ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 12 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 538.3 : 621.372.8

ТЕОРИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ СРЕД С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ВОЛНОВОДНОГО ТИПА

С. П. Ефимов, Л. А. Юдин

Рассматривается задача о возбуждении волновода заданными источниками для сред с пространственной дисперсией. Предлагаемый вывод позволяет получить амплитуду волны, определяемую работой токов и потоком энергии группы волн, близких к данной моде. Решена задача о возбуждении волновода, содержащего движущиеся среды. Приводятся результаты расчета по возбуждению плазменных волн в электронном пучке

Введение. Методы решения задач возбуждения волн в средах, которые в широком смысле можно назвать волноводами, хорошо разработаны. Для такого типа сред характерен чисто дискретный набор волн — мод волновода, суперпозиция которых дает искомое решение. Если среда не обладает дисперсией вдоль оси волновода, то задача возбуждения как таковая, несмотря на ее широкое использование в физической практике, не содержит физической проблематики. В средах с пространственной дисперсией амплитуды возбуждаемых волн, рассчитываемые в каждой задаче, имеют сложную структуру, определяемую дисперсионным уравнением, и обычно не допускают простой физической интерпретации. В настоящей работе показано, что задача имеет физически простое решение, обобщающее известную формулу, полученную Вайнштейном для волновода произвольного сечения с использованием леммы Лоренца [1].

Для монохроматических полей (с зависимостью от времени $\sim \exp(-i\omega t)$) из комплексной леммы* следует, что в случае однородного по оси заполнения волновода, когда проницаемости $\varepsilon(\boldsymbol{x})$ и $\mu(\boldsymbol{x})$ зависят только от поперечных координат $\boldsymbol{x}$, интерференционная часть потока энергии двух мод равна нулю:

$$(c/16\pi)\int d^2x\,[\boldsymbol{E}_n,\ \boldsymbol{H}_m^*]+\text{к. с.}=0, \qquad (1)$$

где через $\boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{H}_n$ в (1) обозначены компоненты электрического и магнитного полей, включая фазовый множитель $\exp(ihz)$. В этом смысле моды ортогональны, что позволяет вычислять амплитуды возбуждаемых волн без использования мембранных функций [2].

Амплитуда волны, идущей в положительном направлении, как известно, есть

$$A_k=-(1/4)\int[\boldsymbol{j}^{(l)}\boldsymbol{E}_k^{(*)}+\boldsymbol{j}^{(m)}\boldsymbol{H}_k^*]\,dv, \qquad (2)$$

если мода нормирована на «единичный поток» вектора Пойнтинга ($S_k=1$). Метод, использующий ортогональность мод, применим также к волноводам, содержащим анизотропные среды. Существенным при

* В работе [1] использована действительная лемма Лоренца.

этом является эрмитовость матриц проницаемостей $\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ и $\hat{\mu}(\boldsymbol{x})$, зависящих только от поперечных координат, и их независимость от номера моды.

Последнее обстоятельство не позволяет расширить рамки метода на случай сред с пространственной дисперсией, когда проницаемости зависят от волнового числа h. Такую задачу возбуждения можно решать, разлагая поля в интеграл Фурье по координате z. После этого при данном значении h в каждой конкретной задаче поле вычисляется из неоднородной системы дифференциальных уравнений, скажем, с помощью метода вариации произвольной постоянной. Затем обратный интеграл Фурье сводится с помощью теории вычетов к суперпозиции мод волновода, амплитуды которых сложным образом связаны с дисперсионным уравнением. Таким образом, основное физическое соображение, при котором амплитуда волны определяется работой токов в поле данной моды независимо от других мод, при таком выводе теряется в силу их энергетической связанности.

Тем не менее, в тех случаях, когда можно указать соответствующую линейную систему уравнений движения среды, порождающих проницаемости $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$, простые рассуждения показывают, что формула (2) остается в силе, если моды нормированы на единичный поток энергии в гидродинамическом понимании. Действительно, из линейных уравнений движения вытекает, что поток энергии, являющийся некоторой квадратичной формой, определяемой как электромагнитным полем, так и полем среды, одинаков в разных сечениях волновода. Отсюда следует, что отдельные моды энергетически развязаны. В результате работа источника в поле данной моды — $\frac{1}{4}\left\{A_k^* \int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}_k^* dv + A_k \int \boldsymbol{j}^*\boldsymbol{E}_k\, dv\right\}$, где A_k — амплитуда моды, совпадает с потоком энергии $|A_k|^2 S_k$, что определяет амплитуду $A_k{}^*$. Таким образом, окончательный результат (2) представляется несомненным, но поток S_k должен включать в себя как электромагнитную часть, так и связанную с веществом.

Задача настоящей работы показать, как формула (2) в новом понимании получается из уравнений макроскопической электродинамики. Предлагаемый вывод, который перекликается с обобщенным методом собственных колебаний [3], представляет, по мнению авторов, методический интерес и может быть использован не только в задаче возбуждения**.

Формальное решение задачи. Говоря о волноводе, мы понимаем среду, однородную вдоль оси z, в которой отсутствует излучение в поперечном направлении ($|\boldsymbol{x}| \to \infty$). Кроме того, что весьма существенно, полный набор мод предполагается дискретным, а среды считаются прозрачными в рассматриваемой полосе частот.

Если анизотропная среда неподвижна, то материальные уравнения при данной частоте ω содержат свертку тензорных функций $\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, z)$ и $\hat{\mu}(\boldsymbol{x}, z)$ с полями $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ соответственно. Разлагая в интеграл Фурье по координате z поля и токи $\boldsymbol{j}^{(e)}$, $\boldsymbol{j}^{(m)}$, получим известную форму уравнений Максвелла, которую можно записать в следующем символическом виде:

$$\hat{M}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}(h)\\ \boldsymbol{H}(h)\end{pmatrix} = (4\pi i/c)\begin{pmatrix}\boldsymbol{j}^{(e)}(h)\\ \boldsymbol{j}^{(m)}(h)\end{pmatrix}. \tag{3}$$

---

* Дополнительный множитель 1/2 обусловлен зависимостью амплитуды волны от продольной координаты в области, занятой токами.

** Авторы не отрицают возможности вывода основного результата работы, основанного на теореме взаимности, и глубоко признательны рецензенту за идею такого вывода.

Фурье-образы полей и токов, зависящие от волнового числа h, обозначены теми же буквами и включают в себя фазовый множитель $\exp(ihz)$.

«Оператор Максвелла» $\hat{M}$ в (3) есть операторная функция частоты и волнового числа h:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -(\omega/c)\hat{\varepsilon} & i(\nabla_\perp + ih\mathbf{n}_z)\times \\ -i(\nabla_\perp + ih\mathbf{n}_z)\times & -(\omega/c)\hat{\mu} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\mathbf{n}_z$ — орт, направленный вдоль оси z, $\nabla_\perp$ — поперечная часть градиента, $\times$ — символ операции векторного произведения. Проницаемости $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ в (4) зависят от переменных ω, h, $\boldsymbol{x}$, которые будут указываться по необходимости. Введение оператора Максвелла позволяет в компактной форме записывать энергетические соотношения, возникающие в задаче возбуждения.

В дальнейшем будем полагать, что при данном значении h проницаемости среды являются эрмитовыми тензорами:

$$\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \hat{\varepsilon}^{+}(\boldsymbol{x}), \qquad \hat{\mu}(\boldsymbol{x}) = \hat{\mu}^{+}(\boldsymbol{x}), \quad (5)$$

что характерно для прозрачных сред.

Нетрудно показать, что при условии (5) оператор $\hat{M}$ эрмитов по отношению к скалярному произведению полей

$$(\boldsymbol{F}_2^*, \boldsymbol{F}_1) = \int [(\boldsymbol{E}_2^* \boldsymbol{E}_1) + (\boldsymbol{H}_2^* \boldsymbol{H}_1)]\, d^2x, \quad (6)$$

где через $\boldsymbol{F}$, для краткости, обозначена пара $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$. Эрмитовость оператора $\hat{M}$ позволяет применить стандартную технику разложения решения уравнения (3) по собственным функциям оператора:

$$\hat{M}\mathbf{F}_k = \hat{M}\begin{pmatrix} \mathbf{E}_k \\ \mathbf{H}_k \end{pmatrix} = \lambda_k \mathbf{F}_k. \quad (7)$$

Собственные числа $\lambda_k(h)$ действительны. Это означает, что в среду вводятся чисто реактивные электрическая и магнитная проводимости, зависящие от h, при которых в волноводе существует фиктивная мода с заданными частотой и номером k. При этом собственные функции оператора $\hat{M}$ (при заданных ω и h) ортонормированы в следующем смысле:

$$\int [\mathbf{E}_k^* \mathbf{E}_l + \mathbf{H}_k^* \mathbf{H}_l]\, d^2x = \delta_{kl}. \quad (8)$$

Прямая подстановка разложения искомого поля и использование условия (8) приводят к следующему решению:

$$\boldsymbol{E}(h) = (4\pi i/c) \sum_k \mathbf{E}_k(h)\, [\lambda_k(h)]^{-1} \int [\boldsymbol{j}^{(e)}(h)\,\mathbf{E}_k^* + \boldsymbol{j}^{(m)}(h)\,\mathbf{H}_k^*]\, d^2x. \quad (9)$$

Если к полученным значениям применить обратное преобразование Фурье, то можно найти формальное решение задачи. Однако практическое использование формулы (9) неудобно, так как вместо расчета мод волновода приходится решать дополнительную задачу на собственные функции. Существенное упрощение структуры решения достигается с помощью теории вычетов при деформации контура интегрирования в комплексной плоскости h.

Переход к бегущим модам волновода. Если при заданной величине h_0 собственное значение $\lambda_k(h_0)$ равно нулю, то, как видно из уравнений (3) и (7), собственное поле $(\mathbf{E}_k, \mathbf{H}_k)|_{h_0}$ совпадает с модой волновода $(\boldsymbol{E}_k, \boldsymbol{H}_k)$. Обратно, каждая мода с волновым числом h_ν должна быть собственной функцией, отвечающей значению $\lambda_k(h_\nu)=0$ при некотором k. В результате, перебирая нули функции $\lambda_k(h)$ и поля, соответствующие указанным h, можно найти все моды $(\boldsymbol{E}_k, \boldsymbol{H}_k)$. Значения h, при которых $\lambda_k(h)=0$, есть полюса отдельных слагаемых ряда (9)*.

Фурье-образ токов $j(h)$ запишем в виде суммы

$$j^{(e,m)}(h) = j_+^{(e,m)}(h) + j_-^{(e,m)}(h) + j_\delta^{(e,m)}(h). \tag{10}$$

Функция $j_-(h)$ соответствует токам, лежащим левее точки $z_0-\delta$, т. е. имеет при $|h|\to\infty$ асимптотику $\exp(-ihz+ih\delta)$, функция $j_+(h)$ соответствует токам, расположенным правее $z_0+\delta$. Значение δ можно взять сколь угодно малым.

Для правильного обхода полюсов воспользуемся методом слабого поглощения. Добавляя к частоте ω малую мнимую добавку $i\omega''$, можно утверждать, что полюс функции $[\lambda_k(h)]^{-1}$ лежит в верхней полуплоскости, если $\operatorname{Im} h_k(\omega+i\omega'')>0$. Разлагая функцию $h_k(\omega+i\omega'')$, получим, что положение полюса определяется знаком групповой скорости $v_k = d\omega_k/dh$.

Интеграл Фурье, содержащий токи $j_+(h)$, можно замкнуть в верхней полуплоскости h, в которой подынтегральное выражение убывает как $\exp(ih\delta)$. В результате токи j_+ порождают поле

$$\boldsymbol{E} = -(4\pi/c)\sum_{v_k<0} \boldsymbol{E}_k(\partial\lambda/\partial h)^{-1}\Big|_{h_k}\int [j_+^{(e)}\boldsymbol{E}_k^* + j_+^{(m)}\boldsymbol{H}_k^*]\,dv. \tag{11}$$

Вычисление вклада токов $j_-^{(e,m)}$, создающих волны в положительном направлении оси z, совершенно аналогично. Вклад токов $j_\delta^{(e,m)}$ мы обсудим позднее.

Формула (11) содержит только бегущие волны. Нераспространяющиеся волны порождаются полюсами, лежащими вне действительной оси. Амплитуда возбуждения для них будет также найдена ниже при обсуждении ближнего поля от источника. Отметим, что знак фазовой скорости (знак h_k) не обязательно совпадает со знаком v_k. При этом условие излучения в средах с пространственной дисперсией нужно формулировать именно для групповых характеристик [4].

Поток энергии в задаче возбуждения. Вычислим $\partial\lambda/\partial h$ через значения мод $\boldsymbol{E}_k$, $\boldsymbol{H}_k$. Расчет удобно проводить, используя введенную выше символику для уравнений Максвелла. Непосредственное дифференцирование уравнения (7) приводит к формуле

$$(\partial\lambda/\partial h)|_{h_k} = (\boldsymbol{F}_k^*,\ (\partial\hat{M}/\partial h)\boldsymbol{F}_k) \tag{12}$$

при нормировке $(\boldsymbol{F}_k^*, \boldsymbol{F}_k)=1$. Раскрывая формальную запись (12), найдем

$$(\partial\lambda/\partial h)|_{h_k} = \int d^2x\,\{[\boldsymbol{E}_k^*, \boldsymbol{H}_k] + [\boldsymbol{E}_k, \boldsymbol{H}_k^*] - \\ -(1/c)\boldsymbol{E}_k^*[\partial(\omega\hat{\varepsilon})/\partial h]\boldsymbol{E}_k - (1/c)\boldsymbol{H}_k^*[\partial(\omega\hat{\mu})/\partial h]\boldsymbol{H}_k\}. \tag{13}$$

Выражение (13) совпадает (с точностью до постоянной $c/16\pi$), как нетрудно проверить путем стандартных рассуждений, с потоком энергии

* Можно показать, что дополнительные особенности ряда исчезают при его суммировании, так что учитывать их при интегрировании не нужно.

в данном сечении волновода [5]. Подставляя (13) в формулу (11), получим основной результат настоящей работы: амплитуда возбуждения моды, идущей (в смысле групповой скорости) в положительном направлении оси z, есть

$$A_k = -(1/4S_k) \int [j^{(e)} E_k^* + j^{(m)} H_k^*]\, dv, \tag{14}$$

где S_k — поток энергии, переносимой модой через данное сечение. Для волн, идущих в отрицательном направлении оси z, формула аналогична.

Возбуждение движущихся сред. Изложенный метод решения задачи возбуждения применим также для движущихся ламинарных сред, обладающих пространственной дисперсией, например, для пучка плазмы, состоящего из движущихся относительно друг друга слоев с постоянными скоростями. Считаем, что в системе координат, связанной с данным элементом среды, материальные уравнения в монохроматической задаче по-прежнему связаны эрмитовыми тензорами проницаемостей $\hat{\varepsilon}(\omega', h')$ и $\hat{\mu}(\omega', h')$. Исключая из уравнений Максвелла векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$, можно привести их к виду (3), в котором оператор изменит свою форму. Проверим, что и в случае движущихся сред оператор будет самосопряженным.

Для этого необходимо, чтобы в материальные уравнения, записанные в форме

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \hat{\alpha}(\omega, h) \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

входила эрмитова матрица $\hat{\alpha}^+(\omega, h) = \hat{\alpha}(\omega, h)$. Ее эрмитовость эквивалентна условию равенства следующих сумм:

$$\boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{E}_2^* + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{H}_2^* = \boldsymbol{D}_2^* \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{B}_2^* \boldsymbol{H}_1, \tag{16}$$

образующихся при скалярном умножении уравнения (15) и ему комплексно-сопряженного на поля $\boldsymbol{E}_{1,2}^*$, $\boldsymbol{H}_{1,2}^*$. Если перегруппировать слагаемые формулы (16), то получим равенство релятивистски инвариантных форм

$$\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{H}_2^* - \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{D}_2^* = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{B}_2^* - \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{E}_2^*, \tag{17}$$

которое теперь достаточно проверить в системе отсчета, связанной с данным элементом среды. В этой системе соотношение (17) очевидно в силу эрмитовости $\hat{\varepsilon}(\omega', h')$ и $\hat{\mu}(\omega', h')$. Таким образом, эрмитовость оператора $\hat{M}$ есть лоренц-инвариантное понятие, характеризующее прозрачные среды*.

Дальнейшие рассуждения целиком переносятся на задачу возбуждения поля в движущихся средах. Все формулы вплоть до соотношения (13) остаются в силе. Покажем, что и в этом случае $(\partial\lambda/\partial h)|_{h_k}$ пропорциональна потоку энергии. Вывод выражения для потока энергии связан, как правило, с усреднением по высоким частотам условия баланса мощности [6]:

$$(\partial/\partial z)(c/4\pi) \int d^2x\, (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) + (1/c) \int [\boldsymbol{E} \times$$

$$\times (\partial \boldsymbol{D}/\partial t) + \boldsymbol{H}(\partial \boldsymbol{B}/\partial t)]\, d^2x = 0. \tag{18}$$

---

* Разумеется, можно непосредственно убедиться в эрмитовости матрицы $\hat{\alpha}$, используя явный вид преобразований Лоренца.

По поперечным координатам в (18) проведено интегрирование. Рассматривая узкие пакеты волн в волноводе на дисперсионной кривой и воспользовавшись (15), с помощью стандартной процедуры усреднения получим из (18)

$$(\partial/\partial z)(c/16\pi)\int\Big\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*+\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}+(\boldsymbol{E}^*,\ \boldsymbol{H}^*)\times \\ \times(\partial/\partial h)(\widehat{\omega\alpha})\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{pmatrix}\Big\}d^2x+(\partial/\partial t)(1/16\pi)\times \\ \times\int(\boldsymbol{E}^*,\ \boldsymbol{H}^*)(\partial/\partial\omega)(\widehat{\omega\alpha})\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{pmatrix}d^2x=0. \tag{19}$$

В выражение (19) входят квазимонохроматические поля. Здесь величина, дифференцируемая по переменной z, есть, как обычно, поток энергии, а по переменной t — ее плотность. В предельном случае узкого пакета поле $(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H})$ можно взять чисто монохроматическим со значениями ω и h на дисперсионной кривой, тогда условие (19) справедливо для моды $(\boldsymbol{E}_k,\ \boldsymbol{H}_k)$.

Полученное выражение для потока энергии, как нетрудно убедиться, пропорционально значению (12), если подставить в него производные оператора $\hat{M}$, вычисленные для движущихся сред:

$$(\partial\hat{M}/\partial h)=-(1/c)(\partial/\partial h)(\widehat{\omega\alpha})+\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{n}_z\times\\ \boldsymbol{n}_z\times & 0\end{pmatrix}, \tag{20}$$

В результате можно утверждать, что формула для амплитуды возбуждения (14) справедлива в общем случае для анизотропных движущихся сред, обладающих пространственной дисперсией.

Ближнее поле. Вклад токов j_δ связан с разрывом в точке z и может быть вычислен из известных физических соображений [2], применимых также и к средам с пространственной дисперсией. Индукции, возникающие из-за разрыва, имеют только z-составляющие, равные

$$D_{\delta z}=-(4\pi/i\omega)\,j_z^{(e)}(z), \\ B_{\delta z}=-(4\pi/i\omega)\,j_z^{(m)}(z). \tag{21}$$

Расчет полей $\boldsymbol{E}_\delta$, $\boldsymbol{H}_\delta$ через $\boldsymbol{D}_\delta$, $\boldsymbol{B}_\delta$ нужно проводить как и для среды без дисперсии, формально считая $h=0$.

Ближнее поле, определяемое нераспространяющимися волнами, дается полюсами функции $[\lambda_k(h)]^{-1}$, лежащими вне действительной оси. Формальная схема предыдущих рассуждений остается в силе, если заметить, что для прозрачных сред операторная функция $\hat{M}(h)$ при комплексных значениях h обладает свойством

$$\hat{M}(h^*)=\hat{M}^+(h), \tag{22}$$

что следует из принципа симметрии [7]. Этим же свойством обладают собственные значения, соответствующие комплексным значениям h: $\lambda_k(h^*)=\lambda_k^*(h)$. При этом, если есть мода, отвечающая h, то также есть мода в точке h^*. При комплексных значениях h условие ортонормированности (8) приобретает следующий вид:

$$\big(\mathbf{F}_k^*(h^*),\ \mathbf{F}_l(h)\big)=\delta_{kl}. \tag{23}$$

Используя (23), получим, что в окончательный результат войдет значение

$$(\partial\lambda/\partial h)\big|_{h_k} = \left(F_k^*(h_k^*),\ (\partial\hat{M}/\partial h)F_k(h_k)\right), \tag{24}$$

которое уже нельзя трактовать как поток энергии (ср. с формулой (12)).

Возбуждение плазменных волн в электронном пучке. В качестве иллюстрации изложенного метода рассмотрим задачу о возбуждении волновода кругового сечения радиуса b, заполненного полностью замагниченным электронным пучком, движущимся со скоростью u. Такой пучок можно рассматривать как среду с магнитной проницаемостью $\hat{\mu} = 1$ и с тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

причем для холодного пучка

$$\begin{gathered} \varepsilon_{\parallel} = 1 - [\omega_p^2/\gamma^2(\omega - hu)^2], \\ \omega_p^2 = 4\pi ne^2/m\gamma, \end{gathered} \tag{26}$$

где n — плотность частиц, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, e и m — заряд и масса электрона. Отсутствие гиротропности позволяет разделить моды такого волновода на электрические ($H_z = 0$), описываемые дисперсионным уравнением

$$\varepsilon_{\parallel}\ [(\omega^2/c^2) - h^2] = \nu_{nm}^2/b^2\ (J_n(\nu_{nm}) = 0), \tag{27}$$

и магнитные ($E_z = 0$), дисперсионное уравнение которых совпадает с дисперсионным уравнением пустого волновода. Электрические моды имеют следующую структуру:

$$\begin{gathered} E_z = J_n(\nu_{nm}(r/b))\exp(in\varphi), \\ E_r = ih/(\omega^2/c^2 - h^2)(\partial E_z/\partial r), \\ E_\varphi = ih/(\omega^2/c^2 - h^2)(1/r)(\partial E_z/\partial\varphi). \end{gathered} \tag{28}$$

Если возбуждение осуществляется электрическими токами $j = j^{(e)}$, то расчет с помощью теории вычетов по схеме, изложенной во Введении, дает для амплитуд электрических волн, бегущих справа от источников, коэффициенты возбуждения, определяемые формулой

$$C_k = (1/N_k)\int dv\,(jE_k^*(h_k^*))\quad (k = (n,\ m)),$$

где

$$N_k = -\frac{b^2}{4}\,\frac{[J_n'(\nu_{nm})]^2\,\omega\,\dfrac{\partial}{\partial h}\left[\left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - h^2\right)\varepsilon_{\parallel}\right]}{\omega^2/c^2 - h^2}\Bigg|_{h=h_{nm}}. \tag{29}$$

Между тем, вычисление потока S_k с использованием (19) приводит к следующему значению:

$$S_k = -\frac{b^2}{16}\,[J_n'(\nu_{nm})]^2\left[\frac{2\omega h\nu_{nm}^2}{(\omega^2/c^2 - h^2)b^2} - \omega\frac{\partial\varepsilon_{\parallel}}{\partial h}\right]. \tag{30}$$

Учитывая дисперсионное уравнение (27), можно непосредственно убедиться в равенстве $N_k = 4S_k$, что подтверждает справедливость общей формулы.

Если частота возбуждения ниже критической частоты пустого волновода, то вдали от источников слева поле будет экспоненциально мало, а справа (вниз по течению пучка) оно является суперпозицией плазменных волн, постоянные распространения которых (в приближении $\omega < \gamma u \nu_{n1}/b$), как следует из формулы (28), равны

$$h_{nm}^{\pm} = (\omega/u)[1 \pm (\omega_p b/\gamma^2 u \nu_{nm})]. \qquad (31)$$

Выпишем, например, продольную компоненту электрического поля вдали от источников:

$$E_z = 2\,\frac{\omega^2\omega_p b}{\gamma^4 u^4} \sum_{n,m} \frac{J_n(\nu_{nm} r/b)\exp[i(n\varphi + h_{nm}^{\pm} z)]}{\nu_{nm}^3 [J_n'(\nu_{nm})]^2} \int dv\,(\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{E}^*). \qquad (32)$$

Входящие в это выражение компоненты электрического поля $\boldsymbol{E}$ определены формулами (28).

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность М. Л. Левину и Ю. А. Кравцову за полезные критические замечания, а также выражают признательность Б. М. Болотовскому, С. Н. Столярову, И. Л. Кореневу и М. И. Капчинскому за весьма содержательное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А. — ЖТФ, 1953, 23, с. 654.
2. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957.
3. Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. — М.: Наука, 1977.
4. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. — В сб.: Проблемы теоретической физики. — М.: Наука, 1972.
5. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.
6 Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1957.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию
28 сентября 1979 г.,
после доработки
4 февраля 1981 г.

A THEORY OF EXCITATION OF MEDIA WITH SPACE DISPERSION OF A WAVEGUIDE TYPE

S. P. Efimov, L. A. Yudin

A problem is considered on excitation of the waveguide by the given sources for media with the space dispersion. The conclusion proposed permits to obtain a wave amplitude which is defined by current function and the energy flux of the wave amplitude close to the given mode. Calculation results are given on excitation of plasma waves in the electron beam.