ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1981*

УДК 538.56 : 519.25

ТОЧНАЯ НЕМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ДИНАМО

С. И. Вайнштейн

Найдена статистическая модель, для которой коэффициенты турбулентной диффузии и генерации магнитного поля вычисляются в точном виде, причем модель не является марковской. Модель строится на задании функции распределения лагранжевых характеристик турбулентности. Поля появляются только при наличии отражательной неинвариантности (гиротропности) функции распределения. Найдена функция распределения с гиротропными свойствами и дающая точное экспоненциально растущее решение. Коэффициент турбулентной диффузии зависит от меры гиротропности в этой модели.

К настоящему времени хорошо установлено, что отражательно неинвариантная турбулентность (ОНИТ) способна работать как генератор крупномасштабного магнитного поля, в то время как отражательно инвариантная (ОИТ) приводит лишь к турбулентной диффузии. Этот результат был получен строго в трех случаях: 1) слабопроводящая плазма [1]; 2) высокопроводящая плазма, марковская модель ($\tau \ll l/v$, τ — время корреляции, l — корреляционная длина, v — среднеквадратичная скорость [2]); 3) надмарковские модели [3, 4], которые, строго говоря, применимы при малых $\tau v/l$. Ввиду хорошей сходимости приближений Кляцкина — Татарского [5], продемонстрированной на модельных, точно решаемых примерах, можно надеяться на то, что коэффициенты турбулентной диффузии $D_\text{т}$ и генерации α, полученные в [4], достаточно близки к реальным даже при $\tau v/l \approx 1$. Тем не менее, необходимость получения строгих решений для реальной турбулентности с $\tau \approx l/v$ отнюдь не отпала. Именно такое решение было недавно получено Крейчнаном [6] — это есть четвертый строгий результат. В работе [6] фактически используется разложение по малому параметру l/L (L — характерный размер крупномасштабного поля). Этот малый параметр действительно реален в отличие от $\tau v/l$. В настоящей работе будет построена точная модель, в которой уравнение для поля и выражения для коэффициентов $D_\text{т}$ и α получаются без разложений.

1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ОИТ

Следуя Крейчнану [6], используем лагранжево описание турбулентности. Решение уравнения индукции в идеально проводящей плазме известно:

$$B_i[X(a,\ t),\ t] = \partial X_i(a,\ t)/\partial a_j B_j(a,\ 0), \tag{1}$$

$X(a,\ t)$ — радиус-вектор жидкого элемента, если при $t = 0$ он находился в точке a. Пусть $p(X|a,\ t)$ — распределение вероятности для координаты X частицы, вышедшей из точки a при $t = 0$. Умножим (1) на $p(X|a,\ t)$ и проинтегрируем по da, тогда слева получим среднее значение $\overline{B_i(X)}$; если теперь умножить все выражение на $\exp(-ikX)$ и проинтегрировать по dX, то слева будем иметь $\overline{B_i(k)}$ — среднее от фурье-образа поля. Для определения правой части воспользуемся статистической независимостью векторов $B(\boldsymbol{a}, 0)$ и $\boldsymbol{X}$, а также однородностью турбулентности, т. е. считаем, что p есть функция только от $\xi = \boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}$ и t. Тогда получим тензор отклика $G_{ij}(\boldsymbol{k}, t)$:

$$\begin{gathered}\overline{B(\boldsymbol{k}, t)} = G_{ij}\overline{B(\boldsymbol{k}, 0)}, \\ G_{ij}(\boldsymbol{k}, t) = \overline{\partial X_i(\boldsymbol{a}, t)/\partial a_j \exp(-i\boldsymbol{k}\xi)}.\end{gathered} \tag{2}$$

Задача состоит в вычислении тензора $\hat{G}$. Крейчнан [6] использует разложение $\hat{G}$ в ряд по степеням $\boldsymbol{k}$. Фактически, это есть разложение по безразмерному малому параметру kl. Ввиду того, что $k = 2\pi/L$, этот параметр довольно мал. Мы же будем вычислять $\hat{G}$ в точном виде.

Для этого введем двухточечное распределение $p(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} | \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\delta\boldsymbol{a}, t)$— — пары жидких частиц $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, вышедших в момент $t = 0$ из точек $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\delta\boldsymbol{a}$. Удобно перейти к распределению векторов $\xi = \boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}$ и $\eta = \boldsymbol{Y}-(\boldsymbol{a}+\delta\boldsymbol{a}): p(\xi, \eta | \delta\boldsymbol{a})$. Тогда, очевидно,

$$G_{ij} = \lim_{\delta a \to 0} \int \frac{\eta_i - \xi_i + \delta a_i}{\delta a_j} p(\xi, \eta | \delta\boldsymbol{a}) \exp(-i\xi k)\, d\xi\, d\eta. \tag{3}$$

Выражение (3) содержит характеристическую функцию по параметру ξ (фурье-образ функции распределения координаты ξ). Поэтому удобно рассматривать характеристическую функцию двух координат:

$$p(\boldsymbol{k}, \varkappa | \delta\boldsymbol{a}) = \int p(\xi, \eta | \delta\boldsymbol{a}) \exp(-i\xi k - i\eta\varkappa)\, d\xi\, d\eta.$$

Последнюю выберем в форме

$$p = \exp[-gt(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\varkappa})^2 + b\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}], \tag{4}$$

g — константа, b — функция от $|\delta\boldsymbol{a}|$ и t. Эта характеристическая функция удовлетворяет следующим требованиям (см. [7]):

1) Из изотропии турбулентности следует, что p есть функция только от k, $\varkappa$, $|\delta\boldsymbol{a}|$, $\boldsymbol{k}\delta\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\varkappa}\delta\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}$ и t — этому удовлетворяет (4).

2) При $\delta\boldsymbol{a}\to 0$ должно выполняться $p(\xi, \eta | \delta\boldsymbol{a}) \to p(\xi)\delta(\xi-\eta)$ (в этом случае точки $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ совпадают). Потребуем, чтобы при $\delta\boldsymbol{a}\to 0$ b вело себя как $|\delta\boldsymbol{a}|^n$, $n > 1$, тогда это требование выполняется.

3) При интегрировании по η $p(\xi, \eta | \delta\boldsymbol{a})$ превращается в функцию $p(\xi)$, не зависящую от $\delta\boldsymbol{a}$ (и аналогично для интегрирования по ξ). Интегрированию по $\eta | \xi |$ соответствует в (4) $\boldsymbol{\varkappa} = 0$ ($\boldsymbol{k} = 0$). Ввиду независимости g от $\delta\boldsymbol{a}$ это требование удовлетворяется.

4) Интегрирование по ξ, η функции распределения $p(\xi, \eta | \delta\boldsymbol{a})$ дает единицу ($p(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\varkappa} | \delta\boldsymbol{a}) = 1$ при $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\varkappa} = 0$).

5) При $t\to\infty$ и $\delta\boldsymbol{a}\to\infty$ жидкие частицы ведут себя независимо, $p(\xi, \eta | \delta\boldsymbol{a}) \to p(\xi)p(\eta)$. Для этого потребуем, чтобы $b \to 2gt$ при $t\to\infty$ и $\delta\boldsymbol{a}\to\infty$. Именно по этой причине в (4) и введен коэффициент b.

6) При $t\to 0$ должно выполняться $p(\xi, \eta | \delta\boldsymbol{a}) \to \delta(\xi)\delta(\eta)$. Для этого потребуем, чтобы $b\to 0$ при $t\to 0$.

7) Замена $\xi\to\eta$ должна быть эквивалентна замене $\delta\boldsymbol{a} \to -\delta\boldsymbol{a}$. С другой стороны, замене $\xi\to\eta$ эквивалентна замена $\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{\varkappa}$ в (4). Симметрия (4) к этой перестановке и четность p по отношению к $\delta\boldsymbol{a}$ приводят к удовлетворению этого требования.

8) Функция распределения, согласно (4), имеет вид

$$\begin{gathered}p(\xi, \eta | \delta\boldsymbol{a}) = (2\pi)^{-3} b^{-3/2}(4gt-b)^{-3/2} \times \\ \times \exp\{-[gt(\xi^2+\eta^2) - (2gt-b)\xi\eta]\, b^{-1}(4gt-b)^{-1}\}.\end{gathered} \tag{5}$$

Она положительно определена и ограничена при $b > 0$, $4gt - b > 0$ (т. е. $g > 0$). Эти условия не противоречат вышеперечисленным требованиям, налагаемым на g и b.

2. ТЕНЗОР ОТКЛИКА ДЛЯ ОИТ

Переход к координатам ξ, $\eta - \xi$ (вместо ξ и η) эквивалентен переходу в (4) к переменным $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{K}, \boldsymbol{\varkappa}$. В них p записывается в виде $p = \exp[-gtK^2 + b(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{\varkappa})\boldsymbol{\varkappa}]$. Теперь (3) можно записать

$$G_{ij} = \lim_{\substack{\delta a \to 0 \\ \varkappa = 0}} \left\{ \delta_{ij} - \frac{1}{i\,\delta a_j} \frac{\partial}{\partial \varkappa_i} \right\} p(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\varkappa}). \tag{6}$$

Из требования 2) следует обращение в нуль второго члена в фигурной скобке (6). В результате имеем

$$\begin{gathered} G_{ij}(\boldsymbol{k}, t) = \delta_{ij} \exp(-gtk^2), \qquad \overline{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, t)} = \overline{\boldsymbol{B}(k, 0)} \exp(-gtk^2), \\ \partial \overline{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})}/\partial t = D_{\text{т}} \Delta \overline{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})}, \qquad D_{\text{т}} = g > 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Итак, в данной модели получается уравнение турбулентной диффузии магнитного поля с коэффициентом диффузии

$$D_{\text{т}} = \frac{1}{6} \frac{d}{dt} \overline{\xi^2}. \tag{8}$$

Напомним, что в кинематической постановке турбулентного динамо поле скоростей, его статистические характеристики считаются заданными. При этом, как правило, подразумевались статистические характеристики эйлерова поля. Известно, что даже самый простой процесс — с нормальным распределением вероятности эйлерова поля — не дает возможности получить коэффициент диффузии в конечном виде. Требуется дополнительное предположение, дающее возможность просуммировать диаграммы ряда теории возмущений (см. [2–4]). Здесь же задаются статистические характеристики лагранжева поля (4), (5), (7), которые могут быть получены экспериментально.

Полезно сопоставить поведение среднего поля по (7) с поведением усредненной скалярной примеси θ. Здесь уже мы будем иметь дело с функцией отклика

$$G(k, t) = \overline{\exp(-i\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{k})}$$

(вместо тензора (2)), и поэтому не будет необходимости вводить дополнительную координату $\boldsymbol{\eta}$, т. е. в (4) можно ограничиться случаем $\varkappa = 0$. Тогда $G = \exp(-gtk^2)$, иначе говоря, аналогично (7) имеет место турбулентная диффузия с коэффициентом диффузии $D_{\text{т}} = g$. Напомним, что задание статистических характеристик эйлерова поля до сих пор не привело к получению коэффициента диффузии скалярной примеси без привлечения малых параметров. Следует также подчеркнуть, что при $\varkappa = 0$ процесс (4) становится строго нормальным (поскольку g не зависит от $\delta\boldsymbol{a}$), но нормальным именно для лагранжевых характеристик. Это вовсе не означает, что эйлеровы характеристики при этом нормальны.

Вместе с тем модель (4) с использованием функции отклика G и с точным решением

$$\begin{gathered} \overline{\theta(\boldsymbol{x})} = \int \overline{G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t)} \, \overline{\theta(\boldsymbol{x}', 0)} \, d\boldsymbol{x}', \\ G(\boldsymbol{x}, t) = (4\pi gt)^{-3/2} \exp(-x^2/4gt) \end{gathered} \tag{9}$$

не имеет никакого физического содержания. Дело в том, что задание характеристической функции $p(\boldsymbol{k})$ по (4) (с $\varkappa=0$) эквивалентно заданию распределения вероятностей для смещения жидкой частицы ξ в форме, совпадающей с функцией Грина по (9). Иначе, совпадение функции отклика для $\overline{\theta}$ и функции Грина по (9) следует из самого определения скалярной примеси. Иное дело — поведение магнитного поля. Строго говоря, магнитное поле не ведет себя как скалярная примесь. Даже утверждение $D_{\text{т}}>0$ не следует из общих соображений и уравнений. Более того, в разд. 3 будет показано, что задание функции распределения, отличающейся от (4), но при $\varkappa=0$ совпадающей с ней (а именно случай $\varkappa=0$ и важен для скалярной примеси), приводит к генерации поля, — что совершенно не похоже на поведение $\overline{\theta}$. Таким образом, модель (4) физически содержательна для выяснения поведения магнитного поля (см. (7)) в ОИТ.

Отметим, что распределение (5) является нормальным только для лагранжевых координат ξ, η. Сюда также входит b-функция от $\delta\boldsymbol{a}$, так что $\delta\boldsymbol{a}$ не входит нормальным образом в распределение (5). Это обстоятельство оказывается важным для другого случайного процесса, введенного Крейчнаном [6] (в дальнейшем, процесс П): пусть турбулентность статистически независима, но обладает идентичным распределением вероятностей в последующие интервалы времени Δt, $t=N\Delta t$, N — целое число. Тогда полное распределение вероятности в момент t не является гауссовым даже по ξ и η, если на интервале Δt она совпадает с (5), именно потому, что $\delta\boldsymbol{a}$ входит в (5) сложным образом. Тем не менее, поведение магнитного поля в случае ОИТ для процесса П все равно подчиняется уравнению (7). Дело в том, что для этого случая

$$\hat{G}(t)=\hat{G}^{(N)}\,\hat{G}^{(N-1)},\ldots,\hat{G}^{(1)}; \tag{10}$$

$$G_{ij}(\boldsymbol{k},\ t)=\delta_{ij}\exp(-gtk^2). \tag{11}$$

Здесь $t=N\Delta t$, $\hat{G}^{(s)}$ — тензор отклика на s-м интервале, по определению совпадающий с (7), где вместо t надо подставить Δt. Представление (10) в виде произведения справедливо ввиду статистической независимости интервалов. Это выражение справедливо для распределения более общего, чем (5), и будет использовано в следующем разделе. Тензор же отклика в виде (11) имеет место только для ОИТ. Совпадение (11) и (7) для двух разных процессов объясняется тем, что, фактически, здесь используется не двухточечное распределение вероятностей для ξ и η, а одноточечное — для ξ. Но для этой координаты распределение является чисто гауссовым ((4) с $\varkappa=0$), и поэтому процесс П, будучи произведением гауссовых процессов, тоже является гауссовым.

3. ТЕНЗОР ОТКЛИКА ДЛЯ ОНИТ

Свойства отражательной инвариантности (гиротропности) турбулентности естественным образом вводятся в функцию распределения. Запишем характеристическую функцию в виде

$$p=\exp\{-gt(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\varkappa})^2+b\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}+\alpha[\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}]\,\delta\boldsymbol{a}\} \tag{12}$$

вместо (4). Естественно, α есть псевдоскаляр. Требования 2), 3), 4), 7) разд. 2 выполняются автоматически. Требование 1) модифицируется добавлением псевдоскаляра $[\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varkappa}]\,\delta\boldsymbol{a}$. Для удовлетворения 5) и 6) требуем, чтобы $\alpha\to 0$ при $t\to 0$, а при $t\to\infty$ α росло медленнее, чем t; при $\delta\boldsymbol{a}\to\infty$ $\alpha\sim|\delta\boldsymbol{a}|^{-2}$. Что касается ограниченности и положительной определенности функции распределения (требование 8)), то это выполняется при $b > 0$, $4gt - b > 0$, $|\alpha| < [b(4gt-b)/|\delta \boldsymbol{a}|]^{1/2}$, что не противоречит вышеперечисленным требованиям.

Для вычисления тензора отклика отметим, что второй член в фигурной скобке (6) теперь уже не обращается в нуль. Для получения результата перейдем к переменным $\boldsymbol{k}$, $\varkappa$. Вычисляя по (6), получим

$$G_{ij}(\boldsymbol{k}, t) = e^{-gtk^2}(\delta_{ij} + \alpha i \varepsilon_{ijf} k_f). \tag{13}$$

Решение (13) не есть динамо-решение. Действительно, при $t \to \infty$ α растет медленнее, чем t (если вообще растет). Поэтому $\boldsymbol{B}(t) = \hat{G}\boldsymbol{B}(0) \to 0$ при $t \to \infty$. Для нахождения растущего решения обратимся к процессу П с распределением вероятности (12) на каждом временном интервале Δt.

Теперь тензор отклика (13) справедлив только на интервале Δt, так что вместо t в него следует подставить Δt, а под α будем подразумевать его значение в конце интервала, т. е. $\alpha = \alpha(\Delta t)$. Тогда согласно (10) с одинаковыми $\hat{G}^{(s)}$, определяемыми выражением (13), имеем

$$G_{ij}(\boldsymbol{k}, t) = e^{-gN\Delta t k^2}\left\{\delta_{ij}\sum_{n=0}^{N'} C_{2n}^N(\alpha k)^{2n} + \alpha i \varepsilon_{ijf} k_f \sum_{n=1}^{N''} C_{2n-1}^N(\alpha k)^{2n-2}\right\}. \tag{14}$$

Здесь C_m^N — биномиальные коэффициенты, $N' = N'' = N/2$, если N — четное, и $N' = (N-1)/2$, $N'' = (N+1)/2$, если N — нечетное. Заметив, что две суммы в фигурных скобках (14) совпадают с четной (первая сумма) и нечетной (вторая сумма, умноженная на αk) составляющими функции $(1+\alpha k)^N$ от аргумента αk, получим

$$\sum_{n=0}^{N'} C_{2n}^N(\alpha k)^{2n} = \frac{(1+\alpha k)^N + (1-\alpha k)^N}{2} = \frac{\exp[N\ln(1+\alpha k)] + \exp[N\ln(1-\alpha k)]}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{N''} C_{2n-1}^N(\alpha k)^{2n-2} = \frac{(1+\alpha k)^N - (1-\alpha k)^N}{2\alpha k} = \frac{\exp[N\ln(1+\alpha k)] - \exp[N\ln(1-\alpha k)]}{2\alpha k}.$$

Заменяя N на $t/\Delta t$, получим окончательно

$$\begin{gathered} G_{ij}(\boldsymbol{k}, t) = \frac{1}{2} e^{-gtk^2}\{\delta_{ij}(e^+ + e^-) + i\varepsilon_{ijf}k_f k^{-1}(e^+ - e^-)\}, \\ e^+ = \exp\left[\frac{t}{\Delta t}\ln(1+\alpha k)\right], \qquad e^- = \exp\left[\frac{t}{\Delta t}\ln(1-\alpha k)\right]. \end{gathered} \tag{15}$$

Величина $\alpha k \ll 1$, поскольку α имеет размерность длины и, во всяком случае, не больше корреляционной длины l, а $lk \ll 1$. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Величина $e^+ + e^-$ есть истинный скаляр, а $e^+ - e^-$ — псевдоскаляр. Дело в том, что разложение величины $e^+ + e^-$ по αk содержит лишь четные степени α, а разложение $e^+ - e^-$ — нечетные, а α^{2n} есть скаляр, в то время как $\alpha^{2n+1} = \alpha^{2n}\alpha$ есть псевдоскаляр. Поэтому выражение в фигурных скобках представляет из себя сумму двух истинных тензоров, как и должно быть по правилам размерностей. Для сравнения с результатами Крейчнана [6] разложим $\ln(1 \pm \alpha k)$ до второго порядка по степеням k: в [6] с самого начала используется разложение по k, не выше второго порядка. Тогда получим

$$G_{ij}(\boldsymbol{k}, t) = \exp\left[-\left(g + \frac{\alpha^2}{2\Delta t}\right) tk^2\right] \times \\ \times \left(\delta_{ij}\operatorname{ch}\alpha k \frac{t}{\Delta t} + i\varepsilon_{ijf}k_f \frac{k_f}{k}\operatorname{sh}\alpha k\frac{t}{\Delta t}\right). \tag{16}$$

Это решение, полученное ранее в [2], соответствует уравнению генерации

$$\partial\boldsymbol{B}/\partial t = -i\frac{\alpha}{\Delta t}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}] - D'_{\text{т}}k^2\boldsymbol{B},$$

$$D'_{\text{т}} = g + \alpha^2/2\Delta t$$

и соответствует результатам [6]. Для сравнения коэффициентов генерации и диффузии, найденных в [6], отметим, что для модели (12) имеем

$$\overline{\xi^2} = \overline{\xi_i\xi_j\partial X_i/\partial a_j} = 3\overline{\xi_3^2\partial X_3/\partial a_3},$$
$$\overline{\xi_f\partial X_i/\partial a_j} = -\alpha\varepsilon_{ijf}, \quad \alpha = -\frac{1}{6}\varepsilon_{ijf}\overline{\xi_f\partial X_i/\partial a_j}, \tag{17}$$
$$\overline{\xi_3\partial X_2/\partial a_1} = \alpha.$$

Следовательно,

$$\alpha/\Delta t = \overline{\xi_3\partial X_2/\partial a_1}/\Delta t,$$
$$D'_{\text{т}} = \frac{1}{2\Delta t}\left\{\overline{\xi_3^2\partial X_3/\partial a_3} + (\overline{\xi_3\partial X_2/\partial a_1})^2\right\} \tag{18}$$

в полном соответствии с [6]. Точное решение (15), так же как его приближенный вид (16), полученный Крейчнаном при учете квадратичных по k членов, имеет экспоненциально растущий характер при $|\alpha|\, k > gk^2$, т. е. является динамо-решением.

Интересно отметить, что коэффициент турбулентной диффузии $D'_{\text{т}}$ зависит уже от гиротропных характеристик турбулентности, т. е. от α, в то время как для марковской модели этой зависимости нет [2]. При отказе от строго марковской модели в следующем приближении по Кляцкину — Татарскому [4] $D'_{\text{т}}$ тоже начинает зависеть от α. К сожалению, непосредственное сравнение коэффициентов (18) с полученными в [4] и, как можно надеяться, хорошо описывающими реальную турбулентность, получить весьма трудно. Дело в том, что коэффициенты (18) вычислены для лагранжевых характеристик турбулентности, а в [4] — для эйлеровых. Переход же от лагранжевых к эйлеровым характеристикам и наоборот осуществляется в виде громоздких бесконечных рядов [8].

Процесс П допускает предельный переход к марковскому при $\Delta t \to 0$, т. е. $N \to \infty$. В этом случае должна исчезнуть зависимость коэффициента диффузии от α. Так действительно получается. Для того, чтобы убедиться в этом, напомним, что под α в (18) подразумевается значение коэффициента α в модели (12) в момент $t = \Delta t$, т. е. $\alpha(\Delta t)$. Поэтому коэффициент генерации $\alpha(\Delta t)/\Delta t \to \alpha'$ при $\Delta t \to 0$, α' — производная функции $\alpha(\Delta t)$ в нуле (само же значение α в нуле есть нуль, см. выше). Поэтому при малых Δt $\alpha = \alpha'\Delta t$ и $\overline{\xi_3\partial X_2/\partial a_1} = \alpha'\Delta t$, и первый коэффициент в (18) есть α'. В то же время $\overline{(\xi_3 \partial X_2/\partial a_1)^2}/\Delta t = (\alpha')^2 \Delta t$, и эта величина, дающая вклад в $D'_т$ в (18), стремится к нулю при $\Delta t \to 0$. Что касается $\frac{1}{2}\overline{\xi_3^2 \partial X_3/\partial a_3}/\Delta t = \frac{1}{2}\overline{\xi_3^2}/\Delta t$, то эта величина, как известно, есть конечная величина в марковской модели при $\Delta t \to 0$ и представляет собой коэффициент диффузии.

Итак, при наличии ОИТ коэффициент диффузии положителен, что следует из требования положительной определенности и конечности функции распределения вероятностей (5). Это означает, что генерация поля при наличии ОИТ невозможна. Отметим, что результат (8) — выражение для коэффициента турбулентной диффузии — может быть получен и в более общей, чем (4), модели. Дело в том, что в конечный результат входит только g, зависимость от b отсутствует. Обращаясь к (6), видим, что точно такой же результат получится, если характеристическая функция $p(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\varkappa})$ и функция распределения — четные функции от $\delta \boldsymbol{a}$, т. е. все величины типа $\boldsymbol{\varkappa}\delta\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{k}\delta\boldsymbol{a}$ входят, по меньшей мере, квадратично по $\delta\boldsymbol{a}$. Предположение о инвариантности функции распределения при замене $\delta\boldsymbol{a}$ на $-\delta\boldsymbol{a}$ кажется вполне правдоподобным. Это свойство касалось двухточечной функции распределения. Что касается одноточечной, то она должна быть гауссовой, тогда получится результат (8). Это предположение находится в хорошем согласии с экспериментальными данными [9].

Генерация поля получается только для ОНИТ в модели процесса П, причем гиротропность изменяет коэффициент диффузии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Steenbeck M., Krause F., Radler H.-K. — Z. Naturforsch., 1966, **22a**, S. 369.
2. Вайнштейн С. И. — ЖЭТФ, 1970, **58**, с. 153.
3. Вайнштейн С. И. — ЖЭТФ, 1972, **62**, с. 1376.
4. Вайнштейн С. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 12, с. 1803.
5. Кляцкин В. И., Татарский В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1972, **15**, № 10, с. 1433.
6. Kraichnan R. H. — Phys. Rev. Lett., 1979, **42**, № 25, p. 1677.
7. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. — М.: Наука, 1967. — § 24.2.
8. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. — М.: Наука, 1965. — № 9.5.
9. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. — М.: Наука, 1965. — § 9.3.

Сибирский институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн СО АН СССР

Поступила в редакцию 24 декабря 1979 г.

AN ACCURATE NON MARKOV MODEL OF A TURBULENT DYNAMO

S. I. Vainshtein

A statistical model has been found for which the coefficients of turbulent diffusion and generation of the magnetic field are calculated in an accurate form, the model being non Markov one. The model is built on the given distribution function of Lagrange turbulence characteristics. Field occur only in the presence of a reflection noninvariance (gyrotropy) of the distribution function. A distribution function has been found with gyrotropic properties which gives an accurate exponential growing solution. The coefficient of the turbulent diffusion depends on the gyrotropy degree in this model.