

УДК 621.391.2 : 621.391.63

## КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ ПОТОКА СИГНАЛОВ

*В. П. Левшин, Г. И. Чекуров*

Произведен синтез и анализ квазиоптимального алгоритма обнаружения потока сигналов. Показано, что в большом интервале значений числа сигналов потока эффективность предлагаемого алгоритма выше, чем у алгоритма типа « $l$  из  $L$ » либо «линейного интегратора».

При решении ряда радиофизических задач возникает необходимость обнаружения потока импульсных флуктуирующих сигналов. Задачам обнаружения потока сигналов посвящено значительное число работ, например, [1-3]. Так, в [1] показано, что, когда число и параметры отдельных сигналов рассматриваются как случайные параметры потока, реализовать оптимальное правило обнаружения практически невозможно. В этом случае становится актуальной менее общая, но практически важная задача поиска упрощенных квазиоптимальных алгоритмов обнаружения потока сигналов. В том или ином виде существующие квазиоптимальные алгоритмы обнаружения потока сигналов сводятся к алгоритмам типа « $l$  из  $L$ » [4], либо алгоритмам, основанным на линейном суммировании замеров («линейный интегратор» [3]). Основной недостаток таких квазиоптимальных алгоритмов заключается в том, что каждый из них эффективен лишь при определенном, априори заданном числе сигналов потока. Последнее заставляет продолжать поиски квазиоптимальных алгоритмов, эффективность которых была бы высока в большом диапазоне возможных значений числа сигналов потока.

В значительной мере названному условию удовлетворяет алгоритм обнаружения потока сигналов, предлагаемый в настоящей статье.

Эффективная работа предлагаемого алгоритма обеспечивается благодаря использованию в нем последовательно операций ранжирования и весового суммирования. Рассмотрим детально структуру и характеристики алгоритма.

### 1. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ ПОТОКА СИГНАЛОВ

Во избежание громоздких выкладок примем следующие условия:

1) Отдельные сигналы потока разрешены.  
 2) Поток обрабатывается с помощью фильтра, согласованного с отдельным сигналом потока, и детектора огибающей, на выходе которого в моменты времени, следующие через интервал разрешения, берутся независимые отсчеты  $X_i$  ( $i = \overline{1, L}$ ), образующие вектор  $\overline{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_L\}$ .

3) Сигналы потока равновероятно занимают любые  $k$  из  $L$  анализируемых интервалов разрешения.

4) Энергия потока равномерно распределена в  $k$  интервалах разрешения, занятых аддитивной смесью сигнала с шумом.

5) Число  $k$  сигналов потока случайно и принимает с вероятностью  $P_n$  одно из  $L$  значений множества натурального ряда  $1, 2, \dots, L$  ( $\sum_{n=1}^L P_n = 1$ ).

6) Шум, а также аддитивная смесь сигнала с шумом в разных интервалах разрешения стационарны, статистически независимы и подчиняются рэлеевскому распределению, которое для замера с шумом имеет вид

$$W(X_i) = \frac{X_i}{\gamma_1} \exp\{-X_i^2/2\gamma_1\}, \quad X_i \geq 0 \quad (1)$$

и для одного шума —

$$W(X_i) = \frac{X_i}{\gamma_0} \exp\{-X_i^2/2\gamma_0\}, \quad X_i \geq 0, \quad (2)$$

где  $\gamma_1 = \gamma_0(1 + q_k^2/k)$ ,  $q_k^2$  — отношение сигнал/шум.

Оптимальным алгоритмом обнаружения потока сигналов является алгоритм, вычисляющий отношение правдоподобия [1]:

$$l(\bar{X}) = \sum_{n=1}^L P_n \frac{1}{\binom{L}{n}} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right)^n \sum_{i=1}^{\binom{L}{n}} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2\gamma_0} - \frac{1}{2\gamma_1}\right) \sum_{i=1}^n X_{ij}^2\right\} \geq \Pi. \quad (3)$$

Здесь  $X_{ij}$  —  $j$ -я компонента  $n$ -мерного вектора  $\bar{X}_{ij}$ , составленного одним из  $\binom{L}{n}$  возможных способов из компонент вектора  $\bar{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_L\}$ ,  $\Pi$  — величина порога.

Видим, что структура оптимального алгоритма обнаружения чрезвычайно сложна. Для ее упрощения заменим в (3) сумму с индексом  $i$  одним максимальным ее членом. Кроме того, предположим, что производим обнаружение слабых сигналов, когда  $q_k^2 \rightarrow 0$ .

Тогда после несложных преобразований можно получить следующее простое квазиоптимальное правило обнаружения потока импульсных флуктуирующих сигналов:

$$l(\bar{X}) \approx \sum_{j=1}^L T_j Y_j \geq \Pi_1, \quad (4)$$

где  $Y_1 \geq Y_2 \geq \dots \geq Y_L$  — последовательность, полученная путем упорядочения по величине компонент вектора  $\bar{X}^2 = \{X_1^2, X_2^2, \dots, X_L^2\}$ . При переходе от (3) к (4) все постоянные коэффициенты и слагаемые были вынесены в величину порога  $\Pi_1$  либо объединены в весовые коэффициенты  $T_j$  ( $j = \overline{1, L}$ ), которые зависят от априорного распределения числа  $k$  сигналов потока  $T_j = \sum_{n=j}^L P_n$  ( $j = \overline{1, L}$ ). Так, для  $P_n = 1/L$  ( $n = \overline{1, L}$ )  $T_j = (L - j + 1)/L$ . Согласно (4) для обнаружения потока необходимо замеры, поступившие с аппаратуры корреляционно-фильтровой обработки, в частности согласованного фильтра и детектора огибающей, расставить в порядке возрастания их интенсивности, а затем — произвести их весовое суммирование. Причем структура предложенного алгоритма обнаружения инвариантна к числу и параметрам отдельных сигналов потока. От априорного распределения числа сигналов потока зависят только значения весовых коэффициентов алгоритма.

Отметим ряд полезных свойств алгоритма. Во-первых, структура алгоритма достаточно универсальна. Действительно, выбирая соответствующие значения весовых коэффициентов, можно прийти к любому из известных квазиоптимальных алгоритмов обнаружения потока сигналов. Например, при  $T_j = 1$  ( $j = \overline{1, L}$ ) получим структуру «линейного интегратора», при  $T_j = \begin{cases} 0 & j \neq l, j = \overline{1, L} \\ 1 & j = l \end{cases}$  приходим к алгоритму

обнаружения с логикой « $l$  из  $L$ ». Во-вторых, основой алгоритма является весовое суммирование упорядоченных по интенсивности замеров огибающей на выходе фильтра, согласованного с отдельным сигналом потока. Полученная таким образом решающая статистика может быть отнесена к классу непараметрических статистик. Это, в свою очередь, указывает на новые возможности использования непараметрических статистик в задачах обработки потока сигналов. Например, легко убедиться, что ряд ранговых алгоритмов обнаружения может быть соответствующим образом применен для обнаружения потока сигналов. В-третьих, практическая реализация алгоритма проста. Единственно сложная операция, которая заключается в упорядочении по интенсивности замеров  $X_i$  ( $i = \overline{1, L}$ ), может быть реализована с помощью универсальных либо специализированных цифровых устройств.

Перейдем к исследованию характеристик предложенного алгоритма.

## 2. АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ ПОТОКА ФЛУКТУИРУЮЩИХ СИГНАЛОВ

Проведем расчет и сравнение характеристик предложенного алгоритма с характеристиками двух, нашедших широкое практическое применение квазиоптимальных алгоритмов обнаружения потока сигналов: «линейным интегратором» и алгоритмом с логикой « $l$  из  $L$ » ( $l = 1$ ).

Заметим, что при обнаружении потока сигналов, число которых априори неизвестно, подобной логике следует отдать предпочтение, поскольку, когда поток содержит только один сигнал, алгоритм, имеющий  $l > 1$ , обеспечивает крайне низкие вероятности обнаружения (одного порядка с вероятностью ложной тревоги). Названные алгоритмы рассмотрим как два предельных случая алгоритма (4). Для этого положим, что  $T_j = [(L - j + 1)/L]^m$  ( $m \geq 0$ ). При изменении  $m$  от 0 до  $\infty$  структура алгоритма (4) трансформируется и переходит от «линейного интегратора» ( $m = 0$ ) к алгоритму обнаружения с логикой типа « $l$  из  $L$ » ( $m = \infty$ ). Это позволяет выявить ряд общих закономерностей, характерных для алгоритмов типа (4).

Считая  $L$  и  $k$  постоянными величинами, получим характеристики алгоритма (4), когда весовые коэффициенты этого алгоритма удовлетворяют условию  $T_i \neq T_j$  для  $i \neq j \in \overline{1, L}$ . С учетом (2) и (3) запишем распределение упорядоченных величин  $Y_i$  ( $j = \overline{1, L}$ ):

$$W(Y_1, Y_2, \dots, Y_L) = \sum_{s=1}^{\binom{L}{k}} \lambda_1^k \lambda_0^{L-k} \exp\left(-\sum_{j=1}^L \lambda_{js} Y_j\right), \quad (5)$$

где  $Y_1 \geq Y_2 \geq \dots \geq Y_L$ ,  $\lambda_{js}$  —  $j$ -я компонента последовательности  $\lambda_{1s}, \lambda_{2s}, \dots, \lambda_{ks}$ , составленной одним из  $\binom{L}{k}$  возможных способов из последовательности  $\underbrace{\lambda_{1, \dots, \lambda_1}}_k, \underbrace{\lambda_{0, \dots, \lambda_0}}_{L-k}$ ,

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \gamma_0, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \gamma_1 = \lambda_0 / (1 + q_k^2 / k).$$

Используя (5), нетрудно получить характеристическую функцию (4):

$$Q(v) = \sum_{s=1}^{\binom{L}{k}} \frac{\lambda_0^{(L-k)} \lambda_1^k}{\prod_{i=1}^L \left( \sum_{i=1}^l T_i \right)} \left[ \prod_{i=1}^L \left( \frac{\sum_{i=1}^l \lambda_{is}}{\sum_{i=1}^l T_i} - jv \right) \right]^{-1}. \quad (6)$$

Отсюда вероятности правильного обнаружения  $P$  и ложной тревоги  $\bar{F}$  как функции  $\Pi_1$  имеют следующий вид:

$$P = \sum_{s=1}^{\binom{L}{k}} \frac{\lambda_0^{(L-k)} \lambda_1^k}{\prod_{i=1}^L \left( \sum_{i=1}^l T_i \right)} \sum_{p=1}^L \frac{\exp \left( - \frac{\sum_{i=1}^p \lambda_{is}}{\sum_{i=1}^p T_i} \Pi_1 \right) \sum_{i=1}^p \lambda_{is}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^L \left( \frac{\sum_{i=1}^l \lambda_{is}}{\sum_{i=1}^l T_i} - \frac{\sum_{i=1}^p \lambda_{is}}{\sum_{i=1}^p T_i} \right) \sum_{i=1}^p T_i}; \quad (7)$$

$$\bar{F} = \frac{L! \lambda_0^2}{k!(L-k)! \prod_{i=1}^L \left( \sum_{i=1}^l T_i \right)} \sum_{p=1}^L \frac{\exp \left\{ - p \lambda_0 \Pi_1 / \sum_{i=1}^p T_i \right\} p}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^L \left( \frac{l}{\sum_{i=1}^l T_i} - \frac{p}{\sum_{i=1}^p T_i} \right) \sum_{i=1}^p T_i}. \quad (8)$$

Например, для  $T_j = (L-j+1)/L$  и  $\lambda_0 = 0,5$  выражение (8) дает следующее:

$$F = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{(2L-i)^{L-1}}{(L-1-i)} \exp \left\{ - \frac{\Pi_1 L}{(2L-i)} \right\}. \quad (9)$$

Однако численным расчетам характеристик алгоритма (4) по формулам (7) и (8), (9) препятствует то, что уже при  $L \approx 10$  абсолютные значения членов знакопеременного ряда (7) — (9) перекрывают разрядную сетку такой вычислительной машины, как БЭСМ-6. Последнее обстоятельство заставляет для расчетов характеристик рассматриваемых алгоритмов использовать приближенные методы.

### 3. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ ПОТОКА СИГНАЛОВ

Для расчетов характеристик предлагаемого алгоритма использовался приближенный метод, основанный на аппроксимации распределения  $Z = \sum_{j=1}^L T_j Y_j$  полиномами Лагерра.

Проведем приближенный расчет и анализ кумулянт распределения  $Z$ . При расчетах полагаем, что, поскольку в (4) входят упорядоченные величины, правоммерно допустить, что  $k$  первых величин  $Y_j$  ( $j = 1, k$ ) определяются аддитивной смесью сигнала с шумом, а остальные  $(L-k)$  величин  $Y_{k+1}, \dots, Y_L$  — одним шумом. Тогда  $p$ -й кумулянт распределения  $Z$  может быть записан в виде

$$x_p = (p-1)! \left\{ \lambda_1^{-p} \sum_{n=1}^k \left( \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} \right)^p + \lambda_0^{-p} \sum_{n=k-1}^L \left( \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} \right)^p \right\}. \quad (10)$$

Формула (10) позволяет рассчитать зависимость коэффициентов асимметрии и эксцесса распределения  $Z$  от  $L$  и числа  $m$ , определяющего значения весовых коэффициентов  $T_j$  ( $j = 1, L$ ) (рис. 1). Видно, что с увеличением  $L$  как асимметрия, так и эксцесс уменьшаются (асимметрия несколько медленнее, чем эксцесс). Уменьшение этих коэффициентов свидетельствует о приближении распределения  $Z_k$  к нормальному закону при возрастании  $L$  и приближении весовых коэффициентов

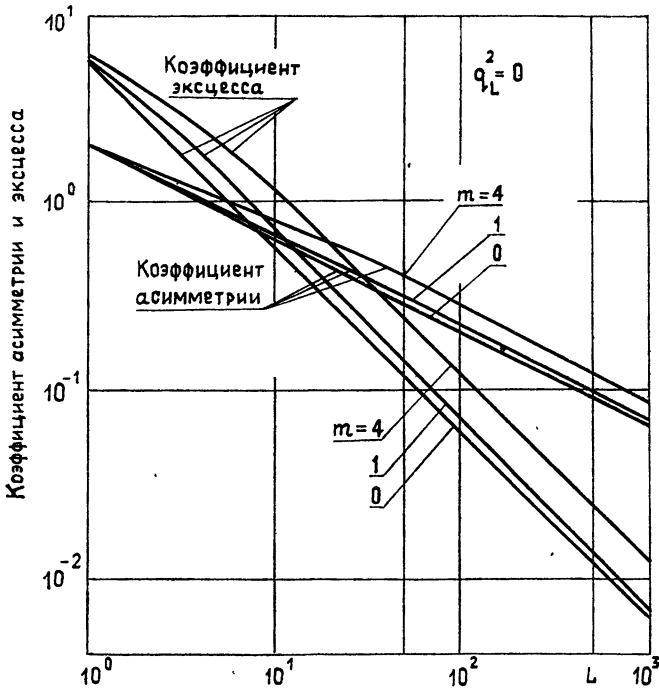


Рис. 1.

к единице. Однако с увеличением различия в коэффициентах  $T_j$  нормализация  $Z$  оказывается сравнительно слабой. Это объясняется тем, что вследствие неравномерности закона суммирования слагаемые величины  $Z$  имеют различные законы распределения, хотя и одного характера. Следовательно, в рассматриваемом случае не выполняются условия центральной теоремы вероятностей. В аналогичной ситуации в [5] рекомендовано для приближенных расчетов характеристик обнаружения даже при больших  $L$  и  $k$  ( $\sim 10^5$ ) использовать аппроксимацию функции распределения  $Z$  полиномами Лагерра.

В качестве характеристики алгоритма (4) рассчитывалась величина дополнительного отношения сигнал/шум, необходимая для поддержания заданных характеристик обнаружения  $P = 0,99$  и  $F = 10^{-6}$ , по сравнению со случаем одиночного замера, когда  $L = 1$  и  $k = 1$  ( $\Delta = q_L^2/q_1^2$ ). Результаты расчетов представлены на рис. 2. Для трех значений  $m = 0$  (сплошная кривая),  $4$  (штриховая кривая),  $\infty$  (штрихпунктирная) дана зависимость  $\Delta$  от числа анализируемых интервалов разрешения  $L$ . Анализ характеристик обнаружения потока сигналов, в частности кривых рис. 2, позволяет сделать следующие выводы:

1) Зависимость требуемой для поддержания заданных характеристик обнаружения энергии потока от числа интервалов разрешения  $k$ , занятых сигналами потока, имеет минимум при некотором оптимальном числе  $k_{\text{opt}}$ .

2) Величина  $k_{\text{opt}}$  мало зависит от допустимой вероятности локальной тревоги  $F$  и отношения  $L/k$ , но существенно зависит от допустимой вероятности правильного обнаружения  $P$  и значений весовых коэффициентов алгоритма, иначе числа  $m$ . При возрастании  $P$  значение  $k_{\text{opt}}$  увеличивается. Например, при  $m=0$  и  $P=0,9$  получаем  $k_{\text{opt}} \approx 8$ , если же  $P=0,99$ , то  $k_{\text{opt}} \approx 16$ . При возрастании  $m$  значение  $k_{\text{opt}}$  уменьшается. Например, при  $P=0,99$  для  $m=0$  получаем  $k_{\text{opt}} \approx 16$ ,  $m=4$  —  $k_{\text{opt}} \approx 12$  и  $m \approx \infty$  —  $k_{\text{opt}} \approx 16$ .

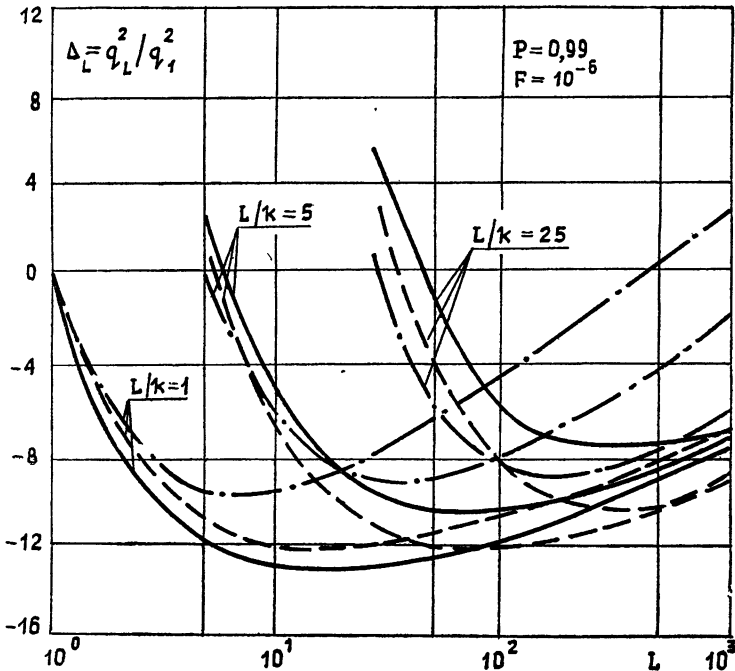


Рис. 2.

3) Выигрыш, имеющий место при  $k = k_{\text{opt}}$ , по сравнению с  $L = 1$ :  
 а) возрастает при уменьшении вероятности ложной тревоги и увеличении вероятности правильного обнаружения  $P$  и особенно резко зависит от вероятности  $P$ . Так, например, для  $F = 10^{-3}$  и  $P = 0,9$  максимальный выигрыш равен  $\sim 3$  дБ, а при  $F = 10^{-6}$ ,  $P = 0,99$  он достигает уже  $\sim 13$  дБ ( $L/k = 1$ ,  $m = 0$ )

б) уменьшается с увеличением отношения  $L/k$  при  $P$ ,  $F$ ,  $m = \text{const}$ . Причем скорость уменьшения выигрыша в энергии потока уменьшается с увеличением  $m$ . Так, например, на каждые  $\sim 2$  дБ увеличения отношения  $L/k$  для  $m = 0$  скорость уменьшается на  $\sim 1$  дБ.

4) При увеличении общего числа анализируемых интервалов разрешения  $L$  ( $k = \text{const}$ )  $\Delta$ -величина существенно зависит от числа  $m$ . Предельные случаи, когда  $m = 0$  и  $m = \infty$ , эффективны лишь для некоторых значений  $L$  и  $k$ . Для большинства  $L$  и  $k$  лучшие результаты дает специальный выбор значения  $m$ . Например, при  $k = 10$  и увеличении  $L$  с 10 до  $10^3$  ( $P = 0,99$  и  $F = 10^{-6}$ ) алгоритм с  $m = 4$  по сравнению

а) с  $m = 0$  для  $L \leq 15$  дает незначительный проигрыш в требуемой энергии потока ( $\leq 1$  дБ), а при  $L \geq 15$  дает выигрыш, достигающий  $\geq 34$  дБ,

б) с  $m = \infty$  дает максимальный выигрыш  $\geq 3$  дБ и эффективен до  $L \leq 630$ , тогда как при  $L \geq 630$  дает проигрыш в требуемой энергии потока ( $\leq 1$  дБ при  $L = 10^3$ ).

Вышесказанное позволяет заключить, что предложенный алгоритм обнаружения в большом диапазоне значений  $L$  и  $k$  обеспечивает энергетический выигрыш по сравнению с «линейным интегратором» и алгоритмом с логикой « $l$  из  $L$ ».

Причем существенный выигрыш в требуемой энергии потока получается, когда разрешающая способность системы такова, что число интервалов разрешения, занятых потоком, равняется  $k_{\text{опт}}$ .

---

1. Предложенный алгоритм обнаружения потока флуктуирующих сигналов имеет структуру, инвариантную к числу и параметрам отдельных сигналов потока. Алгоритм основан на весовом суммировании упорядоченных по интенсивности замеров, полученных на выходе аппаратуры корреляционно-фильтровой обработки.

2. Анализ характеристик алгоритма показал, что алгоритм значительно проще оптимального и в то же время в большинстве случаев в равных условиях обеспечивает энергетический выигрыш по сравнению с «линейным интегратором» и алгоритмом с логикой типа « $l$  из  $L$ ».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Большаков И. А. Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума. — М.: Сов радио, 1969.
2. Ван дер Спек. — Зарубежная радиоэлектроника, 1972, № 9, с. 3.
3. Седякин Н. М. Элементы теории случайных импульсных потоков. — М.: Сов радио, 1965
4. Ширман Я. Д., Голиков В. И. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. — М.: Сов. радио, 1963.
5. Лезин Ю. С. Оптимальные фильтры и накопители импульсов сигналов. — М.: Сов. радио, 1963.

Поступила в редакцию  
6 декабря 1979 г.

#### QUASI-OPTIMAL ALGORITHM FOR THE DETECTION OF A SIGNAL FLUX

*V. P. Levshin, G. I. Chekurov*

Synthesis and analysis are made of a quasi-optimal algorithm for the detection of a signal flux. It is shown that in a large interval of values of a flux signal number the efficiency of the algorithm proposed is higher than those of « $l$  from  $L$ » or «linear integrator».

---