

УДК 538.56 : 519.25

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СИСТЕМЫ, ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОЙ СЛУЧАЙНОЙ СИЛОЙ

*С. Ю. Медведев, О. В. Муzychук*

Рассмотрены вероятностные характеристики резонансной системы с нелинейным затуханием, параметрически возбуждаемой дельта-коррелированными случайными силами. Исследован как случай томпсоновского генератора (отрицательная линейная часть затухания), так и параметрического усилителя (положительная линейная часть затухания). Найдены условия параметрической генерации при возбуждении флуктуациями собственной частоты и флуктуациями затухания, получены соответствующие плотности вероятностей амплитуды, моменты амплитуды. Установлено, в частности, что средняя интенсивность параметрических колебаний линейно растет с ростом спектральной интенсивности накачки.

1. Анализ нелинейных динамических систем, подверженных интенсивным случайным воздействиям, содержит, как известно, существенные математические трудности, особенно если воздействия носят мультипликативный характер. В случае достаточно слабой нелинейности и малых случайных сил широко используется классическая процедура получения укороченных динамических уравнений для амплитуд и фаз собственных колебаний [1]. Для произвольной нелинейности и достаточно широкополосных (в пределе дельта-коррелированных) случайных сил применим аппарат марковских процессов [2-4] и функциональный подход получения замкнутых кинетических уравнений для вероятностных характеристик системы [4]. К сожалению, найти решения кинетических уравнений обычно не удается. Для колебательных систем (как линейных систем с параметрическим случайным воздействием, так и нелинейных) эффективной упрощающей процедурой является усреднение кинетических уравнений по быстрому времени [1, 5]. Отметим, что применение этой процедуры позволяет, в частности, исследовать эволюцию плотности вероятностей [4] и найти стационарное вероятностное распределение [6] амплитуды линейного осциллятора, параметрически возбуждаемого случайной силой. Решить же соответствующее уравнение Фоккера — Планка без перехода к медленно меняющейся амплитуде и фазе не удается.

Настоящая работа вслед за [7] посвящена исследованию влияния нелинейного затухания на резонансную систему, параметрически возбуждаемую внешней силой. Применение процедуры усреднения по времени позволило найти одномерные стационарные вероятностные характеристики системы. Выполненный анализ может быть полезен при изучении как параметрических усилителей и генераторов с шумовой накачкой, так и обычных томпсоновских генераторов с учетом сильных флуктуаций параметров.

2. Рассмотрим резонансную систему с одной степенью свободы, обладающую нелинейным затуханием:

$$y'' + 2h(\pm 1 + \beta(t) + \nu y^2)y' + \Omega^2(1 + \alpha(t))y = \Omega^2 x(t), \quad (1)$$

Внешнюю силу  $x(t)$  и параметрические воздействия  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  полагаем гауссовыми дельта-коррелированными процессами\* с

$$\langle u \rangle = 0, \quad \langle u(t)u(t-\tau) \rangle = D_u \delta(\tau), \quad u = \alpha, \beta, x.$$

Взаимные корреляции считаем для простоты равными нулю. От уравнения (1) стандартной заменой переменных

$$y = A \sin \Phi, \quad y' = \Omega A \cos \Phi, \quad \Phi = \Omega t + \varphi$$

перейдем к уравнениям для амплитуды и фазы выходного колебания:

$$A' = -2h(\pm 1 + \beta(t) + \nu A^2 \sin^2 \Phi) A \cos^2 \Phi - \frac{\Omega}{2} \alpha(t) A \sin 2\Phi + \Omega x(t) \cos \Phi, \quad (2)$$

$$\varphi' = h(\pm 1 + \beta(t) + \nu A^2 \sin^2 \Phi) \sin 2\Phi + \Omega \alpha(t) \sin^2 \Phi - \Omega A^{-1} x(t) \sin \Phi.$$

Запишем вытекающее из (2) уравнение Лиувилля для среднего значения произвольной функции  $\psi$  переменных  $A$  и  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} = \left\langle P(t) \frac{\partial \psi}{\partial A} \right\rangle + \left\langle Q(t) \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right\rangle, \quad (3)$$

где  $P$  и  $Q$  — правые части уравнений (2). Уравнение (3) не замкнуто относительно одноточечной плотности вероятностей  $W(A, \varphi; t)$ , но в случае дельта-коррелированных случайных сил такое замыкание осуществляется стандартным путем (см., например, [2, 4]). При этом, однако, мы приходим к весьма громоздкому и не поддающемуся анализу уравнению. Для его упрощения выполним усреднение по быстрому времени, полагая любые вероятностные характеристики амплитуды и фазы выходного колебания медленно меняющимися\*\* (постоянными на временах  $\tau \sim \Omega^{-1}$ ). Таким образом, можно прийти к следующему кинетическому уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{A}{h} \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} + (\pm 4 - 2\mu_\alpha - \mu_\beta) \left\langle A \frac{\partial \psi}{\partial A} \right\rangle - (\mu_\alpha + \mu_\beta) \left\langle \left( A \frac{\partial}{\partial A} \right)^2 \psi \right\rangle + \\ + \nu \left\langle A^3 \frac{\partial \psi}{\partial A} \right\rangle - \left( 3\mu_\alpha + \frac{1}{2} \mu_\beta \right) \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\rangle = \\ = 2I_0 \left( \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial A^2} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial A} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\rangle \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\psi$  — пока произвольная функция медленной амплитуды и фазы колебания. Здесь использованы безразмерные параметры

$$\mu_\alpha = \Omega^2 (4h)^{-1} D_\alpha, \quad \mu_\beta = 2h D_\beta; \quad I_0 = \Omega^2 (2h)^{-1} D_x,$$

имеющие смысл эффективных мощностей параметрических воздействий и средней интенсивности свободного броуновского движения ( $\mu_\alpha = 0$ ,  $\nu = 0$ ) линейной системы.

\* Условия аппроксимации реальных случайных воздействий дельта-коррелированными применительно к подобным системам обсуждались, например, в [4]

\*\* Условия применимости процедуры усреднения по времени кинетических уравнений для систем с флуктуирующими параметрами обсуждались в работе [5].

Как следует из уравнения (4), вероятностные характеристики амплитуды колебания «развязываются» с фазовыми (как это имеет место и в случае линейного осциллятора с параметрическим возбуждением [4, 6]). Считая в уравнении (4)  $\psi(A, \varphi) = \psi_A(A) \psi_\varphi(\varphi)$ , можно получить замкнутое кинетическое уравнение для одномерной плотности вероятностей амплитуды  $W(A, t) = \langle \delta(A - A(t)) \rangle$ :

$$\frac{4}{h} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial A} \left[ (\pm 4 - 2\mu_\alpha - \mu_\beta) A W + \nu A^3 W + (\mu_\alpha + \mu_\beta) A \frac{\partial}{\partial A} (A W) + 2I_0 \left( \frac{\partial W}{\partial A} - \frac{W}{A} \right) \right]. \quad (5)$$

Стационарное решение уравнения (5) имеет вид

$$W(A) = CA \exp \left\{ - \frac{\nu A^2}{2(\mu_\alpha + \mu_\beta)} \right\} \left( 1 + \frac{\mu_\alpha + \mu_\beta}{2I_0} A^2 \right)^{-\gamma}, \quad (6)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\mp 4 - \mu_\alpha}{2(\mu_\alpha + \mu_\beta)} - \frac{\nu I_0}{(\mu_\alpha + \mu_\beta)^2}.$$

Условия существования стационарного решения вытекают из условий интегрируемости выражения (6) в полубесконечных пределах. Ниже для простоты будем рассматривать влияние параметрических воздействий  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  по отдельности и проанализируем более подробно случай флуктуаций собственной частоты.

3. Пусть флуктуации потерь отсутствуют ( $\mu_\beta \equiv 0$ ). Вероятностное распределение (6) примет вид

$$W(A) = CA \exp(-\epsilon_\alpha A^2) \left( 1 + \frac{\mu_\alpha}{2I_0} A^2 \right)^{2s/\mu_\alpha}, \quad (7)$$

где

$$\epsilon_\alpha = \frac{\nu}{2\mu_\alpha}, \quad s = \epsilon_\alpha I_0 \mp 1,$$

$$C = 2\epsilon_\alpha \left( \frac{2\epsilon_\alpha I_0}{\mu_\alpha} \right)^{2s/\mu_\alpha} \exp \left( - \frac{2\epsilon_\alpha I_0}{\mu_\alpha} \right) \Gamma^{-1} \left( \frac{2s}{\mu_\alpha} + 1, \frac{2\epsilon_\alpha I_0}{\mu_\alpha} \right).$$

Здесь и в дальнейшем верхние знаки в формулах относятся к случаю диссипативной системы (линейная часть затухания положительна), а нижние — к случаю генератора;  $\Gamma(u, v)$  — неполная гамма-функция. Рассмотрим теперь некоторые частные случаи:

а) Пусть  $\nu = 0$ , что соответствует линейному осциллятору с параметрическим возбуждением и внешней силой. При этом

$$W(A)|_{\nu=0} = \frac{2 - \mu_\alpha}{I_0} A \left( 1 + \frac{\mu_\alpha}{2I_0} A^2 \right)^{-2/\mu_\alpha}, \quad \mu_\alpha < 2. \quad (7a)$$

Это «параметрическое» вероятностное распределение со степенным законом спада крыльев и расходящимися высшими моментами [6]. При  $\mu_\alpha \geq 2$  в такой системе не существует стационарного вероятностного распределения выходной координаты. Это связано с нарушением при  $\mu_\alpha = 2$  условия вероятностной устойчивости: как показано в [6], при этом вероятность превышения любого фиксированного значения выходной координаты равна единице. Напомним, что значение эффективной мощности  $\mu_\alpha = 1$  соответствует границе среднеквадратичной

устойчивости линейной системы [2, 4]. Как видно из уравнения (7), наличие нелинейного затухания устраняет расходимость моментов, а также неустойчивость по вероятности.

б) Пусть  $\mu_\alpha = 0$ . При этом из выражения (7) следует известное вероятностное распределение амплитуды броуновского движения нелинейного осциллятора (при знаке (-) в показателе  $s$ ) или генератора (при знаке (+) в  $s$ ) [2, 4]:

$$W(A)|_{\mu_\alpha=0} = CA \exp \left[ -\frac{A^2}{I_0} \left( 1 \pm \frac{\nu A^2}{8} \right) \right], \quad (76)$$

где

$$C = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\nu}{\pi I_0}} \frac{\exp(-2/\nu I_0)}{1 - \Phi(\sqrt{2/\nu I_0})}, \\ \sqrt{\frac{2\nu}{\pi I_0}} \frac{1}{1 + \Phi(\sqrt{2/\nu I_0})}, \end{cases} \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Нижняя строчка в формуле для  $C$  относится к случаю генератора. Как видно из рисунков 1а, 1б, наличие параметрического воздействия в обоих случаях приводит к уширению вероятностного распределения и некоторому смещению максимума в сторону больших амплитуд. Для случая генератора это означает смещение предельного цикла под действием флуктуаций параметров (см. также [8]). На рисунках показана и зависимость распределения от величины нелинейности  $\nu$ . С увеличением  $\nu$  оно смещается в сторону меньших амплитуд и «сжимается». Таким образом, факторы нелинейного затухания и параметрического воздействия деформируют вероятностное распределение свободного броуновского движения линейной системы (рэлеевское распределение амплитуды в случае диссипативной системы) в «разные стороны». Как видно из формулы (7), в рассматриваемом случае кубичной нелинейности для диссипативной системы возможна полная компенсация указанных факторов (см. также [7]). В самом деле, при  $s = 0$  или  $\nu I_0 = 2\mu_\alpha$  распределение (7) совпадает с вероятностным распределением невозмущенной линейной системы:

$$W_0(A) = \frac{2A}{I_0} \exp \left( -\frac{A^2}{I_0} \right). \quad (7в)$$

Интегрированием вероятностного распределения (7) можно найти стационарные значения моментов амплитуды

$$\begin{aligned} \langle A^m \rangle &= (\varepsilon_\alpha)^{\mu_\alpha} \left( \frac{2I_0}{\mu_\alpha \varepsilon_\alpha} \right)^{\frac{s}{\mu_\alpha} + \frac{m}{4}} \exp \left( -\frac{\varepsilon_\alpha I_0}{\mu_\alpha} \right) \Gamma \left( \frac{m}{2} + 1 \right) \times \\ &\times \Gamma^{-1} \left( \frac{2s}{\mu_\alpha} + 1, \frac{2\varepsilon_\alpha I_0}{\mu_\alpha} \right) W_{\frac{s}{\mu_\alpha} - \frac{m}{4}, \frac{s}{\mu_\alpha} + \frac{m}{4} + \frac{1}{2}} \left( \frac{2\varepsilon_\alpha I_0}{\mu_\alpha} \right), \\ &m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\Gamma(u)$  — гамма-функция,  $W_{\varepsilon, \eta}(u)$  — функция Уиттекера [9]. Приведем также формулу для координаты максимума плотности вероятностей:

$$A_{\max} = \sqrt{(2\nu)^{-1} (\mu_\alpha \mp 4 + \sqrt{(\mu_\alpha \mp 4)^2 + 8\nu I_0})}. \quad (9)$$

Для случая линейной системы ( $\nu = 0$ ) последняя примет вид

$$A_{\max} = \sqrt{\frac{2I_0}{4 - \mu_\alpha}}, \quad \mu_\alpha < 2, \quad (9a)$$

а в отсутствие параметрического воздействия ( $\mu_\alpha = 0$ ) —

$$A_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\nu} \left( \sqrt{1 + \frac{\nu I_0}{2}} \mp 1 \right)}. \quad (9б)$$

Отсюда видно, что координата максимума вероятностного распределения определяется, главным образом, фактором нелинейности  $\nu$  и слабо зависит от интенсивности как внешней силы, так и параметрического воздействия.

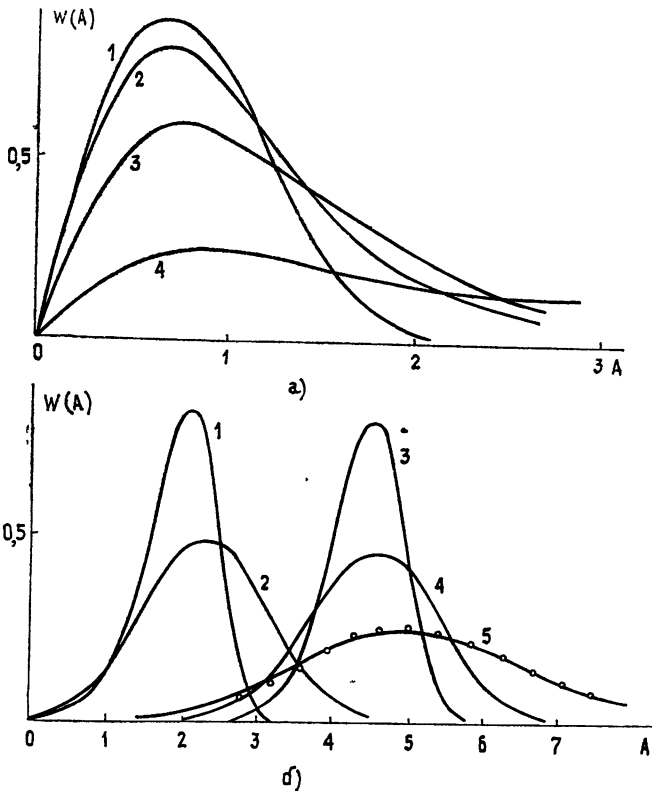


Рис 1. Плотность вероятностей амплитуд колебаний:  
 а) диссипативной системы с параметрическим возбуждением ( $I - \nu = 1$ ,  $\mu_\alpha = 0,2$ ; 2 —  $\nu = 2\mu_\alpha$ ; 3 —  $\nu = 0,2$ ,  $\mu_\alpha = 1$ ; 4 —  $\nu = 0$ ,  $\mu_\alpha = 1,5$ );  
 б) томпсоновского генератора с флуктуациями собственной частоты (всюду  $I_0 = 1$ , кроме кривой 5, где  $I_0 = 0$ );  
 1 —  $\nu = 1$ ,  $\mu_\alpha = 0$ ; 2 —  $\nu = 1$ ,  $\mu_\alpha = 1$ ; 3 —  $\nu = 0,2$ ,  $\mu_\alpha = 0$ ; 4 —  $\nu = 0,2$ ,  $\mu_\alpha = 0,2$ ; 5 —  $\nu = 0,2$ ,  $\mu_\alpha = 1$ .

Заметим, что вероятностные характеристики осциллятора с нелинейным затуханием вида  $h(y') = h(\pm 1 + \sqrt{\nu} (y')^2)$  получаются из найденных выше формул простой заменой  $\nu \rightarrow 3\nu\Omega^2$ .

4. Рассмотрим более подробно практически важный случай системы без внешнего воздействия ( $I_0 = 0$ ). Это может быть как томпсоновский генератор с флуктуациями собственной частоты, так и параметрический генератор. Осуществив в (7) предельный переход при  $I_0 \rightarrow 0$ , получим

$$W(A)|_{t_0=0} = CA^{1 \mp 4/\mu_\alpha} \exp(-\epsilon_\alpha A^2), \quad (10)$$

$$C = 2\epsilon_\alpha^{1 \mp 2/\mu_\alpha} \Gamma^{-1}(1 \mp 2/\mu_\alpha).$$

Заметим, что для параметрического генератора (верхние знаки) формула (10) имеет смысл лишь при  $\mu_\alpha > 2$ . Таким образом, условие нарушения вероятностной устойчивости линейной системы с параметрическим возбуждением  $\mu_\alpha = 2$  является в то же время границей области существования стационарного режима параметрического генератора с шумовой накачкой. Зависимость плотности вероятностей амплитуды колебаний параметрического генератора от величины  $\mu_\alpha$  показана на рис. 2. Отметим, что при  $2 < \mu_\alpha < 4$  вероятностное распределение имеет особенность в точке  $A = 0$  (верхняя кривая).

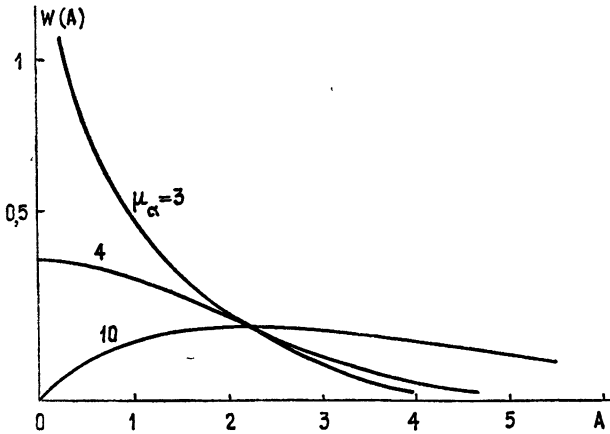


Рис. 2. Плотность вероятностей амплитуды колебаний параметрического генератора ( $\nu = 1$ ).

На основании (10) легко найти стационарные значения моментов амплитуды

$$\langle A^m \rangle = \left( \frac{2\mu_\alpha}{\nu} \right)^{m/2} \Gamma^{-1} \left( 1 \mp \frac{2}{\mu_\alpha} \right) \Gamma \left( \frac{m}{2} \mp \frac{2}{\mu_\alpha} + 1 \right). \quad (11)$$

Учитывая свойство гамма-функции  $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$ , последнюю формулу можно записать в рекуррентной форме:

$$\langle A^m \rangle = \frac{1}{\nu} (m\mu_\alpha \mp 4) \langle A^{m-2} \rangle, \quad m = 2, 3, \dots, \quad (12)$$

которая удобна при отыскании четных моментов (в случае параметрического генератора, как и ранее, следует считать  $\mu_\alpha > 2$ ). Отсюда, в частности, следует, что средняя интенсивность линейно растет с ростом интенсивности параметрического воздействия\*:

$$\langle A^2 \rangle = \frac{2}{\nu} (\mu_\alpha \mp 2). \quad (12a)$$

Как показывает анализ, прямые (12a) являются асимптотами для более сложной зависимости средней интенсивности от  $\mu_\alpha$  при отличной

\* Напомним, что для параметрического генератора с гармонической накачкой имеет место линейная зависимость интенсивности колебаний от амплитуды накачки, см., например, [10].

от нуля внешней силе, см. рис. 3а, 3б. Отметим, что для случая томпсоновского генератора наличие внешней силы  $I_0$  очень слабо сказывается на зависимости  $\langle A^2 \rangle$  от  $\mu_\alpha$ . Как видно из рисунка 3б, эту зависимость можно считать линейной и в случае  $I_0 \neq 0$  вплоть до больших значений фактора нелинейности  $\nu$ . Наличие (и величина) внешней силы слабо влияет и на форму вероятностного распределения амплитуды генератора с флуктуирующими параметрами (см. рис. 1б, кривая 5).

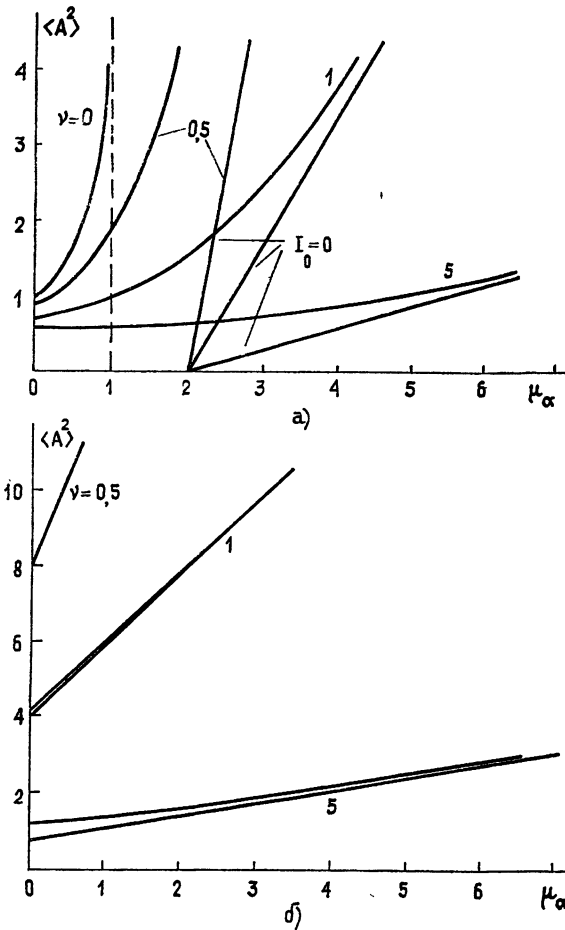


Рис 3. Зависимость средней интенсивности от эффективной мощности параметрического воздействия для:

- а) диссипативной системы с параметрическим возбуждением;  
 б) томпсоновского генератора с флуктуациями собственной частоты.

Как следует из (12), моменты интенсивности выходного колебания зависят от  $\mu_\alpha$  как полиномы степени  $n$ :

$$\langle I^n \rangle = \langle A^{2n} \rangle = \left( \frac{2}{\nu} \right)^n (\mu_\alpha - 2) (2\mu_\alpha - 2) \dots (n\mu_\alpha - 2). \quad (126)$$

Стабилизирующее влияние нелинейного затухания на моменты, как и следовало ожидать, увеличивается с ростом их номера.

**5.** Кратко остановимся на исследовании влияния флуктуаций затухания на вероятностные характеристики системы. Как следует из формул (6), соответствующую плотность вероятностей можно записать в виде

$$W(A) = CA \exp(-\varepsilon_\beta A^2) \left(1 + \frac{\mu_\beta}{2I_0}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{2s_\beta}{\mu_\beta}}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{\nu}{2\mu_\beta}, \quad s_\beta = 1 \mp \varepsilon_\beta I_0,$$

стличающемся от (7) лишь поправкой  $1/2$  на величину показателя степени (для линейной системы с параметрическим возбуждением, см. [6]). Как следует из выражения (13), и в случае флуктуаций потерь системы возможна «компенсация» факторов параметрического воздействия и нелинейного затухания. При

$$\mu_\beta = \mu_\beta^* = 2(\sqrt{1 + \nu I_0/2} - 1)$$

распределение (13) переходит в рэлеевское:

$$W(A) = 2A \varepsilon_\beta^* \exp(-\varepsilon_\beta^* A^2), \quad \varepsilon_\beta^* = \frac{\nu}{2\mu_\beta^*}. \quad (14)$$

Отметим, что при произвольном значении нелинейности  $\nu$  средний квадрат распределения (14) не совпадает с невозмущенным значением  $I_0$ , как это имело место в случае флуктуаций собственной частоты. При малой нелинейности (или малой внешней силе)  $\nu I_0 \ll 1$  получим  $\mu_\beta^* = \frac{\nu I_0}{2}$ ,  $\varepsilon_\beta^* = I_0^{-1}$ , и вероятностное распределение (14) совпадет с невозмущенным (7в).

Как и в случае флуктуаций собственной частоты, здесь может существовать стационарное вероятностное распределение в отсутствие внешнего воздействия:

$$W_{(\beta)}(A)|_{I_0=0} = CA^{\mp \frac{4}{\mu_\beta}} \exp(-\varepsilon_\beta A^2), \quad (15)$$

$$C = 2(\varepsilon_\beta)^{\frac{1}{2} \mp \frac{2}{\mu_\beta}} \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} \mp \frac{2}{\mu_\beta}\right).$$

Отсюда следует, что стационарный режим параметрического генератора с накачкой  $\beta(t)$  возможен лишь в области  $\mu_\beta > 4$ , причем именно в этой области не существует стационарная плотность вероятностей линейной системы [6]. Заметим, что в рассматриваемом случае стационарная плотность вероятностей (15) имеет особенность в нуле при любом допустимом значении эффективной мощности  $\mu_\beta$  (см. рис. 4).

Приведем также выражения для моментов амплитуды параметрического генератора с накачкой  $\beta(t)$ :

$$\langle A^m \rangle_{(\beta)} = \left(\frac{2\mu_\beta}{\nu}\right)^{m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2} \mp \frac{2}{\mu_\beta} + \frac{1}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} \mp \frac{2}{\mu_\beta}\right), \quad m = 1, 2, \dots,$$

или

$$\langle A^m \rangle_{(\beta)} = \frac{1}{\nu} ((m-1)\mu_\beta \mp 4) \langle A^{m-2} \rangle_{(\beta)}, \quad m = 2, 3, \dots$$

Отсюда, в частности, видно, что средняя интенсивность колебаний линейно растет с ростом  $\mu_\beta$ , как и в рассмотренном выше случае.

6. В заключение укажем на возможность анализа резонансной системы с нелинейным затуханием более общего вида. Пусть также собственная частота зависит от выходного сигнала



$$y'' + 2h(1 + F_1(y))y' + \Omega^2(1 + F_2(y) + \alpha(t))y = \Omega^2 x(t), \quad (16)$$

где  $F_1(y)$  и  $F_2(y)$  — пока произвольные функции. Кинетическое уравнение, соответствующее (4), для системы (16) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{4}{h} \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} + (4 - 3\mu_\alpha) \left\langle A \frac{\partial \psi}{\partial A} \right\rangle - \mu_\alpha \left\langle A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial A^2} \right\rangle - 3\mu_\alpha \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\rangle + \\ & + 8 \left\langle F_1(A \sin \Phi) A \cos^2 \Phi \frac{\partial \psi}{\partial A} \right\rangle^T - 4 \left\langle F_1(A \sin \Phi) \sin 2\Phi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right\rangle^T + \\ & + 4Q \left\langle F_2(A \sin \Phi) A \sin 2\Phi \frac{\partial \psi}{\partial A} \right\rangle^T - 8Q \left\langle F_2(A \sin \Phi) \sin^2 \Phi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right\rangle^T = \\ & = 2I_0 \left( \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial A^2} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial A} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\rangle \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $Q = \Omega_0/2h$  — добротность невозмущенной линейной системы.

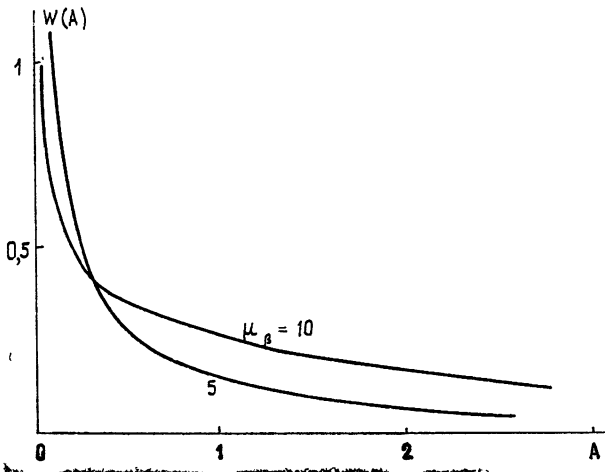


Рис. 4 Плотность вероятностей амплитуды параметрического генератора с накачкой в затухании ( $\nu = 1$ ,  $I_0 = 0$ ).

Рассмотрим для определенности степенные нелинейности с произвольными показателями (из физических соображений показатель степени в функции  $F_1(y)$  должен быть четным):

$$F_1(y) = \nu y^{2n}, \quad F_2(y) = \gamma y^k.$$

Учтя, что

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi} \sin^k x \sin 2x dx = 0,$$

нетрудно выполнить усреднение по периоду собственных колебаний в соответствующих членах уравнения (17). Перейдя, как и ранее, от кинетического уравнения (17) к уравнению Фоккера — Планка для плотности вероятностей  $W(A)$ , можно найти стационарное распределение амплитуды колебаний:

$$W(A) = CA \left( 1 + \frac{\mu_\alpha A^2}{2I_0} \right)^{-\Delta} \exp[-R(A)],$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2\mu_\alpha} (4 - \mu_\alpha) + \frac{1}{2} + \frac{4\nu(2n-1)!!(-1)^n(2I_0)^n}{(2n+2)!!\mu_\alpha^{n+1}},$$
$$R(A) = \frac{4\nu(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \left[ \frac{A^{2n}}{n\mu_\alpha} - \frac{2I_0 A^{2n-2}}{(n-1)\mu_\alpha^2} + \frac{(2I_0)^2 A^{2n-4}}{(n-2)\mu_\alpha^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}(2I_0)^{n-1} A^2}{1 \cdot \mu_\alpha^n} \right].$$

Отсюда видно, что характер вероятностного распределения такой же, как и в рассмотренном выше случае кубической нелинейности затухания. Подчеркнем, однако, что компенсация факторов параметрического воздействия и нелинейного затухания возможна лишь при  $n = 1$  (кубическая нелинейность).

Интересно отметить также, что нелинейность собственной частоты  $F_2(y)$  не влияет на вид установившегося вероятностного распределения амплитуды. Это обусловлено тем, что мы рассматривали дельта-коррелированные случайные воздействия. В этом случае расстроенный механизм ограничения амплитуды, который описывает  $F_2(y)$ , не работает, о чем и свидетельствует указанный результат.

Авторы признательны А. Н. Малахову за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова думка, 1971.
2. Рытов С. М., Кравцов Ю. Е., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. — М.: Наука, 1978.
3. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований — М.: Сов. радио, 1978.
4. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
5. Барбаненков Ю. И., Калинин М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 3, с. 343
6. Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 6, с. 707.
7. Медведев С. Ю., Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 6, с. 701.
8. Солин Н. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, № 12, с. 1831.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. И. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1965.
10. Мигулин В. В. и др. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
12 февраля 1980 г

#### STATISTICAL CHARACTERISTICS OF A NONLINEAR RESONANCE SYSTEM EXCITED PARAMETRICALLY BY A RANDOM FORCE

*S Yu. Medvedev, O. V. Muzychuk*

Probable characteristics are considered of a resonance system nonlinear damping which is excited by delta correlated random forces. Tompson generator (negative linear part of damping) and parametric amplifier (positive linear part of damping) are investigated. Conditions of parametric generation have been found when excited by fluctuations of the natural frequency and damping fluctuations, the corresponding densities of the amplitude probabilities, amplitude moments have been obtained. In particular, it is stated that the average intensity of parametric oscillations increases linearly with the increase of the spectral pump intensity.