

УДК 538.574.6 : 523.164

К ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ НА НЕПРОЗРАЧНОМ ДИСКЕ С ХАОТИЧЕСКИ НЕРОВНЫМ КРАЕМ

Г. Л. Абрамян

Исследовано распределение среднего поля и мощности в пятне Пуассона при дифракции сферической волны на круглом непрозрачном тонком диске с неровным краем и определены физические условия его наблюдаемости. Указана возможность наблюдения пятна Пуассона за Луной на длинах волн более 500 метров, образованного дифракцией излучения компактных космических источников с целью исследования их угловой структуры. При этом может быть достигнуто угловое разрешение в 0,5 угловой минуты.

Задача дифракционного распространения волн за краем с шероховатой поверхностью рассматривалась в ряде работ. В [1-3] проведено исследование дифракционного распространения волн за полуплоскостью со статически неровным краем, а в [4] и [5] та же задача решалась независимо численным модельным методом. В [6] изучалось влияние флуктуаций падающей волны на дифракционную картину, образующуюся при рассеянии ее на идеально отражающей сфере большого радиуса.

В настоящей работе рассмотрено формирование пятна Пуассона излучением точечного удаленного источника за тонким непрозрачным диском в зависимости от степени неровности его края. Задача решалась в приближении Кирхгофа. Высота неровностей считалась распределенной по нормальному закону, а углы дифракции предполагались малыми. Рассмотренная задача эквивалентна исследованию диаграммы направленности кольцевой антенны при наличии флуктуаций возбуждающих токов на ее поверхности.

1. СРЕДНЕЕ ПОЛЕ В ПЯТНЕ ПУАССОНА

Пусть источник квазимонохроматического излучения с длиной волны λ расположен в точке $P_0(x_1, y_1, z_1)$, а излучение принимается в точке $P(x_2, y_2, z_2)$ за экраном, ограниченным кривой Γ , расположенным

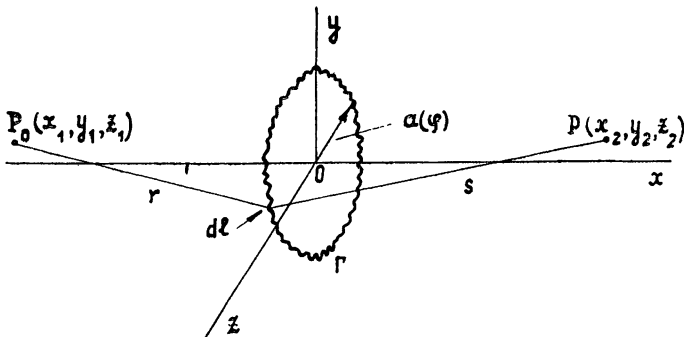


Рис. 1.

в плоскости (y, z) декартовой прямоугольной системы координат (рис. 1). Ось x направлена в сторону «тени» от источника. Кривая Γ , очерчивающая край экрана, описывается выражениями

$$y(\varphi) = a(\varphi) \cos \varphi, \quad z(\varphi) = a(\varphi) \sin \varphi, \quad (1)$$

где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$$a(\varphi) = a_0 + h(\varphi) = a_0(1 + \varepsilon(\varphi)). \quad (2)$$

Здесь

$$\varepsilon(\varphi) = \frac{h(\varphi)}{a_0} \quad (3)$$

— функция, описывающая относительную неровность края круглого экрана со средним радиусом a_0 в зависимости от угла φ . Кроме того будем полагать, что относительная неровность края диска невелика, а сам край достаточно гладкий и выполняются условия

$$l \ll a_0, \quad l \gg \lambda, \quad h \ll a_0, \quad (4)$$

где l — характерный средний масштаб длины неоднородностей вдоль края диска, а h — их высота.

Поле волны в точке P , распространяющейся из P_0 , можно представить в виде криволинейного интеграла Магги—Рабиновича [7, 9] по контуру Γ :

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\exp[ik(r+s)]}{rs} \chi dl, \quad (5)$$

где

$$\chi = \frac{\cos(\hat{n} s_1) \sin(\hat{r}_1, \hat{d} l_1)}{1 + \cos(\hat{s}_1, \hat{r}_1)}, \quad (6)$$

а n, s_1, r_1, dl_1 — единичные векторы, направленные соответственно вдоль оси x и вдоль линий s, r и Γ (рис. 1), $k = 2\pi/\lambda$,

$$dl = \sqrt{[\dot{y}(\varphi)]^2 + [\dot{z}(\varphi)]^2} d\varphi \quad (7)$$

— элемент кривой Γ , определяемый выражениями (1), (2) и (3). Подставляя (1) и (2) в (7) и выполняя дифференцирование по параметру φ , получим, учитывая (4):

$$dl = a_0 \sqrt{(1 + \varepsilon(\varphi))^2 + [\varepsilon(\varphi)]^2} d\varphi \approx a_0 d\varphi, \quad (8)$$

и в соответствии с (4) интегрирование по кривой Γ в выражении (5) можно заменить интегрированием по окружности радиуса a_0 .

Рассмотрение дифракции как результата интерференции «излучения» элементов неровного края экрана, образующих «кольцевую антенну», справедливо лишь в области тени диска. Вне тени необходимо рассматривать интерференцию волны, рассеянной краем диска и исходной падающей волны.

В рамках приближения «дифракции при малых углах» [7] после некоторых преобразований найдем из (5) выражение для поля за экраном в виде

$$U(P) = \frac{c}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(A\varepsilon^2 + B_\varphi \varepsilon - t \cos(\varphi + \psi))] d\varphi, \quad (9)$$

где введены обозначения

$$t = k a_0 \vartheta; \quad (10)$$

$$\vartheta = \sqrt{\left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{x_1} + \frac{z_2}{x_2}\right)^2}; \quad (11)$$

$$A = \frac{\pi a_0^2}{\lambda \rho}; \quad (12)$$

$$\rho = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}; \quad (13)$$

$$B_\varphi = 2A - t \cos(\varphi + \psi); \quad (14)$$

$$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{(z_1/x_1) + (z_2/x_2)}{(y_1/x_1) + (y_2/x_2)}; \quad (15)$$

$$c = \frac{a_0 \chi}{4s r} \exp \left[ik \left(x_1 + x_2 + \frac{y_1^2 + y_2^2 + z_1^2 + z_2^2}{2(x_1 + x_2)} + \frac{a_0^2}{2\rho} + \frac{\vartheta^2 \rho}{2} \right) \right]; \quad (16)$$

$$\varepsilon_0 = h_0/a_0, \quad (17)$$

а h_0 — стандартное отклонение высоты неровностей h края Г. Имея в виду в дальнейшем проведение операции усреднения поля по ансамблю реализаций неровностей края экрана, заметим, что в силу получаемой при этом симметрии «среднего диска» выбор направлений декартовых осей y и z в плоскости экрана произволен. Для простоты в дальнейшем будем полагать, что $z_1 = z_2 = y_1 = 0$. При этом в соответствии с (11) и (15)

$$\psi = 0, \quad \vartheta = y_2/x_2, \quad z_1 = z_2 = y_1 = 0. \quad (18)$$

В этом случае источник излучения расположен на оси x , а параметр ϑ — угол между направлением из центра диска в точку наблюдения $P(x_2, y_2, 0)$ и осью x . Полагая, что высота неровностей края диска распределена по нормальному закону, усредним поле $U(P)$ из (9) по ансамблю реализаций ε . Тогда найдем искомое выражение для среднего поля за экраном в виде:

$$\langle U(P) \rangle = \frac{c}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \exp [i(A\varepsilon^2 + B\varepsilon)] \rangle \exp(-it \cos \varphi) d\varphi, \quad (19)$$

где среднее по ансамблю $\langle \exp [i(A\varepsilon^2 + B\varepsilon)] \rangle$ представляет собой хорошо известный интеграл [8]:

$$\langle \exp [i(A\varepsilon^2 + B\varepsilon)] \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - i2\pi p^2}} \times \quad (20)$$

$$\times \exp \left[-\frac{2\pi p^2 A + i4\pi^2 p^4 A}{1 + 4\pi^2 p^4} (1 - \mu \cos \varphi)^2 \right];$$

$$p = h_0/\sqrt{\lambda \rho}, \quad (21)$$

а $h_0 = a_0 \varepsilon_0$ — стандартное отклонение длины радиуса экрана от его среднего значения a_0 ,

$$\mu = \vartheta/(a_0/\rho). \quad (22)$$

В данной задаче источник излучения и точка наблюдения предполагаются достаточно далеко удаленными от экрана. Будем полагать в дальнейшем в выражении (20) в соответствии с условиями наблюдения при малых углах ϑ

$$(1 - \mu \cos \varphi)^2 \approx 1 - 2\mu \cos \varphi, \quad \mu \ll 1. \quad (23)$$

При этих условиях, подставляя (20) в выражение (19), найдем выражение для среднего поля за экраном в виде

$$\langle U(P) \rangle = c M I_0(q), \quad (24)$$

где $I_0(q)$ — функция Бесселя нулевого порядка комплексного аргумента q ,

$$q = t \frac{2\pi p^2 - i}{1 + 4\pi^2 p^4}; \quad (25)$$

$$M = \frac{\exp\left[-\frac{2\pi p^2 A + i 4\pi^2 p^4 A}{1 + 4\pi^2 p^4}\right]}{\sqrt{1 - i 2\pi p^2}}. \quad (26)$$

Если $h_0 = 0$, то из (24) находим выражение для распределения поля в регулярной задаче дифракции в виде

$$\langle U(P) \rangle = c J_0(t), \quad h_0 = 0, \quad (27)$$

где $J_0(t)$ — функция Бесселя нулевого порядка действительного аргумента $t = ka_0 \vartheta$.

Если источник излучения и точка наблюдения настолько далеки от экрана, что находятся в зоне Фраунгофера по отношению к характерным размерам неровностей его края, то выражение для среднего поля (24) за экраном приобретает вид

$$\langle U(P) \rangle = c M J_0(t), \quad 2\pi p^2 \ll 1. \quad (28)$$

В этом случае влияние неровностей края экрана проявляется в искажении регулярной дифракционной картины $J_0(t)$ только комплексным весом множителем M , определяемым соотношением (26). Введем в рассмотрение параметр H :

$$H = 4\pi p^2 A = \left(kh_0 \frac{a_0}{\rho}\right)^2. \quad (29)$$

H определяет дисперсию флюктуирующей вдоль края экрана составляющей набега фазы волны, проходящей в точку наблюдения P .

Если экран имеет настолько большой средний радиус a_0 , что $H \gg 1$, то поле за экраном экспоненциально мало, даже когда $p^2 \ll 1$. При этом коэффициент M в выражении (28) имеет вид

$$M = \exp\left(-\frac{H}{2} - i H \pi p^2\right), \quad H \gg 1, \quad 2\pi p^2 \ll 1. \quad (30)$$

Если источник излучения и точка наблюдения достаточно близки к экрану, так, что выполняется условие $2\pi p^2 \gg 1$, но вместе с тем настолько далеки от него, что справедливо исследование дифракции при малых углах, то из выражения (24) следует, что среднее поле за экраном определяется выражением

$$\langle U(P) \rangle = c M I_0\left(\frac{t}{2\pi p^2}\right) \approx \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi p} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{a_0^2}{h_0^2} - iA\right), \quad 2\pi p^2 \gg 1. \quad (31)$$

Поле в этом случае мало, поскольку в соответствии с условиями (4) $a_0 \gg h_0$.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ В ПЯТНЕ ПУАССОНА

Используя выражение для поля $U(P)$, определяемое соотношением (11), можно представить мощность сигнала в пятне Пуассона в виде

$$\langle | \dot{U}(P) |^2 \rangle = \left(\frac{c}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \Omega(\varphi, \tilde{\varphi}) \exp(-it \cos \varphi + it \cos \tilde{\varphi}), \quad (32)$$

где

$$\Omega(\varphi, \tilde{\varphi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} i \tilde{\varphi}(\varepsilon) \exp(iA\varepsilon^2 + iB_\varphi \varepsilon) d\varepsilon; \quad (33)$$

$$i \tilde{\varphi}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\varepsilon, \tilde{\varepsilon}) \exp(-iA\tilde{\varepsilon}^2 - iB_{\tilde{\varphi}} \tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon}, \quad (34)$$

а $W(\varepsilon, \tilde{\varepsilon})$ — двумерная плотность вероятности нормального распределения для $\varepsilon(\varphi)$.

В дальнейшем будем полагать, что функция корреляции неоднородностей на крае диска зависит от разности углов $\varphi - \tilde{\varphi}$ и для конкретности имеет вид

$$R(\varphi - \tilde{\varphi}) = \exp\left(-\frac{a_0^2(\varphi - \tilde{\varphi})^2}{l^2}\right), \quad (35)$$

где l — характерный средний масштаб неоднородностей вдоль края диска, на котором наблюдается дифракция.

Вычисляя известные интегралы, определяемые выражениями (34) и (33) [8], после некоторых преобразований получим

$$\Omega(\varphi, \tilde{\varphi}) = \frac{\exp[-D_\varphi^2 - D_{\tilde{\varphi}}^2 + 2R(\varphi, \tilde{\varphi})D_\varphi D_{\tilde{\varphi}} - iS_\varphi + iS_{\tilde{\varphi}}]}{\sqrt{1 + 4\pi^2 p^4 (1 - R^2(\varphi, \tilde{\varphi}))}}, \quad (36)$$

где

$$D_\varphi^2 = \frac{2\pi p^3 A (1 - \mu \cos \varphi)^2}{1 + 4\pi^2 p^4 (1 - R^2(\varphi, \tilde{\varphi}))}; \quad (37)$$

$$D_\varphi D_{\tilde{\varphi}} = \frac{2\pi p^2 A (1 - \mu \cos \varphi) (1 - \mu \cos \tilde{\varphi})}{1 + 4\pi^2 p^4 (1 - R^2(\varphi, \tilde{\varphi}))}; \quad (38)$$

$$S_\varphi = \frac{4\pi^3 p^4 A^2 (1 - \mu \cos \varphi)^2 (1 - R^2(\varphi, \tilde{\varphi}))}{1 + 4\pi^2 p^4 (1 - R^2(\varphi, \tilde{\varphi}))}; \quad (39)$$

$$S_{\tilde{\varphi}} = \frac{4\pi^3 p^4 A^2 (1 - \mu \cos \tilde{\varphi})^2 (1 - R^2(\varphi, \tilde{\varphi}))}{1 + 4\pi^2 p^4 (1 - R^2(\varphi, \tilde{\varphi}))}. \quad (40)$$

Используя условия малости углов, при которых наблюдается дифракция (23), и учитывая соотношение (35), можно записать выражение (36) в виде

$$\Omega(\varphi - \tilde{\varphi}) = \frac{\exp \left[-\frac{4\pi p^2 A (1 - R(\varphi - \tilde{\varphi}))}{1 + 4\pi^2 p^4 (1 - R^2(\varphi - \tilde{\varphi}))} \right]}{\sqrt{1 + 4\pi^2 p^4 (1 - R^2(\varphi - \tilde{\varphi}))}}. \quad (41)$$

Сделаем в выражении (32) замену переменных интегрирования

$$\beta = \varphi - \tilde{\varphi}, \quad \gamma = (\varphi + \tilde{\varphi})/2, \quad (42)$$

тогда после некоторых преобразований получим из (32)

$$\begin{aligned} \langle |U(P)|^2 \rangle &= 2 \left(\frac{c}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-(1/2)\beta}^{-(1/2)\beta+2\pi} d\gamma \Omega(\beta) \cos \left(2t \sin \frac{\beta}{2} \sin \gamma \right) - \\ &- 2 \left(\frac{c}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-(1/2)\beta}^{(1/2)\beta} d\gamma \Omega(\beta) \cos \left(2t \sin \frac{\beta}{2} \sin \gamma \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Используя известное соотношение, связывающее функции Бесселя действительного аргумента J_0 , J_{2k} с тригонометрическими функциями [8]

$$\cos(g \sin \gamma) = J_0(g) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(g) \cos 2k\gamma, \quad (44)$$

выражение (43) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \langle |U(P)|^2 \rangle &= \frac{c^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\beta}{2\pi} \right) \Omega(\beta) J_0 \left(2t \sin \frac{\beta}{2} \right) d\beta - \\ &- \frac{c^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta}{\pi} \frac{\sin k\beta}{k\beta} J_{2k} \left(2t \sin \frac{\beta}{2} \right) d\beta. \end{aligned} \quad (45)$$

С другой стороны, можно показать, что для любых действительных значений t и β имеет место соотношение

$$\Phi(\beta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta}{\pi} \frac{\sin k\beta}{k\beta} J_{2k} \left(2t \sin \frac{\beta}{2} \right) = 0. \quad (46)$$

Действительно, при $\Omega(\beta) = 1$, используя (32) из (45), после некоторых преобразований и вычисления известных интегралов [8] находим

$$\int_0^{2\pi} \Phi(\beta, t) d\beta = 0. \quad (47)$$

Поскольку последнее соотношение справедливо при любых значениях t , из (47) находим искомое соотношение (46).

Используя соотношение (46), найдем окончательно из (45) выражение, определяющее среднюю мощность за экраном в виде

$$\langle |U(P)|^2 \rangle = \frac{c^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\beta}{2\pi}\right) \Omega(\beta) J_0\left(2t \sin \frac{\beta}{2}\right) d\beta. \quad (48)$$

Если $p = 0$, то, используя (41) и результаты вычислений известных интегралов [8], выражение (48) можно преобразовать к виду

$$\langle |U(P)|^2 \rangle = c^2 J_0^2(t), \quad h_0 = 0. \quad (49)$$

Перейдем теперь к физическому обсуждению результата вычисления $\langle |U(P)|^2 \rangle$ из (48).

Рассмотрим случай, когда неровности на краю диска имеют размеры много меньше первой зоны Френеля:

$$2\pi p^2 = \frac{2\pi h_0^2}{\lambda \rho} \ll 1. \quad (50)$$

В этом случае, учитывая выражение (35), функция $\Omega(\beta)$ из (41) может быть приближенно представлена в виде

$$\Omega_1(\beta) = \exp \left\{ -4\pi p^2 A \left[1 - \exp \left(-\frac{a_0^2 \beta^2}{l^2} \right) \right] \right\}. \quad (51)$$

Результаты вычисления $\langle |U(P)|^2 \rangle$ из (51) с функцией $\Omega(\beta) = \Omega_1(\beta)$, определяемой соотношением (51), приведены на рис. 2.

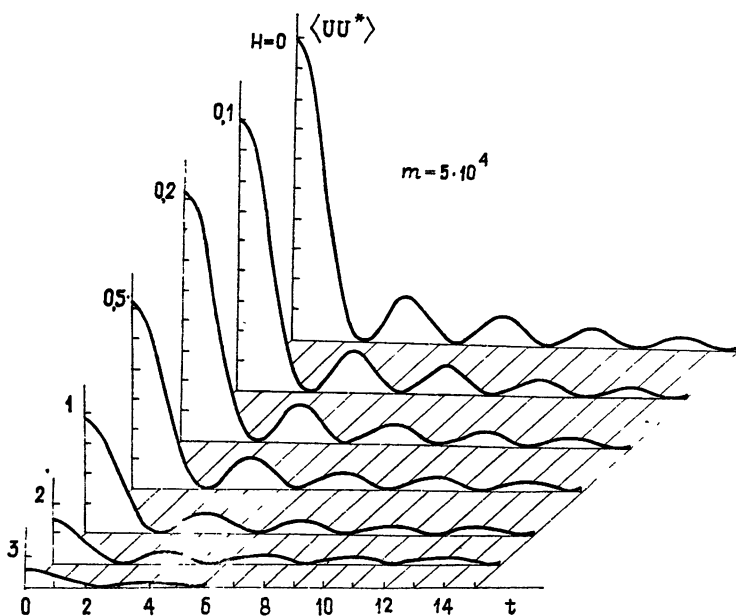


Рис. 2.

Параметр $m = a_0^2/l^2$ предполагается достаточно большим, поскольку в противном случае теряет смысл статистическое исследование влияния шероховатостей края диска на распределение мощности сигнала в пятне Пуассона, рассматриваемое в настоящей работе. Расчет показывает (рис. 2), что по мере приближения к экрану и соответственного увеличения параметра H , определяемого выражением (29), происходит одновременное подавление как главного, так и боковых лепестков в рас-

пределении мощности пятна Пуассона, приводящее к постепенному выравниванию их относительного веса в дифракционной картине. Случаи $H \ll 1$ и $H \gg 1$ соответствуют малым и большим флуктуациям фазы излучения на крае диска.

Из выражений (48) и (51) находим приближенно при $H \ll 1$

$$\langle |U(P)|^2 \rangle = c^2 J_0^2(t) - c^2 H J_0^2(t), \quad H \ll 1, \quad 2\pi p^2 \ll 1, \quad (52)$$

а при $H \gg 1$

$$\langle |U(P)|^2 \rangle = c^2 J_0^2(t) \exp(-H), \quad H \gg 1, \quad 2\pi p^2 \ll 1. \quad (53)$$

Выражение (52) определяет среднюю мощность в пятне Пуассона как сумму регулярной картины дифракции $c^2 J_0^2(t)$ и искажающей компоненты $-c^2 H J_0^2(t)$ в условиях малых флуктуаций фазы на крае экрана. Соотношение (53) показывает, что при $H \gg 1$ дифракционная картина замывается и мощность $\langle |U(P)|^2 \rangle$ экспоненциально мала даже при $h_0 \ll \sqrt{\lambda \rho}$.

В заключение кратко остановимся на предложении авторов работы [10] относительно возможности наблюдения пятна Пуассона за Луной, образованного дифракцией излучения компактных космических источников, с целью исследования их угловой структуры. Средний перепад горных образований на Луне составляет 5—6 километров, и на ней практически полностью отсутствует атмосфера. Используя результаты настоящей работы, можно ожидать, что такие наблюдения возможны, если их проводить на длине волны 500 метров и более в окрестностях нашей планеты, но естественно за пределами земной ионосферы, непрозрачной на таких длинных волнах. При этом может быть достигнуто угловое разрешение в 0,5 угловой минуты.

Автор выражает благодарность Н. Г. Денисову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полищук Ю. М., Редькин Б. А.—Труды Томского ин-та радиоэлектроники и электронной техники, 1965, 4, с. 9.
2. Furutsu K.—Radio Science (New Series), 1966, 1, p. 79.
3. Полищук Ю. М.—Изв. вузов — Радиофизика, 1968, 11, № 1, с. 72.
4. Evans David S.—Astron. J., 1970, 75, p. 588.
5. Sowers Joseph L.—Astron. J., 1974, 79, p. 321.
6. Фрайман А. А.—Изв. вузов — Радиофизика, 1972, 15, № 9, с. 1362.
7. Вогн Мах, Вольф Э. Principles of Optics. Pergamon Press, 1964; Борн М., Вольф Э. Основы оптики.—М.: Наука, 1970.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Физматгиз, 1963.
9. Sommerfeld Arnold. Optik.—Leipzig: 1964; Зоммерфельд А. Оптика.—М.: ИЛ, 1953.
10. Гетманцев Г. Г., Гинзбург В. Л.—ЖЭТФ, 1950, 20, с. 347.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
17 января 1980 г.

TO THE DIFFRACTION THEORY ON IMPENETRABLE DISK WITH THE CHAOTICALLY ROUGH EDGE

G. L. Abramyan

Distribution of the average field and power in Poisson spot when the spherical wave is diffracted by the round, impenetrable, thin disk with rough edge is investigated and physical conditions of its observation are obtained. An observation possibility of the Poisson spot behind the Moon at wavelengths more than 500 meters formed by the radiation diffraction of compact cosmic sources for the investigation of their angular structure is pointed out. The angular resolution of 0,5 angular minute may be achieved.