_1 - H_2)v'(\xi)\},
\end{aligned}
\tag{35}
$$

где

$$
\xi = -\left\{\frac{3k}{4}(\varphi_1 - \varphi_2)\right\}^{2/3}, \quad \theta = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2),
$$

что совпадает с каустической асимптотикой, полученной ранее [2–4].

При применении общих формул равномерной асимптотики (24) к задаче распространения плоской волны в одномерно-неоднородной среде с $\varepsilon(z)$, определяемой условием (7), следует учесть, что

$$
\begin{aligned}
\varphi_{1,2} &= \pm \int_z^{z_0} \sqrt{g(z)}\,dz, \quad A_2 = iA_1 = c[g(z)]^{-1/4}, \quad g(z) \equiv \\
&\equiv \varepsilon(z) - \varepsilon(0)\sin^2\theta_0 > 0.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

В результате член, содержащий $F'_\nu(\xi)$, исчезает, и из (24) и (36) следует формула, совпадающая с (8).

Проиллюстрируем применение полученной асимптотики в трехмерной задаче распространения произвольного волнового пучка в плоскослоистой среде. В случае, когда выполняется условие (7), волновой пучок образует каустику порядка $\alpha$ (или $\nu$). Если начальное амплитудное распределение в сечении пучка меняется достаточно медленно, для расчета поля пучка в плоскослоистой среде (7) может быть использована равномерная асимптотика (24). При этом второй член в решении (24) учитывает неоднородность амплитудного распределения в пучке.

Отметим, что в задачах об излучении источников в плоскослоистой среде с законом $\varepsilon(z)$, определяемым (7) при $\theta_0 = 0$, и в сферически-слоистой среде с аналогичным законом для функции $r^2\varepsilon(r)$ каустика высшего порядка, строго говоря, вырождается в одну точку, где $\varepsilon = 0$. Однако физически очевидно, что и в некоторой окрестности этой точки волновое поле определяется асимптотикой (24). Вне этой области образуется каустика первого порядка, где уже справедливы формулы (35). Очевидно, что полученная в данной работе асимптотика не приспособлена для описания непрерывного в пространстве перехода решения (24) в формулы (35), так как она справедлива лишь для каустик с постоянной степенью касания с лучом.

Отметим, что с позиций теории катастроф [15, 16] рассмотренная каустика не относится к классу структурно (топологически) устойчивых, хотя и может образовываться в физических системах (роль структурно устойчивых каустик в физических моделях обсуждается в [17]).

В заключение автор выражает благодарность А. В. Демину за помощь в проведении расчетов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Свойства функции Эйри — Харди $F_\nu(\xi)$

Функция $F_\nu(\xi)$, введенная с помощью формул (4) и (5), связана с обобщением интеграла Эйри, данным Харди [10]:

$$\mathrm{Ci}_q(x) = \int_0^\infty \cos\{T_q(t, x)\}\,dt,$$

где

$$T_q(t, x) = f^q F\left(-\frac{q}{2}, \frac{1-q}{2}, 1-q, -\frac{4x}{t^2}\right),$$

$F$ — гипергеометрическая функция. Связь $F_\nu(\xi)$ с $\mathrm{Ci}_q(x)$ можно найти, если воспользоваться известными представлениями $\mathrm{Ci}_q(x)$ для нечетных $q$ через цилиндрические функции [10] и сравнить их с (4), (5):

$$F_\nu(\xi) = \frac{\nu^{-\nu}}{\sqrt{\pi\nu}}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\mathrm{Ci}_q(\nu^{2\nu}\xi), \quad q = \nu^{-1}.$$

Необходимые свойства функции $F_\nu(\xi)$, которую будем называть функцией Эйри — Харди, могут быть получены из формул (4), (5) и теории цилиндрических функций [10].

В частности, из (4) и (5) и [10] можно найти разложение $F_\nu(\xi)$ в степенной ряд:

$$F_\nu(\xi) = \frac{\sqrt{\pi\nu}}{2\cos(\pi\nu/2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu^{2n-\nu}\xi^{n/\nu}}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)}\left[1 - \xi\nu^{2\nu}\frac{\Gamma(n-\nu+1)}{\Gamma(n+\nu+1)}\right], \tag{П.1}$$

где $\xi^{n/\nu} = (-1)^n(-\xi)^{n/\nu}$ при $\xi < 0$.

Используя асимптотику цилиндрических функций [10], из (4), (5) получим следующие асимптотические разложения при больших вещественных аргументах $\xi$:

$$F_\nu(\xi) = \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\xi^{(2\nu-1)/4\nu}e^{-t}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}(\nu, m)(2t)^{-m} + O(t^{-M})\right\}, \quad \xi\to\infty; \tag{П.2}$$

$$F_\nu(\xi) = (-\xi)^{(2\nu-1)/4\nu}\left\{\cos\left(\tau - \frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu, 2m)(2\tau)^{-2m} + \right.\right.$$

$$+ O(\tau^{-2M})\Bigg] - \sin\left(\tau - \frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu,\ 2m+1)(2\tau)^{-2m-1} + \right. \quad (\text{П.3})$$

$$\left. + O(\tau^{-2M-1})\right]\Bigg\},\quad \xi \to -\infty,$$

где $(\nu,\ m) = \dfrac{1}{m!}\,\dfrac{\Gamma(1/2+\nu+m)}{\Gamma(1/2+\nu-m)}$, $t = 2\nu\xi^{1/2\nu}$, $\tau = 2\nu(-\xi)^{1/2\nu}$.

Нулевые приближения асимптотик (П.2), (П.3) имеют вид

$$F_\nu(\xi) \approx \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\xi^{(2\nu-1)/4\nu}\exp(-2\nu\xi^{1/2\nu}),\quad \xi \to \infty; \qquad (\text{П.4})$$

$$F_\nu(\xi) \approx (-\xi)^{(2\nu-1)/4\nu}\cos\left[2\nu(-\xi)^{1/2\nu} - \frac{\pi}{4}\right],\quad \xi \to -\infty. \qquad (\text{П.5})$$

Очевидно, что при $\nu = 1/3$ полученные формулы (П.1)—(П.5) совпадают с соответствующими представлениями функций Эйри $v(\xi)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Бреховских Л. М Волны в слоистых средах — М: Наука, 1973.
2. Кравцов Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1964, **7**, № 4, с. 1283
3. Кравцов Ю. А — Изв. вузов— Радиофизика, 1964, **7**, № 6, с 1049
4. Ludwig D. — Comm. Pure Appl. Math., 1966, **19**, № 2, p. 215.
5. Орлов Ю. И Диссертация — М, МЭИ, 1969
6. Орлов Ю И. — Труды МЭИ, 1974, вып. 194, с 103
7. Бабич В М, Булдырев В С Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.. Наука, 1972
8. Найфэ А Методы возмущений — М. Мир, 1976
9. Försterling K., Wüster H. O. — Ann. Phys, 1950, **8**, p. 129.
10. Ватсон Г. Н Теория бесселевых функций. Ч 1 — М. ИЛ, 1949
11. Орлов Ю. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1966, **9**, № 3, с. 497
12. Рытов С. М — ДАН СССР, 1938, **31**, № 4—5, с 263.
13. Кравцов Ю. А — Изв. вузов — Радиофизика, 1967, **10**, № 9—10, с. 1305.
14. Макаров Г И — В сб.: Проблемы дифракции и распространения волн — Л.: Гос. ун-т, 1962, вып 2, с. 62
15. Арнольд В. И Математические методы классической механики. — М· Наука, 1974
16. Berry M. V. — Adv in Phys., 1976, **25**, № 1, p. 1.
17. Кравцов Ю. А, Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред — М· Наука, 1980.


Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
2 января 1980 г.

## A WAVE FIELD IN THE VICINITY OF A CAUSTIC OF AN ARBITRARY ORDER

*Yu. I. Orlov*

A short wave asymptotic of scalar and electromagnetic fields is investigated in the vicinity of a small caustic in the case when a contact of a ray with caustic is of an arbitrary order (caustics of an arbitrary order). The solution of a reference problem on propagation of a plane wave in one-dimensional inhomogeneous medium gives the reference Airy — Hardy function $F_\nu(\xi)$. The basic properties of this function are studied. Based on the asymptotic solution of Helmholtz and Maxwell equations a general uniform asymptotic of the field has been obtained which is valid in the vicinity of caustic of an arbitrary order containing Airy — Hardy function $F_\nu(\xi)$ and its derivative $F'_\nu(\xi)$. It is shown that in a particular case of the first order caustics the asymptotic coinsides with a uniform caustic asymptotic in terms of Airy function and its derivative.