

УДК 537.533 : 621 384 64

МЕДЛЕННЫЕ ЦИКЛОТРОННЫЕ ВОЛНЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ТРУБЧАТЫХ ПУЧКАХ

М. И. Капчинский, Л. А. Юдин

Рассмотрены медленные циклотронные волны, распространяющиеся в электронном трубчатом пучке, движущемся вдоль оси идеально проводящего гладкого волновода. Получено и решено дисперсионное уравнение собственных волн такого пучка, аналитически найдена структура поля волны, определены спектральные характеристики. Показано, что для целей коллективного ускорения ионов трубчатые пучки имеют преимущество перед сплошными: ускоряющее поле у них более однородно в пространстве, а требования на узкополосность системы возбуждения — мягче.

В последнее время интенсивно развиваются теория и техника коллективного ускорения ионов — единственной альтернативы традиционным методам ускорения. Основными направлениями этого развития являются ускорение ионов с помощью электронных колец, ускорение ионов при прохождении электронного пучка через нейтральный газ и авторезонансное ускорение ионов в собственной циклотронной волне прямого электронного пучка. Последний метод [1] наиболее близок традиционным методам ускорения. Электронный пучок во внешнем продольном магнитном поле обеспечивает генерацию и распространение циклотронной волны, бегущей по пучку с фазовой скоростью, меньшей скорости пучка (медленная волна). Величина фазовой скорости регулируется внешним магнитным полем. Подобрал соответствующий закон пространственного изменения магнитного поля, можно в течение достаточно длительного времени поддерживать синхронизм ионов с ускоряющей их волной. Поскольку медленные волны являются волнами с отрицательной энергией, амплитуда ускоряющей циклотронной волны возрастает в процессе передачи энергии ионам, увеличивая темп ускорения. Численное моделирование резонанса между циклотронной модой неограниченного электронного пучка и плазменной модой ионного пучка выполнено в [2, 3], при этом учитывался нелинейный характер волны.

Мы рассмотрим здесь собственные моды электронного трубчатого пучка, распространяющегося в продольном магнитном поле H_0 . Аналогичное исследование для сплошного пучка цилиндрической геометрии в ультрарелятивистском пределе проведено в работе [4], с выводами которой мы будем постоянно сравнивать наши результаты. Необходимость специального изучения трубчатых пучков вызвана тем, что при той же энергии они могут переносить значительно больший ток, чем сплошные пучки [5]; как мы далее покажем, для целей коллективного ускорения ионов трубчатые пучки также оказываются полезнее сплошных.

Ограничимся исследованием только малых (линейных) колебаний; плотность электронов в невозмущенном пучке будем считать не зависящей от радиуса. Плазменная частота ω_p в тонком пучке связана с током I соотношением

$$\omega_p^2 = \frac{2c^2}{a\delta} \frac{J}{J_A}, \quad (1)$$

где a — внутренний радиус, δ — толщина пучка, $J_A = \beta\gamma m_0 c^3/e$, β — относительная скорость пучка, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, m_0 и e — масса покоя и заряд электрона.

Как и в [4], будем считать, что пучок в равновесном состоянии во внешнем магнитном поле не вращается, и пренебрежем такими эффектами пространственного заряда, как провисание потенциала, диамагнетизм пучка, вращение пучка под действием собственных полей. Для возможности этого приближения уравнения равновесного состояния пучка [6] дают следующие ограничения на ток:

$$\frac{J}{J_A} \ll \frac{a}{\delta}, \quad \frac{J}{J_A} \ll \gamma \frac{\Omega a}{c}, \quad \frac{J}{J_A} \ll \gamma^2 \left(\frac{\Omega a}{c} \right)^2, \quad (2)$$

где $\Omega = eH_0/m_0 \gamma c$ — циклотронная частота во внешнем магнитном поле H_0 .

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

В отличие от [4], где пучок считался движущейся гиротропной сплошной средой, описываемой уравнениями Максвелла без источников и материальными уравнениями Минковского с тензором $\overset{\wedge}{\epsilon}$, будем здесь исходить из гидродинамического описания пучка. Полная система уравнений включает в себя уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (3)$$

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (4)$$

и уравнение движения

$$\frac{\partial(\gamma\beta)}{\partial t} + c(\beta \nabla)(\gamma\beta) = \frac{e}{m_0 c} \{ \mathbf{E} + [\beta \mathbf{B}] \}, \quad (5)$$

причем плотность тока \mathbf{j} связана с плотностью заряда ρ равенством

$$\mathbf{j} = \rho \beta c. \quad (6)$$

Заменим теперь все величины в уравнениях (3)—(6) суммой их равновесных значений и возмущений, считая, что в равновесном состоянии электроны имеют только продольную компоненту скорости βc . Решение для возмущений ищем в виде волны, бегущей по пучку, т. е. зависимость от времени t , продольной координаты z и азимута θ имеет вид $\sim \exp[-i(\omega t - hz - n\theta)]$. Линеаризуя (3)—(6) по возмущениям и выражая все величины через продольные составляющие электрического E_z и магнитного B_z поля волны, найдем уравнения для этих компонент:

$$\begin{aligned} c^2 \Delta_{\perp} E_z - (\Lambda^2 c^2 + \varphi_1 \Delta h^2) S E_z + i \varphi_1 \Omega \Delta h B_z &= 0, \\ c^2 \Delta_{\perp} B_z - (\Lambda^2 c^2 + \varphi_1 \Delta \omega^2 S) B_z - i \varphi_1 \Omega \Delta h S E_z &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}$ — поперечная часть оператора Лапласа в цилиндрических координатах, $\Delta \omega = \omega - h \beta c$, $\Delta h = hc - \omega \beta$,

$S = 1 - \omega_p^2/\gamma^2\Delta\omega^2$, $\varphi_1 = \omega_p^2/(S\Delta\omega^2 - \Omega^2)$, $\Lambda^2 c^2 = h^2 c^2 - \omega^2$. Заметим, что в медленной волне $\Delta\omega < 0$, $\Delta h > 0$, $\Lambda^2 > 0$. Учитывая, что в обозначениях [4] $\varepsilon_{\parallel} = 1 - \omega_p^2/\gamma^2\Delta\omega^2 = S$, $\varepsilon_{\perp} = 1 - \omega_p^2/\gamma^2(\Delta\omega^2 - \Omega^2) = (1 + \varphi_1/\gamma^2)^{-1}$, $g = \omega_p^2 \Omega/\gamma^2 \Delta\omega (\Delta\omega^2 - \Omega^2) = \varphi_1 \Omega/\gamma^2 \Delta\omega (1 + \varphi_1/\gamma^2)$, можно убедиться, что наши уравнения (7) идентичны уравнениям (7) из [4]. Остается без изменения и разделение возможных типов колебаний в пучке на электромагнитные или волноводные ($\omega^2/c^2 \approx h^2 + x^2$), плазменные ($\omega \approx h\beta c \pm \omega_p/\gamma$) и циклотронные ($\omega \approx h\beta c \pm \Omega$).

Считая, что собственное значение оператора Δ_{\perp} равно $-x^2$, найдем из (7)

$$c^2 x_{1,2}^2 = -c^2 \Lambda^2 - \omega_p^2 - \frac{\omega_p^2 \Omega^2 (\Delta h^2 + \Delta\omega^2)}{2\Delta\omega^2 (S\Delta\omega^2 - \Omega^2)} \times \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Delta h^2 \Delta\omega^2 (S\Delta\omega^2 - \Omega^2)}{\Omega^2 (\Delta h^2 + \Delta\omega^2)}} \right\}. \quad (8)$$

В пределе больших энергий пучка ($\beta \rightarrow 1$, $\gamma \rightarrow \infty$) и малых токов ($S \rightarrow 1$) формула (8) для поперечного волнового числа x упрощается:

$$c^2 x_{1,2}^2 = -c^2 \Lambda^2 - \frac{\omega_p^2 \Delta\omega}{\Delta\omega \pm |\Omega|}. \quad (9)$$

Из уравнений (7) видно, что в циклотронной волне отличны от нуля одновременно E_z и B_z , т. е. эти волны гибридные и их нельзя разделить на электрические и магнитные.

Для целей коллективного ускорения подходят только азимутально-симметричные волны ($s/n = 0$), а несимметричные являются паразитными (в несимметричных волнах ионы в процессе бетатронных колебаний пересекали бы области с различными знаками поля E_z и, в среднем, не набирали бы энергии), поэтому основное изложение далее будет посвящено симметричным модам; относительно несимметричных мод ограничимся замечанием в конце работы.

Цилиндрическая геометрия задачи позволяет искать решение системы (7) в виде

$$E_z = T_0(x_1 r) + f T_0(x_2 r), \quad B_z = i [\alpha_1 T_0(x_1 r) - f \alpha_2 T_0(x_2 r)]. \quad (10)$$

Здесь f — коэффициент, подлежащий определению; $T_n(x_1 r)$, $T_n(x_2 r)$ — собственные функции оператора Δ_{\perp} , соответствующие азимутальному волновому числу n . Как всякие цилиндрические функции, они выражаются через линейные комбинации функций Бесселя и Неймана:

$$T_n(x_i r) = p_i J_n(x_i r) + q_i N_n(x_i r) \quad (i = 1, 2). \quad (11)$$

Множители α_1 и α_2 даются формулами

$$\alpha_{1,2} = \mp \frac{\Lambda^2 c^2 \Omega}{2\Delta\omega^2 \Delta h \gamma^2} + \frac{\Omega}{|\Omega|} \sqrt{S + \frac{\Lambda^4 c^4 \Omega^2}{4\Delta h^2 \Delta\omega^4 \gamma^4}}. \quad (12)$$

Заметим, что $\alpha_1 \alpha_2 = S$. Поперечные компоненты полей имеют вид

$$E_r = \frac{ic}{\Delta h} \left(1 - \frac{\omega\Delta\omega}{c^2 x_1^2} S \right) x_1 T_1(x_1 r) + f \frac{ic}{\Delta h} \left(1 - \frac{\omega\Delta\omega}{c^2 x_2^2} S \right) x_2 T_1(x_2 r),$$

$$E_{\theta} = -\frac{\omega\alpha_1}{c x_1} T_1(x_1 r) + f \frac{\omega\alpha_2}{c x_2} T_1(x_2 r), \quad (13)$$

$$B_r = \frac{\hbar \sigma_1}{x_1} T_1(x_1 r) - f \frac{\hbar \alpha_2}{x_2} T_1(x_2 r),$$

$$B_\theta = \frac{ic}{\Delta h} \left(\beta - \frac{\hbar \Delta \omega}{c x_1^2} S \right) x_1 T_1(x_1 r) + f \frac{ic}{\Delta h} \left(\beta - \frac{\hbar \Delta \omega}{c x_2^2} S \right) x_2 T_1(x_2 r).$$

Возмущения поперечных составляющих плотности тока и скоростей частиц

$$\begin{aligned} j_r &= 4\pi \rho_0 v_r = \varphi [i \Delta \omega (E_r - \beta B_\theta) - \Omega (E_\theta + \beta B_r)], \\ j_\theta &= 4\pi \rho_0 v_\theta = \varphi [\Omega (E_r - \beta B_\theta) + i \Delta \omega (E_\theta + \beta B_r)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь ρ_0 — равновесная плотность электронов в пучке, $\rho_0 = m_0 \gamma \omega_p^2 / 4\pi e$, $\varphi = \omega_p^2 / (\Delta \omega^2 - \Omega^2)$, v_r , v_θ — возмущения скоростей.

Для получения дисперсионного уравнения необходимо записать условия сшивки полей на внутренней и внешней границах пучка. Внутренние поля равны: $E_z = A^{(i)} I_0(\Lambda r)$, $B_z = A^{(i)} q^{(i)} I_0(\Lambda r)$, где $A^{(i)}$, $q^{(i)}$ — некоторые коэффициенты. Если стенка трубы, в которой распространяется пучок, расположена достаточно далеко от пучка, то ее влияние на поля в трубе экспоненциально мало и им можно вообще пренебречь. Практически для этого достаточно $\Lambda(R_{\text{тр}} - b) > 2$, где $R_{\text{тр}}$ — радиус трубы, $b = a + \delta$ — внешний радиус пучка. Такое пренебрежение существенно упрощает выкладки, сохраняя в то же время основные черты всех процессов. Тогда поля вне пучка имеют вид $E_z = A^{(e)} K_0(\Lambda r)$, $B_z = A^{(e)} q^{(e)} K_0(\Lambda r)$. Здесь I , K — модифицированные функции Бесселя и Ганкеля.

При сшивке полей на границах пучка нужно, как и в [7], учесть, что геометрические смещения пучка Δr , соответствующие его отклонению от равновесного состояния, в линейном приближении эквивалентны появлению на границах равновесного пучка $r = a$ и $r = b$ поверхностных зарядов σ и продольного поверхностного тока $\sigma \beta c$ (остальные компоненты поверхностного тока в линейном приближении равны нулю, так как равновесная скорость имеет только продольную составляющую). Поэтому на границах пучка компоненты E_z , B_z , E_θ и B_r непрерывны, а E_r и B_θ терпят разрыв. Выразив поверхностную плотность заряда σ непосредственно через E_z и B_z , напомним четыре граничных условия — два на внешней границе пучка и два на внутренней:

$$\begin{aligned} &K_1(\Lambda b) T_0(x_1 b) + \frac{\Lambda S}{x_1} K_0(\Lambda b) T_1(x_1 b) = \\ &= -f \left[K_1(\Lambda b) T_0(x_2 b) + \frac{\Lambda S}{x_2} K_0(\Lambda b) T_1(x_2 b) \right], \\ &K_1(\Lambda b) T_0(x_1 b) + \frac{\Lambda}{x_1} K_0(\Lambda b) T_1(x_1 b) = \\ &= f \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left[K_1(\Lambda b) T_0(x_2 b) + \frac{\Lambda}{x_2} K_0(\Lambda b) T_1(x_2 b) \right], \\ &I_1(\Lambda a) T_0(x_1 a) - \frac{\Lambda S}{x_1} I_0(\Lambda a) T_1(x_1 a) = \\ &= -f \left[I_1(\Lambda a) T_0(x_2 a) - \frac{\Lambda S}{x_2} I_0(\Lambda a) T_1(x_2 a) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$I_1(\Lambda a) T_0(x_1 a) - \frac{\Lambda}{x_1} I_0(\Lambda a) T_1(x_1 a) = \\ = f \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left[I_1(\Lambda a) T_0(x_2 a) - \frac{\Lambda}{x_2} I_0(\Lambda a) T_1(x_2 a) \right].$$

Получили однородную систему из четырех уравнений для четырех неизвестных: $p_1, q_1, f p_2, f q_2$. Для решения этой системы положим сначала $S = 1$, а потом будем искать поправки к полученному решению в виде ряда по степеням $1 - S$. Параметр $1 - S = \frac{\omega_p^2}{\gamma^2 \Delta \omega^2} \approx \approx \frac{2J}{J_A} \left(\frac{c}{\gamma \Omega a} \right)^2 \frac{a}{\delta}$ является мерой замагниченности пучка и в практически интересных случаях действительно мал. Условия, при которых процедура вычисления поправок по $1 - S$ обоснована, будут выведены ниже.

При $S = 1$ из системы (15) следует $f = 0$ (так как $\alpha_2/\alpha_1 = 1/\alpha_1^2 \neq \neq -1$) и от всей системы (15) остается два уравнения — равенство нулю левых частей второго и четвертого уравнений. Условие их совместности и будет искомым дисперсионным уравнением:

$$\frac{K_1(\Lambda b) J_0(x b) + (\Lambda/x) K_0(\Lambda b) J_1(x b)}{K_1(\Lambda b) N_0(x b) + (\Lambda/x) K_0(\Lambda b) N_1(x b)} = \\ = \frac{I_1(\Lambda a) J_0(x a) - (\Lambda/x) I_0(\Lambda a) J_1(x a)}{I_1(\Lambda a) N_0(x a) - (\Lambda/x) I_0(\Lambda a) N_1(x a)}. \quad (16)$$

Здесь и далее под x без индекса понимается x_1 .

Заметим, что (16) не имеет решений при мнимых x , т. е. должно быть $x^2 > 0$. Между тем, далее будет показано, что x_2^2 всегда отрицательно, а x_1^2 может быть положительно в узком диапазоне параметров волны. Поэтому мы и положим выше $f = 0$ (а не $1/f = 0$, при котором система (15) также совместна) и рассматриваем уравнение (16) относительно x_1 . Положительность x_1^2 достигается только при $\Delta \omega^2 \approx \approx \Omega^2/S \approx \Omega^2$, и так как в медленных волнах $\Delta \omega < 0$, то $\Delta \omega \approx -|\Omega|$. Рассматривая волны с малой фазовой скоростью ($\beta_\phi = \omega/hc \ll \beta$), найдем

$$\Lambda c \approx hc \approx -\frac{\Delta \omega}{\beta} \approx \frac{|\Omega|}{\beta}, \quad (17)$$

т. е. Λ в таких волнах является параметром, зависящим от внешних условий и равновесных характеристик пучка и не зависящим от характеристик волны. Определив, таким образом, из (16) x как функцию $\Lambda \approx |\Omega|/\beta c$, по формулам (10) — (13) найдем радиальную зависимость поля симметричной сильно замедленной циклотронной волны.

РЕШЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ. СТРУКТУРА ПОЛЯ МЕДЛЕННОЙ ЦИКЛОТРОННОЙ ВОЛНЫ

Положив в дисперсионном уравнении (16) $a = 0$, получим уравнение для сплошного пучка в пустом пространстве [4]. Рассматривая правую часть (16) в пределе $a \rightarrow 0$, найдем, что ее разложение в ряд Тейлора начинается с члена $\sim a^4$, т. е. решения для «почти сплошного» пучка очень слабо отличаются от решений, полученных в [4]. Поэтому основное внимание будет далее уделено тонкому трубчатому пучку: $\delta = b - a \ll a$.

Исследование показывает, что при $\delta \ll a$ уравнение (16) имеет решения только в области $x \gg 1/a$. Для поиска таких решений представим функции Бесселя и Неймана в асимптотическом виде, удерживая один член разложения. Учет следующих членов даст поправку порядка δ/a . Дисперсионное уравнение принимает вид

$$x\delta = \pi m - \operatorname{arctg} \frac{x}{\Lambda} \frac{I_1(\Lambda a)}{I_0(\Lambda a)} - \operatorname{arctg} \frac{x}{\Lambda} \frac{K_1(\Lambda b)}{K_0(\Lambda b)}. \quad (18)$$

Здесь $m \geq 1$. При каждом m (18) имеет только одно решение, поэтому найденные поперечные волновые числа и поля можно будет занумеровать тем числом m , которому они соответствуют. Номер m естественно назвать радиальным волновым числом.

Пусть амплитуда поля E_z на оси равна A . Тогда

$$E_z(r < a) = AI_0(\Lambda r). \quad (19)$$

В пучке, при $a < r < b$, в асимптотическом приближении

$$E_z(r) = -A \frac{x}{\Lambda} \sqrt{\frac{a}{r}} \sqrt{I_1^2(\Lambda a) + \frac{\Lambda^2}{x^2} I_0^2(\Lambda a)} \times \\ \times \sin \left[x(r-a) - \operatorname{arctg} \frac{\Lambda}{x} \frac{I_0(\Lambda a)}{I_1(\Lambda a)} \right]. \quad (20)$$

Вне пучка —

$$E_z(r > b) = A(-1)^m \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{I_1^2(\Lambda a) + (\Lambda^2/x^2) I_0^2(\Lambda a)}{K_1^2(\Lambda b) + (\Lambda^2/x^2) K_0^2(\Lambda b)}} K_0(\Lambda r). \quad (21)$$

В общем случае дисперсионное уравнение (18) приходится решать численно. Однако в некоторых предельных случаях его можно еще упростить. Для $m = 1$ эти случаи следующие:

$$1) \Lambda \delta \gg 1: \quad x \approx \frac{\pi}{\delta} \left(1 - \frac{2}{\Lambda \delta} \right) \ll \Lambda; \quad (22)$$

$$2) \Lambda \delta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1: \quad x \approx \Lambda + \frac{\varepsilon}{\delta(\pi/2 + 1)}; \quad (23)$$

$$3) \sqrt{\Lambda \delta} \ll 1: \quad x \approx \frac{1}{\sqrt{a\delta}} \frac{1}{\sqrt{I_1(\Lambda a) K_1(\Lambda b)}}. \quad (24)$$

Что касается решений (18) для $m > 1$, то уже при $m = 2$ будет $x > \pi/\delta$ и для не очень больших Λ ($\Lambda \delta \leq 1$) выполнено $x \gg \Lambda$, так что

$$x(m) \approx \frac{\pi(m-1)}{\delta} + \frac{\Lambda}{\pi(m-1)} \left[\frac{I_0(\Lambda a)}{I_1(\Lambda a)} + \frac{K_0(\Lambda b)}{K_1(\Lambda b)} \right]. \quad (25)$$

Видно, что чем больше отношение a/δ , тем точнее становится приближение $xa \gg 1$.

Обсудим полученные результаты. Из формулы (20) следует, что

$$\frac{\partial E_z}{\partial r}(r = a+0) = -A \frac{x^2}{\Lambda} I_1(\Lambda a) < 0, \quad (26)$$

т. е. достигнув на внутренней границе пучка максимума, E_z начинает убывать. Этот локальный максимум поля равен $E_z(r = a) = AI_0(\Lambda a)$.

Кроме того, видно, что в области, занятой пучком, E_z изменяет знак m раз. Первый такой нуль будет в точке

$$r^* = a + \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{\Lambda}{x} \frac{I_0(\Lambda a)}{I_1(\Lambda a)}. \quad (27)$$

Формула (20) позволяет ответить на вопрос о характере колебаний границ пучка. Геометрическое смещение частиц пучка Δr , как и возмущение их радиальной скорости u_r , пропорционально $\partial E_z / \partial r$. При $m = 1, 3, 5, \dots$ производная поля E_z имеет одинаковые знаки на обоих краях пучка, поэтому радиальные скорости там направлены в одну сторону и обе границы колеблются синфазно, т. е. деформация стенки пучка носит характер изгиба. При $m = 2, 4, 6, \dots$ границы колеблются в противофазе, т. е. стенка пучка «дышит».

Из формул (13) видно, что основная часть энергии в сильно замедленных ($\omega \ll h\beta c$) волнах заключена в колебаниях поперечных компонент полей E_r и B_θ . Вычислив из (14) возмущения радиальной и азимутальной скоростей, найдем, что они равны по амплитуде и сдвинуты по фазе на $\pi/2$, т. е. движение частиц в волне обладает круговой поляризацией. Направление поляризации определяется направлением магнитного поля. Положительный знак Ω соответствует левой поляризации.

Учтем отличие S от единицы. Приравнивая к нулю определитель системы (15), найдем поправку к дисперсионному уравнению (18) в первом порядке малости по $1-S$. При $x \gg \Lambda$ решение дисперсионного уравнения для $m = 1$ имеет вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{a\delta}} \frac{1}{\sqrt{I_1(\Lambda a)K_1(\Lambda b)}} \left[1 - \frac{1-S}{1+\beta^2} \frac{1}{2\Lambda\sqrt{a\delta}} \frac{1}{\sqrt{I_1(\Lambda a)K_1(\Lambda b)}} \right]. \quad (28)$$

Условие законности этой процедуры приближения

$$1-S \ll \Lambda\sqrt{a\delta} \sqrt{I_1(\Lambda a)K_1(\Lambda b)}$$

или

$$\frac{J}{J_A} \ll \frac{\gamma^2}{\beta} \left(\frac{\Omega a}{c} \right)^3 \left(\frac{\delta}{a} \right)^{3/2} \sqrt{I_1(\Lambda a)K_1(\Lambda b)}, \quad (29)$$

что является более сильным ограничением, чем

$$1-S \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{J}{J_A} \ll \gamma^2 \left(\frac{\Omega a}{c} \right)^2 \frac{\delta}{a}. \quad (30)$$

ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕДЛЕННЫХ ЦИКЛОТРОННЫХ ВОЛН. КВАЗИНЕПРЕРЫВНОСТЬ СПЕКТРА

Формула (8), определяющая поперечные волновые числа, для положительности и большой ($\gg 1/a^2$) величины хотя бы одного из x^2 требует, чтобы $|S\Delta\omega^2 - \Omega^2|$ было малым ($\ll \Omega^2$). Раскладывая квадратный корень в ряд по малой величине $(S\Delta\omega^2 - \Omega^2)/\Omega^2$, найдем

$$c^2 x_1^2 \approx -c^2 \Lambda^2 - \omega_p^2 \frac{2\Delta h^2 + \Delta\omega^2}{\Delta h^2 + \Delta\omega^2} - \frac{\omega_p^2 \Omega (\Delta h^2 + \Delta\omega^2)}{\Delta\omega^2 (S\Delta\omega^2 - \Omega^2)}, \quad (31)$$

$$c^2 x_2^2 \approx -c^2 \Lambda^2 - \omega_p^2 \frac{\Delta\omega^2}{\Delta h^2 + \Delta\omega^2}.$$

В том же приближении

$$a_1 \approx \Omega/\Delta h \approx \beta\sqrt{S}, \quad a_2 \approx \Omega\Delta h/\Delta\omega^2 \approx \sqrt{S}/\beta. \quad (32)$$

Из (31) в сильно замедленных волнах определим $\Delta\omega$:

$$-\Delta\omega = \hbar\beta c - \omega \approx \Omega + \frac{\omega_p^2}{2\gamma^2\Omega} - \frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \frac{\omega_p^2\Omega}{c^2\kappa_1^2 + \omega_p^2(2+\beta^2)/(1+\beta^2) + \Omega^2/\beta^2}. \quad (33)$$

Формула (33) определяет положение медленных циклотронных волн на дисперсионной диаграмме $(\omega, \hbar c)$. Линии, соответствующие этим волнам, представляют собой прямые, параллельные прямой

$$-\Delta\omega = \Omega + \frac{\omega_p^2}{2\gamma^2\Omega} = \Omega_1. \quad (34)$$

Поскольку с ростом m величина κ^2 монотонно изменяется от κ_{\min}^2 до бесконечности, то каждому m соответствует свое значение $-\Delta\omega$, причем эти значения монотонно растут от

$$(-\Delta\omega)_{\min} = \Omega_1 - \frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \frac{\omega_p^2\Omega}{c^2\kappa_{\min}^2 + \omega_p^2(2+\beta^2)/(1+\beta^2) + \Omega^2/\beta^2} = \Omega_1 - \Omega_2 \quad (35)$$

до $(-\Delta\omega)_{\max} = \Omega_1$, т. е. в полосе шириной Ω_2 лежит бесконечно много таких прямых.

Таким образом, медленные циклотронные волны образуют квазинепрерывный спектр, а линией сгущения служит прямая $\hbar\beta c - \omega = \Omega_1$.

Каждой из прямых спектра циклотронных волн соответствует своя длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \approx \frac{2\pi\beta c}{-\Delta\omega}. \quad (36)$$

Найдем относительное расстояние $\Delta\lambda/\lambda$ между двумя соседними прямыми в спектре. При $m > 1$, где $\kappa(m) \approx \pi(m-1)/\delta$, получим

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_{m>1} \approx \frac{1+\beta^2}{\beta^2} \frac{\omega_p^2\delta^2}{\pi^2 c^2 m^3} = \frac{1+\beta^2}{\beta^2} \frac{2}{\pi^2 m^3} \frac{J}{J_A} \frac{\delta}{a}. \quad (37)$$

Расстояние между первыми двумя модами при не очень коротких длинах волн ($\lambda \gg 2\pi\delta$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_{1-2} &\approx \frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \frac{\omega_p^2 a \delta}{c^2} I_1(\Lambda a) K_1(\Lambda b) = \\ &= \frac{1+\beta^2}{\beta^2} I_1(\Lambda a) K_1(\Lambda b) \frac{J}{J_A}. \end{aligned} \quad (38)$$

Отличим наших формул от аналогичной формулы (32) в [4] является присутствие малого множителя δ/a в случае $m > 1$ и его отсутствие при $m = 1$. Это значит, что в отличие от сплошного пучка, где спектр равномерно сходил к линии сгущения, здесь самая первая мода относительно далеко отстоит от остальных, а все другие расположены в $a/2\delta$ раз ближе друг к другу, чем в [4]. Таким образом, требования на узкополосность возбуждающей системы в случае трубчатого пучка могут быть мягче, чем для сплошного пучка.

Проведенный расчет касался только азимутально-симметричных ($n = 0$) мод. Такие моды должны возбуждаться строго симметричными системами возбуждения. Нарушение азимутальной симметрии в системах возбуждения или транспортировки пучка приведет к тому, что в пучке наведутся несимметричные моды, являющиеся паразитны-

ми. Наибольшую опасность представляет мода с одной вариацией по азимуту, отвечающая смещению пучка как целого относительно оси возбуждающей структуры.

Отличительной чертой картины электромагнитного поля симметричной сильно замедленной волны является относительная малость азимутальной компоненты электрического поля по сравнению с радиальной и продольной составляющими. Поэтому, если выбрана схема возбуждения циклотронной волны с помощью сторонних токов, проводники возбuditеля должны, во-первых, быть проложены только в радиальном и продольном направлениях, во-вторых, симметрично окружать пучок. Это позволит снизить уровень несимметричных гармоник.

Для примера рассмотрим равновесное состояние пучка с параметрами $a = 1 \text{ см}$, $\delta = 0,1 \text{ см}$, $\Omega a/c = 0,8$, $\omega_p a/c = 1,2$, $\gamma = 4$. Для этих величин поперечные волновые числа равны $\kappa a = 5,2$ при $m = 1$ и $\kappa a = 32,2$ при $m = 2$. Структура поля E_z для $m = 1$ и $m = 2$ при названных параметрах приведена на рис. 1.

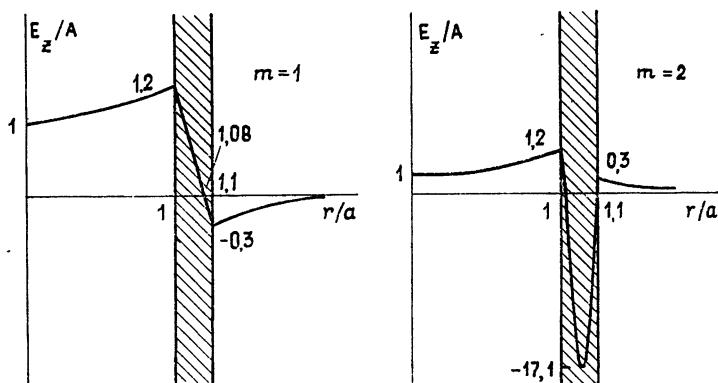


Рис. 1. Структура поля E_z медленной циклотронной волны в первой и во второй моде.

Для раскачки медленной циклотронной моды с $m = 1$ система возбуждения должна быть настроена на длину волны $\lambda_1 = 7,80 a$. Длина волны соседней моды $\lambda_2 = 7,44 a$, поэтому ширина полосы возбуждающей системы должна быть меньше 5%. Отметим, что для сплошного пучка радиуса a и того же тока ширина полосы системы возбуждения должна быть меньше 1,5%.

Исследование циклотронных волн выявило ряд преимуществ трубчатых пучков перед сплошными. В первую очередь, это относится к требованию на узкополосность системы возбуждения, которое в рассмотренном случае существенно мягче.

Кроме того, распределение ускоряющего поля циклотронной волны, на наш взгляд, благоприятнее, чем в сплошном пучке. Хотя в области, занятой пучком, компонента E_z меняется резко, даже с изменением знака, ускоряемые ионы будут, в основном, находиться внутри пучка, т. е. при $r < a$, где удерживающий их потенциал электронного пучка постоянен. Попадая в пучок, ионы встретят сильно растущее фокусирующее поле, которое отбросит их назад. В то же время при $r < a$ можно добиться сравнительно равномерного распределения ускоряющего поля. Для этого достаточно потребовать $\Lambda a \approx \Omega a/\beta c < 1$ (см. рис. 1). В сплошном пучке ионы, практически, будут занимать всю область, за-

нятую электронами, а распределение ускоряющего поля в этой области существенно неравномерно [4]. Это означает, что ионы, имеющие различные амплитуды бетатронных колебаний, будут набирать в среднем различную энергию, что осложнит проблему обеспечения их синхронизма с волной.

Заметим также, что картина поля волны внутри трубчатого пучка (при $r < a$) не зависит от вида распределения заряда в пучке. Изменение этого распределения существенно скажется на структуре поля в области, занятой пучком, что, по-видимому, мало повлияет на динамику захваченных ионов. Конечно, соображения, связанные с динамикой ионов, носят чисто качественный характер и требуют специального количественного исследования.

Авторы благодарны И. Л. Кореневу, принимавшему участие в обсуждении затронутых здесь вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sloan M. L., Drummond W. E. — Phys. Rev. Lett., 1973, 31, № 20, p. 1234.
2. Индыкул В. П., Панченко И. П., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. — Физика плазмы, 1976, 2, № 5, с. 775.
3. Faehl R. J., Godfrey B. B., Newberger B. S. et. al., — IEEE Trans. Nuclear Sci., 1977, NS-24, № 3, p. 1637.
4. Коренев И. Л., Юдин Л. А., Мустафин Х. Х. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 12, с. 1523.
5. Агафонов А. В., Воронин В. С., Лебедев А. Н., Пазин К. Н. — ЖТФ, 1974, 44, № 9, с. 1909.
6. Дэвидсон Р. Теория заряженной плазмы. — М.: Мир, 1978.
7. Агафонов А. В., Лебедев А. Н. — ЖТФ, 1977, 47, № 8, с. 1729.

Поступила в редакцию
5 февраля 1980 г.

SLOW CYCLOTRON WAVES IN ELECTRON HOLLOW BEAMS

M. I. Kapchinskij, L. A. Yudin

Slow cyclotron waves propagating in an electron hollow beam moving along axis of an ideally conducting smooth waveguide are considered. The dispersion relation of natural waves of such a beam has been derived and solved, the field structure of a wave has been analytically found, spectral characteristics are defined. It is shown that for the aim of collective ion acceleration hollow beams have an advantage over solid ones: an accelerating field is more homogeneous in space and demand for the width of excitation system frequency band is not so strict.
