ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 538.574

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

А. И. Смирнов

Показано, что при распространении квазимонохроматических и широких в масштабе длины волны волновых пакетов в плавно неоднородных диспергирующих средах поперечная и продольная диффузии поля оказываются взаимосвязаны, причем коэффициент продольной диффузии определяется как локальными, так и интегральными характеристиками среды. Эта взаимосвязь может приводить к существенным искажениям в структуре поля, например, к пространственной развертке временного спектра сигнала и к временной развертке углового спектра переносимого средой изображения распределения поля на начальной апертуре.

1. При распространении волновых пакетов в неоднородных средах временная дисперсия приводит к искажениям не только продольной, но и поперечной структуры поля, так как разным спектральным гармоникам сигнала соответствуют разные семейства лучевых траекторий, кривизна которых зависит от частоты. В оптике это явление используется, например, в дисперсионных спектрометрах; с другой стороны, оно является помехой при переносе изображения (хроматические аберрации). В плавно неоднородных средах хроматические аберрации могут стать причиной существенного снижения компрессии поля в областях фокусировки [1]. Целью настоящей работы является исследование структуры поля квазимонохроматических и широких в масштабе длины волны волновых пакетов в плавно неоднородных средах, т. е. при следующих ограничениях общности: $\Delta\omega \ll \omega_0$, где $\Delta\omega$ — ширина спектра сигнала, ω_0 — несущая частота; $\lambda_0 \ll \Lambda_\perp \ll L_\varepsilon$, где $\Lambda_\perp$ — характерный поперечный размер пакета, $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ — длина волны, L_ε — характерный масштаб неоднородности среды. Кроме того, для простоты рассматривается скалярная и пространственно двумерная ($\boldsymbol{r} = \{x, z\}$) задача.

2. Пусть каждая спектральная гармоника скалярного волнового поля $U(\boldsymbol{r}, t)\exp(-i\omega_0 t)$ (U — медленная в масштабе $1/\omega_0$ функция) удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\widetilde{U} + \frac{\omega_0^2}{c^2}\left(1 + \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \varepsilon(\boldsymbol{r}, \omega_0 + \Omega)\widetilde{U} = 0, \tag{1}$$

где $\widetilde{U}(\boldsymbol{r}, \Omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(\boldsymbol{r}, t)\exp(i\Omega t)dt$, c — фазовая скорость волны на частоте ω_0 в точке $\boldsymbol{r} = 0$, $\sqrt{\varepsilon(\boldsymbol{r}, \omega_0 + \Omega)}$ — относительный показатель преломления среды в точке $\boldsymbol{r}$ на частоте $\omega = \omega_0 + \Omega$ ($\varepsilon(\boldsymbol{r} = 0, \omega_0) = 1$). Для определенности будем рассматривать следующую граничную задачу:

$$U(x, z = 0, t) = A_0(x)B_0(t),$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{гр}}}\frac{\partial U}{\partial t}\right)\Bigg|_{z=0} = 0, \tag{2}$$

где $A_0(x)$ — плавная в масштабе λ_0 функция, $v_{\text{гр}} = \left[\frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial \omega} \frac{\omega}{c}\right]^{-1}\Bigg|_{\omega=\omega_0}$ — групповая скорость. Такое задание граничных условий определяет в случае $\exp(i\omega t)$ — процесса широкий волновой пучок, допускающий (при сделанных выше предположениях) квазиоптическое описание. Для этого следует перейти в криволинейную систему координат, связанную с центральным (или опорным) геометрооптическим лучом, около которого локализуется пучок, и выделить вдоль него быструю фазовую зависимость поля (см., например, [2, 3]). У каждой гармоники (т. е. для каждого значения Ω) имеется своя наиболее адекватная с точки зрения квазиоптического описания криволинейная система координат. Однако для последующего Фурье-обращения к переменной t удобно записать уравнения квазиоптики для всех гармоник в одной координатной системе, совпадающей с лучевой для гармоники с частотой ω_0. Эта система координат (τ, y) определяется следующими соотношениями:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0(\tau) + y\boldsymbol{n}_0(\tau),$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}_0}{d\tau} = \boldsymbol{p}_0, \qquad \frac{d\boldsymbol{p}_0}{d\tau} = \frac{1}{2}\nabla\varepsilon(\boldsymbol{r}_0, \omega_0), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{r}_0(0) = 0, \quad \boldsymbol{p}_0(0) = \boldsymbol{z}_0,$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0(\tau)$ — координата опорного луча, $\boldsymbol{p}_0$ — вектор касательный к лучу $\left(|\boldsymbol{p}_0| = \sqrt{\varepsilon_0} = \sqrt{\varepsilon(\boldsymbol{r}_0, \omega_0)}\right)$, $\boldsymbol{n}_0(\tau)$ — вектор единичной нормали к лучу. Система (τ, y) ортогональна и имеет следующие коэффициенты Ламе: $h_y = 1$, $h_\tau = \sqrt{\varepsilon_0}(1 + y/\rho)$, где $\rho = \left(-2\varepsilon \Big/ \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)\Bigg|_{\substack{r=r_0\\ \omega=\omega_0}}$ — радиус кривизны опорного луча.

Делая в (1) замену переменных

$$\tilde{U} = \varepsilon_0^{-1/4}\tilde{W}(y, \tau, \Omega)\exp\left(i\frac{\omega_0}{c}\int\limits_0^\tau \varepsilon_0\, d\tau + i\Omega\int\limits_0^\tau \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{v_{\text{гр}_0}}\, d\tau\right) \tag{4}$$

$(v_{\text{гр}_0} = v_{\text{гр}}|_{y=0})$ и ограничиваясь квадратичными по малым параметрам $\Delta\omega/\omega_0$, $\lambda_0/\Lambda_\perp$, $\Lambda_\perp/L_\varepsilon$ членами, получаем следующее уравнение квазиоптики:

$$2i\frac{\omega_0}{c}\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial y^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2}(\alpha y^2 + \beta\Omega^2 + 2\gamma y\Omega)\tilde{W} = 0, \tag{5}$$

где

$$\alpha = \frac{3}{4}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2}\Bigg|_{\substack{y=0\\ \omega=\omega_0}},$$

$$\beta = -\sqrt{\varepsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial \omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\sqrt{\varepsilon}\right)\Bigg|_{\substack{y=0\\ \omega=\omega_0}}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y\, \partial \omega}\right)\Bigg|_{\substack{y=0\\ \omega=\omega_0}}.$$

При $\Omega = 0$ (5) переходит в достаточно подробно изученное уравнение безаберрационного приближения для поля квазиоптического волнового пучка в неоднородной среде, решение которого имеет вид [4]

$$\tilde{W}(y, \tau, \Omega = 0) = A(y, \tau) = \sqrt{\frac{\omega_0}{2\pi i c\sigma_2}}\exp\left(i\frac{\omega_0}{c}\frac{\dot{\sigma}_1 y^2}{2\sigma_1}\right)\times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_0(x) \exp\left(i \frac{\omega_0}{c} \frac{\sigma_1}{2\sigma_2}\left(x - \frac{y}{\sigma_1}\right)^2\right) dx, \tag{6}$$

где σ_1, σ_2 — фундаментальная система решений уравнения для нормального дифференциального сечения лучевой трубки

$$\ddot{\sigma} + \alpha\sigma = 0,$$
$$\sigma_1(0) = 1, \quad \dot{\sigma}_1(0) = 0, \quad \dot{\sigma}_2(0) = 1, \quad \sigma_2(0) = 0. \tag{7}$$

Зная $A(y, \tau)$, можно угадать вид решения для $\widetilde{W}(y, \tau, \Omega)$. Это должен быть приблизительно такой же пучок, локализованный, однако, около центрального луча другой гармоники, то есть смещенный по y на величину $q\Omega$ и повернутый в пространстве на угол $\dot{q}\Omega/\sqrt{\varepsilon_0}$, где $q\Omega$ — поперечное смещение центрального луча гармоники с частотой $\omega_0 + \Omega$ относительно координатной кривой $y = 0$. Поэтому будем искать решение (5) в виде

$$\widetilde{W} = A(y + q\Omega, \tau)\widetilde{B}(\Omega, \tau)\exp\left(-i\frac{\omega_0}{c}\dot{q}\Omega y\right). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (5) и приравнивая по отдельности члены с разными степенями y, получаем:

$$\ddot{q} + \alpha q = \gamma,$$
$$q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0; \tag{9}$$

$$2i\frac{d\widetilde{B}}{d\tau} - \frac{\omega_0}{c}\beta_1\Omega^2\widetilde{B} = 0, \tag{10}$$

где $\beta_1 = \beta - \alpha q^2 + \dot{q}^2$. Нетрудно видеть, что (9) есть неоднородное уравнение для дифференциальных сечений лучевых трубок. Его решение можно выразить через фундаментальную систему σ_1, σ_2:

$$q = \sigma_2 \int\limits_0^\tau \gamma\sigma_1\, d\tau - \sigma_1 \int\limits_0^\tau \gamma\sigma_2\, d\tau. \tag{11}$$

Уравнение (10) также интегрируется:

$$\widetilde{B} = \widetilde{B}_0(\Omega)\exp\left(-i\frac{\omega_0}{c}\frac{\Omega^2}{2}\int\limits_0^\tau \beta_1\, d\tau\right). \tag{12}$$

Подставляя (8) в (4) и применяя преобразование Фурье, получим следующее выражение для поля волнового пакета:

$$\widetilde{U}\exp(-i\omega_0 t) = \varepsilon_0^{-1/4}\exp\left(-i\omega_0 t + i\frac{\omega_0}{c}\int\limits_0^\tau \varepsilon_0\, d\tau\right) \times$$
$$\times \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(y + q\Omega, \tau)\widetilde{B}(\Omega, \tau)\exp\left(-i\Omega\left(t' + \frac{\omega_0}{c}\dot{q}y\right)\right) d\Omega, \tag{13}$$

где $t' = t - \int\limits_0^\tau \left(\sqrt{\varepsilon_0}/v_{\text{гр}_0}\right) d\tau$ — время, смещенное на величину группового запаздывания сигнала, A и $\widetilde{B}$ определяются выражениями (6) и (12).

3. Рассмотрим случай, когда поперечное смещение центрального луча гармоники с частотой $\omega_0 + \Omega$ относительно опорной траектории $\mathbf{r}_0(\tau)$ в пределах ширины спектра исходного сигнала $\Delta\omega$ мало по сравнению с характерным масштабом изменения функции $A(y, \tau)$ вдоль координаты $y(|q\Delta\omega| \ll |A/(\partial A/\partial y)|)$. При этом в формуле (13) можно вынести за знак интеграла $A(y + q\Omega, \tau)$ в точке $\Omega = 0$ и представить поле волнового пакета (13) в виде

$$U \exp(-i\omega_0 t) = \varepsilon_0^{-1/4} \exp\left(-i\omega_0 t + i\frac{\omega_0}{c}\int_0^\tau \varepsilon_0\, d\tau\right) \times \times A(y, \tau) B\left(t' + \frac{\omega_0}{c}\dot{q}y, \tau\right), \tag{14}$$

где

$$B(t', \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(\Omega, \tau) \exp(-i\Omega t)\, d\Omega.$$

Функция $B(t', \tau)$ удовлетворяет уравнению $2i\dfrac{\partial B}{\partial \tau} + \dfrac{\omega_0}{c}\beta\dfrac{\partial^2 B}{\partial t'^2} = 0$ с начальным условием $B|_{\tau=0} = B_0(t')$, которое описывает продольную диффузию волнового пакета (14). Следует особо подчеркнуть, что коэффициент этой диффузии $\dfrac{i}{2}\dfrac{\omega_0}{c}\beta_1$ $(\beta_1 = \beta - \alpha\dot{q}^2 + q^2)$ определяется не только локальной характеристикой среды β, но и интегральным параметром q, зависящим от ε и ее производных по всей трассе распространения от 0 до τ (см. (11)). Последнее вызвано изменением фазовых соотношений между гармониками сигнала из-за сдвига их центральных лучей относительно опорной траектории $\mathbf{r}_0(\tau)$. Для однородной среды, где $q \equiv 0$, $\beta_1 \equiv \beta$.

Как видно из выражения (14), поперечное распределение волнового поля $U\exp(-i\omega_0 t)$ определяется в данном случае функцией $A(y, \tau)$. Причем появляется дополнительная задержка (или опережение) во времени на величину $\Delta t' = -\dfrac{\omega_0}{c}\dot{q}y$, связанная с уже отмеченным ранее поворотом в пространстве волнового фронта гармоники с частотой $\omega_0 + \Omega$ на угол $\dot{q}\Omega/\sqrt{\varepsilon_0}$ относительно координатной кривой $\mathbf{r}_0(\tau)$.

4. В областях достаточно сильной фокусировки, где характерная ширина эталонного монохроматического пучка $A(y, \tau) - \Lambda_\perp$ мала по сравнению с $\left|q\tilde{B} \middle/ \dfrac{\partial\tilde{B}}{\partial\Omega}\right|$ $\left(\Lambda_\perp \ll \left|q\tilde{B} \middle/ \dfrac{\partial\tilde{B}}{\partial\Omega}\right|\right)$, в формуле (13) можно вынести за знак интеграла $\tilde{B}(\Omega, \tau)$ в точке $\Omega = -y/q$. При этом выражение (13) переходит в следующее:

$$U \exp(-i\omega_0 t) = \varepsilon_0^{-1/4} \exp\left(-i\omega_0 t + i\frac{\omega_0}{c}\int_0^\tau \varepsilon_0\, d\tau\right) \times \times \frac{1}{2\pi q}\tilde{B}\left(-\frac{y}{q}, \tau\right)\tilde{A}\left(-\left(t' + \frac{\omega_0}{c}\dot{q}y\right)\middle/ q, \tau\right), \tag{15}$$

где $\tilde{A}(\xi, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(y, \tau)\exp(i\xi y)\, dy$ — Фурье-трансформанта $A(y, \tau)$.

Нетрудно видеть, что продольная или временная структура волнового пакета (15), описываемая функцией $\tilde{A}(-t'/q, \tau)$, повторяет угловой спектр переносимого средой в монохроматическом пределе ($\omega = \omega_0$) изображения $A(y, \tau)$. Поперечное же распределение амплитуды поля (15) определяется временным спектром сигнала (см. (12)). Другими словами, в плавно неоднородной среде происходит пространственное разделение различных гармонических составляющих сигнала аналогичное тому, какое имеет место в оптических дисперсионных спектрометрах.

5. Таким образом, при распространении квазимонохроматических и широких в масштабе длины волны волновых пакетов в плавно неоднородных средах с временной дисперсией поперечная и продольная диффузии поля оказываются взаимосвязаны. Причем коэффициент продольной диффузии $\frac{i}{2}\frac{\omega_0}{c}\beta_1$ зависит не только от локальных, но и от интегральных (т. е. накапливающихся вдоль трассы распространения) свойств среды. Эта взаимосвязь может приводить к существенным искажениям в структуре поля, например (см., (15)), к пространственной развертке временного спектра сигнала и к временной развертке углового спектра переносимого средой в монохроматическом пределе ($\omega = \omega_0$) изображения $A(y, \tau)$.

В заключение отметим, что все результаты данной работы легко обобщаются на случай сильных аберрационных искажений, связанных с вносимыми средой коррекциями фазового фронта более высокого порядка, чем второго, и не учитываемых в рамках уравнения (5). Для этого достаточно заменить в формуле (13) $A(y, \tau)$ на $A_{\text{аб}}(y, \tau)$, где $A_{\text{аб}}(y, \tau)$ — амплитуда поля монохроматического пучка ($\omega = \omega_0$) при учете аберраций, детальное исследование структуры которой было проведено в работе [2].

Автор благодарен Г. В. Пермитину и И. Г. Кондратьеву за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев И. Г. — Радиотехника и электроника, 1974, 19, № 4, с. 730.
2. Кондратьев И. Г., Пермитин Г. В., Смирнов А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 10, с 1195.
3. Бабич В М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М : Наука, 1972.
4 Таланов В. И. — Диссертация, Горький, 1967.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
26 января 1981 г.

PROPAGATION OF WAVE PACKETS IN SMOOTHLY INHOMOGENEOUS DISPERSIVE MEDIA

A. I. Smirnov

It is shown that when quasimonochromatic and wide (in the wavelength scale) wave packets propagate in smoothly inhomogeneous dispersive media the transverse and longitudinal diffusion of the field appear to be interrelated, coefficients of the longitudinal diffusion being defined both by local and integral characteristics of the medium. This interrelation may lead to essential distortions in the field structure, for example, to the space scanning of the time signal spectrum and to time scanning of the angular spectrum of field distribution over the initial aperture.