ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 12 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 538.56 : 519 25

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕГАУССОВЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ. I

*Г. Н. Бочков, А. А. Дубков*

На основе развитого в [13–15] функционального подхода к анализу нелинейных преобразований негауссовых случайных процессов решается задача определения средних характеристик стохастической параметрической системы общего вида. Предлагаемый вариационный прием анализа позволяет получить уравнение одногруппового приближения [23, 24] и оценить его погрешность Указана методика построения высших, качественно лучших (по сравнению с групповыми) приближений уравнения Дайсона. Найдено решение выведенного приближенного уравнения для $\delta$-коррелированных и стационарных флуктуаций параметров. С целью иллюстрации полученных результатов проведено исследование моментной стохастической устойчивости системы первого порядка с негауссовыми флуктуациями параметра диссипации.

1. Задачи анализа стохастических параметрических систем — систем со случайно-изменяющимися параметрами — возникают при исследовании распространения волн в случайно-неоднородных средах, в теории оптимальной стохастической фильтрации и управления, при изучении адаптивных систем, применяемых для обнаружения слабых сигналов, в технике прецизионных измерений и создания высокостабильных систем и, наконец, в связи с общей проблемой синтеза адекватных реальным физическим ситуациям стохастических моделей процессов и систем.

В литературе достаточно подробно исследованы различные аспекты устойчивости стохастических систем с гауссовыми параметрическими возмущениями (см., например, библиографию в [1]), разработаны методы их приближенного спектрально-корреляционного анализа [2–5], дающие достаточно хорошие результаты в случае относительной малости или быстроты флуктуаций параметров. Для $\delta$-коррелированных [6] и марковских [7] гауссовых случайных возмущений указанные методы позволили получить точные результаты.

В последнее время в ряде работ изучались статистические характеристики стохастических параметрических систем для некоторых негауссовых моделей случайных параметрических возмущений. Здесь следует отметить точные результаты для произвольно распределенных марковских флуктуаций параметров [8], для $\delta$-коррелированных случайных возмущений [2], для параметрических воздействий «телеграфного» типа [2, 9–11] и приближенные соотношения для средних характеристик стохастических систем с пуассоновскими флуктуациями параметров [12].

В настоящей работе на основе развитого в [13–15] функционального подхода к анализу произвольных нелинейных преобразований случайных процессов выводится приближенное уравнение для средних характеристик негауссовой стохастической системы общего вида без какихлибо предположений относительно модели флуктуаций параметров и оцениваются условия применимости. Для $\delta$-коррелированных параметрических возмущений указанное уравнение является точным и дает известные результаты [2], а в случае стационарных флуктуаций параметров легко решается с помощью преобразования Лапласа. Полученные результаты иллюстрируются на примерах более простых стохастических систем.

2. Рассмотрим стохастическую параметрическую систему, описываемую векторным уравнением

$$dX(t)/dt = [\mathbf{A} + \mathbf{B}(t)]\, X(t) + F(t), \tag{1}$$

где $X(t) = \{x_1(t), \ldots, x_N(t)\}$, $F(t) = \{f_1(t), \ldots, f_N(t)\}$ — соответственно $N$-векторы выходных и входных координат; $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ — $N \times N$-матрица постоянных коэффициентов; $\mathbf{B}(t)$ — $N \times N$-матрица случайных процессов $b_{ij}(t)$ с $\langle b_{ij}(t) \rangle = 0$.

Общая задача анализа системы (1) заключается в том, чтобы по заданным статистическим свойствам случайных входных воздействий $F(t)$ и флуктуирующих параметров $\mathbf{B}(t)$ определить все характеристики $X(t)$. В частности, задача спектрально-корреляционного анализа состоит в отыскании среднего вектора $\langle X(t) \rangle$ и корреляционной матрицы $\mathbf{K}[t, t+\tau] \equiv \langle X(t) \times X^*(t+\tau) \rangle = \{\langle x_i(t)\, x_j^*(t+\tau) \rangle\}$ выходных координат* ($\times$ — знак тензорного произведения [16], $*$ — знак комплексного сопряжения).

Общее решение $X(t)$ уравнения (1) можно представить с помощью стохастической матрицы Грина (матрицанта) $\mathbf{H}(t, t_0)$ системы [16]:

$$X(t) = \mathbf{H}(t, 0)\, X(0) + \int_0^t \mathbf{H}(t, u)\, F(u)\, du, \tag{2}$$

$\mathbf{H}(t, t_0)$ удовлетворяет однородному уравнению (1)

$$d\mathbf{H}(t, t_0)/dt = [\mathbf{A} + \mathbf{B}(t)]\, \mathbf{H}(t, t_0) \tag{3}$$

с начальным условием $\mathbf{H}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$ $(\mathbf{I} = \{\delta_{ij}\}$ — единичная матрица). При таком подходе задачу анализа преобразования системой (1) внешних сигналов $F(t)$ удается свести к отысканию статистических характеристик матрицы $\mathbf{H}(t, t_0)$, зависящей, в соответствии с (3), лишь от флуктуирующих параметров $\mathbf{B}(t)$.

3. Поставим задачу определения среднего значения стохастической матрицы Грина системы (1). Как видно из (2), в случае статистической независимости входных воздействий $F(t)$ и флуктуирующих параметров $\mathbf{B}(t)$ знания этой величины вполне достаточно для отыскания средних характеристик выходных координат $X(t)$.

Проводя усреднение в (3), придем к

$$\frac{d\langle \mathbf{H}(t, t_0) \rangle}{dt} = \mathbf{A} \langle \mathbf{H}(t, t_0) \rangle + \langle \mathbf{B}(t)\, \mathbf{H}(t, t_0) \rangle, \quad \langle \mathbf{H}(t_0, t_0) \rangle = \mathbf{I}. \tag{4}$$

Для сохранения матричной формы записи введем в рассмотрение одноэлементную матрицу $\mathbf{E}(k, l) = \{\delta_{ik}\, \delta_{jl}\}$ (подобно [17]). С помощью нее входящее в (4) среднее $\langle \mathbf{B}(t)\, \mathbf{H}(t, t_0) \rangle$ можно представить в виде

$$\langle \mathbf{B}(t)\, \mathbf{H}(t, t_0) \rangle = \mathbf{E}(k, l) \langle b_{kl}(t)\, \mathbf{H}(t, t_0) \rangle \tag{5}$$

(в этой, как и во всех последующих формулах статьи, по одинаковым индексам предполагается суммирование). Поскольку стохастическая

---

* Заметим, что для белошумовых параметрических возмущений $b_{ij}(t)$ задача спектрально-корреляционного анализа системы (1) была строго решена в [6].

матрица Грина $\mathbf{H}(t, t_0)$ является неявно заданным функционалом $b_{ij}(t)$, раскроем среднее $\langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle$ по обобщенной формуле Фуруцу — Новикова (см. формулу (1.3) в Приложении I):

$$\langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \left\langle \frac{\delta^n \mathbf{H}(t, t_0)}{\delta b_{k_1 l_1}(\tau_1)\ldots\delta b_{k_n l_n}(\tau_n)} \right\rangle \times$$
$$\times \langle b_{kl}(t), b_{k_1 l_1}(\tau_1), \ldots, b_{k_n l_n}(\tau_n)\rangle, \tag{6}$$

где $\langle b_{kl}(t), b_{k_1 l_1}(\tau_1), \ldots, b_{k_n l_n}(\tau_n)\rangle$ — совместные кумулянтные функции совокупности случайных процессов $\{b_{ij}(t)\}$ [18].

Для вычисления входящих в (6) функциональных производных перепишем уравнение (3) в эквивалентной интегральной форме (см. (2)):

$$\mathbf{H}(t, t_0) = \mathbf{H}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{H}_0(t - u)\mathbf{B}(u)\mathbf{H}(u, t_0)\,du, \tag{7}$$

где $\mathbf{H}_0(t, t_0) = \mathbf{H}_0(t - t_0) = \exp\{\mathbf{A}(t - t_0)\}$ — матрицант невозмущенной ($\mathbf{B}(t) = 0$) системы (1). Применяя к обеим частям (7) операцию вариационного дифференцирования $\delta/\delta b_{k_1 l_1}(\tau_1)$ и учитывая, что [2]

$$\delta b_{kl}(u)/\delta b_{k_1 l_1}(\tau_1) = \delta_{kk_1}\delta_{ll_1}\delta(u - \tau_1),$$

найдем

$$\frac{\delta \mathbf{H}(t, t_0)}{\delta b_{k_1 l_1}(\tau_1)} = \mathbf{H}_0(t-\tau_1)\mathbf{E}(k_1, l_1)\mathbf{H}(\tau_1, t_0) + \int_{\tau_1}^{t} \mathbf{H}_0(t - u)\mathbf{B}(u) \times$$
$$\times \frac{\delta \mathbf{H}(u, t_0)}{\delta b_{k_1 l_1}(\tau_1)}\,du.$$

Варьируя полученное соотношение для первой функциональной производной по $\delta b_{k_2 l_2}(\tau_2)$ с учетом того, что $\tau_2 \leqslant \tau_1$, и вновь обращаясь к нему, определяем

$$\frac{\delta^2 \mathbf{H}(t, t_0)}{\delta b_{k_1 l_1}(\tau_1)\,\delta b_{k_2 l_2}(\tau_2)} = \int_{\tau_1}^{t} \mathbf{H}_0(t - u)\mathbf{B}(u)\frac{\delta^2 \mathbf{H}(u, t_0)}{\delta b_{k_1 l_1}(\tau_1)\,\delta b_{k_2 l_2}(\tau_2)}\,du +$$
$$+ \mathbf{H}_0(t - \tau_1)\mathbf{E}(k_1, l_1)\frac{\delta \mathbf{H}(\tau_1, t_0)}{\delta b_{k_2 l_2}(\tau_2)} = \mathbf{H}_0(t - \tau_1)\mathbf{E}(k_1, l_1)\mathbf{H}_0(\tau_1 - \tau_2) \times$$
$$\times \mathbf{E}(k_2, l_2)\mathbf{H}(\tau_2, t_0) +$$
$$+ \mathbf{H}_0(t - \tau_1)\mathbf{E}(k_1, l_1)\int_{\tau_2}^{\tau_1} \mathbf{H}_0(\tau_1 - u)\mathbf{B}(u)\frac{\delta \mathbf{H}(u, t_0)}{\delta b_{k_2 l_2}(\tau_2)}\,du + \int_{\tau_1}^{t} \mathbf{H}_0(t-u)\mathbf{B}(u) \times$$
$$\times \frac{\delta^2 \mathbf{H}(u, t_0)}{\delta b_{k_1 l_1}(\tau_1)\,\delta b_{k_2 l_2}(\tau_2)}\,du.$$

Аналогичным образом находится и выражение для $n$-й вариационной производной стохастической матрицы Грина:

$$\frac{\delta^n \mathbf{H}(t, t_0)}{\delta b_{k_1 l_1}(\tau_1)\ldots\delta b_{k_n l_n}(\tau_n)} = \mathbf{H}_0(t - \tau_1)\mathbf{E}(k_1, l_1)\mathbf{H}_0(\tau_1 - \tau_2)\ldots\mathbf{H}_0(\tau_{n-1} - \tau_n)\mathbf{E}(k_n, l_n) \times$$

$$\times \mathbf{H}(\tau_n, t_0) + \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{H}_0(t-\tau_1)\mathbf{E}(k_1, l_1)\mathbf{H}_0(\tau_1-\tau_2)\ldots\mathbf{H}_0(\tau_{m-1}-\tau_m)\mathbf{E}(k_m, l_m)\times$$

$$\times \int_{\tau_{m+1}}^{\tau_m} \mathbf{H}_0(\tau_m - u)\mathbf{B}(u)\frac{\delta^{n-m}\mathbf{H}(u, t_0)}{\delta b_{k_{m+1}l_{m+1}}(\tau_{m+1})\ldots\delta b_{k_n l_n}(\tau_n)}du \tag{8}$$

$$(\tau_n \leqslant \ldots \leqslant \tau_1, \tau_0 \equiv t).$$

Допустим, что мы имеем дело с достаточно быстрыми параметрическими воздействиями $b_{ij}(t)$, корреляционные масштабы которых существенно меньше характерных времен релаксации невозмущенной $\mathbf{B}(t) = 0)$ системы. Как видно из (6), (8), в этом случае пределы интегрирования в (8) определяются временами статистической зависимости флуктуаций $b_{ij}(t)$, вследствие чего вклад интегральных слагаемых в среднее $\langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle$ чрезвычайно мал. Ограничиваясь в (8) первым членом, проводя усреднение и подставляя результат в (5), (6), придем к

$$\langle \mathbf{B}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \mathbf{E}(k, l)\mathbf{H}_0(t-\tau_1)\times$$

$$\times \ldots \times \mathbf{H}_0(\tau_{n-1}-\tau_n)\mathbf{E}(k_n, l_n)\langle b_{kl}(t), b_{k_1l_1}(\tau_1), \ldots, b_{k_nl_n}(\tau_n)\rangle\langle \mathbf{H}(\tau_n, t_0)\rangle$$

Пользуясь свойством линейности кумулянтных скобок по каждому из аргументов [18], данное соотношение можно записать в компактной матричной форме* [17]:

$$\langle \mathbf{B}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \times$$

$$\times \langle \mathbf{B}(t), \mathbf{H}_0(t-\tau_1)\mathbf{B}(\tau_1), \ldots, \mathbf{H}_0(\tau_{n-1}-\tau_n)\mathbf{B}(\tau_n)\rangle\langle \mathbf{H}(\tau_n, t_0)\rangle. \tag{9}$$

Подставляя далее (9) в (4), получаем следующее приближенное интегродифференциальное уравнение для среднего значения стохастической матрицы Грина системы (1):

$$\frac{d\langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle}{dt} = \mathbf{A}\langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Q}(t, t')\langle \mathbf{H}(t', t_0)\rangle dt' \tag{10}$$

с интегральным ядром

$$\mathbf{Q}(t, t') = \langle \mathbf{B}(t)\mathbf{H}_0(t-t')\mathbf{B}(t')\rangle +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t'}^{t} d\tau_1 \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t'}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \langle \mathbf{B}(t), \mathbf{H}_0(t-\tau_1)\mathbf{B}(\tau_1), \ldots, \mathbf{H}_0(\tau_n - t')\mathbf{B}(t')\rangle. \tag{11}$$

Уравнение (10), полученное ранее в [17] с помощью метода корреляционных групп [23], является обобщением одногруппового приближения уравнения Дайсона [23, 24] на случай стохастической параметрической системы общего вида**. В отличие от метода корреляционных групп предложенный вариационный прием анализа дает возможность оценить

* В отличие от обычных кумулянтов порядок следования аргументов у входящих в (9) матричных кумулянтов имеет принципиальное значение, что обусловливает их сходство с операторными кумулянтами [19–22].

** Заметим, что учет в (11) лишь первого слагаемого соответствует переходу к так называемому приближению Бурре уравнения Дайсона, дающему хорошие результаты для систем с гауссовыми флуктуациями параметров (см. [3, 4]).

погрешность выведенного приближенного уравнения (см. Приложение II). Кроме того (и в этом состоит основное достоинство функционального метода анализа), он позволяет указать процедуру получения высших, качественно лучших, по сравнению с групповыми [23], приближений уравнения Дайсона вплоть до построения точного решения. Так, например, на следующем шаге необходимо, по аналогии с [5], гипотезу о быстроте флуктуаций параметров $b_{ij}(t)$ использовать не в уравнении (4) для $\langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle$, но в уравнениях для средних значений вариационных производных стохастической матрицы Грина, получаемых путем функционального дифференцирования уравнения (3) с последующим усреднением.

Как известно [2, 4], точное уравнение Дайсона для среднего значения стохастической матрицы Грина $\langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle$ имеет также вид (10) с некоторым сложным интегральным ядром $\mathbf{Q}_0(t, t')$. Пользуясь этим обстоятельством, запишем эквивалентное (3) интегральное уравнение для $\mathbf{H}(t, t_0)$ в другой форме:

$$\mathbf{H}(t, t_0) = \langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t} \langle \mathbf{H}(t, u)\rangle \Big[ \mathbf{B}(u)\mathbf{H}(u, t_0) - \int\limits_{t_0}^{u} \mathbf{Q}_0(u, t')\mathbf{H}(t', t_0)\,dt' \Big] du. \tag{12}$$

Вычисляя входящие в (6) функциональные производные с помощью (12) и отбрасывая, как и ранее, интегральные слагаемые, не составляет труда получить для $\langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle$ еще одно замкнутое интегродифференциальное уравнение:

$$\frac{d\langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle}{dt} = \mathbf{A}\langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{t_0}^{t} d\tau_1 \int\limits_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int\limits_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \times \langle \mathbf{B}(t), \langle \mathbf{H}(t, \tau_1)\rangle \mathbf{B}(\tau_1), \ldots, \langle \mathbf{H}(\tau_{n-1}, \tau_n)\rangle \mathbf{B}(\tau_n)\rangle \langle \mathbf{H}(\tau_n, t_0)\rangle. \tag{13}$$

Нелинейное уравнение (13), представляющее собой обобщение приближения Крейчнана [25] уравнения Дайсона на случай стохастических систем с негауссовыми флуктуациями параметров, является по сравнению с (10) более точным*. Уравнение (10) следует рассматривать лишь в качестве первого приближения (13), следующее приближение получается подстановкой во входящие в (13) кумулянтные скобки вместо $\langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle$ решения (10), что эквивалентно замене в (12) $\mathbf{Q}_0(t, t')$ на $\mathbf{Q}(t, t')$, и т. д.

Для $\delta$-коррелированных (предельно быстрых) флуктуаций параметров $b_{ij}(t)$ входящие в (8) интегральные слагаемые при подстановке в (6) зануляются, вследствие чего уравнение одногруппового приближения (10) (так же, как и (13)) становится точным и с учетом начального условия $\mathbf{H}_0(0) = \mathbf{I}$ принимает вид

$$d\langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle/dt = [\mathbf{A} + \mathbf{D}(t)]\langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle, \tag{14}$$

где

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau_1 \int\limits_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int\limits_{-\infty}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \langle \mathbf{B}(t), \mathbf{B}(\tau_1), \ldots, \mathbf{B}(\tau_n)\rangle .$$

* Заметим, что один из конструктивных способов введения обобщенного приближения Крейчнана был ранее указан в [26].

Как видно из (10), (11), в случае стационарности негауссовой совокупности $\{b_{ij}(t)\}$:

$$\langle b_{k_1l_1}(\tau_1),\ b_{k_2l_2}(\tau_2),\ \dots,\ b_{k_nl_n}(\tau_n)\rangle = \langle\ b_{k_1l_1}(\tau_1-\tau_n),\ b_{k_2l_2}(\tau_2-\tau_n),\dots,\ b_{k_nl_n}(0)\rangle,$$

матрицы $\mathbf{Q}(t,\ t')$ и $\langle\mathbf{H}(t,\ t_0)\rangle$ зависят лишь от разности аргументов

$$\mathbf{Q}(t,\ t') = \mathbf{Q}(t-t'),\quad \langle\mathbf{H}(t,\ t_0)\rangle = \overline{\mathbf{H}}(t-t_0),$$

и уравнение (10) легко решается с помощью преобразования Лапласа. В результате получаем алгебраическое выражение для средней передаточной матрицы стохастической системы $\overline{\mathbf{K}}(p) = \int\limits_0^\infty \overline{\mathbf{H}}(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau$:

$$\overline{\mathbf{K}}(p) = [p\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{Q}(p)]^{(-1)},\tag{15}$$

где $\mathbf{C}^{(-1)}$ — матрица, обратная $\mathbf{C}$, а

$$\mathbf{Q}(p) = \sum_{n=2}^{\infty}\int\limits_0^\infty e^{-p\tau_n}\,d\tau_n\int\limits_0^{\tau_n}d\tau_{n-1}\dots\int\limits_0^{\tau_3}d\tau_2\times$$
$$\times\langle\mathbf{B}(\tau_n),\ \mathbf{H}_0(\tau_n-\tau_{n-1})\mathbf{B}(\tau_{n-1}),\ \dots,\ \mathbf{H}_0(\tau_3-\tau_2)\mathbf{B}(\tau_2),\ \mathbf{H}_0(\tau_2)\mathbf{B}(0)\rangle.\tag{16}$$

Заметим, что для стационарных $\delta$-коррелированных параметрических возмущений $\mathbf{B}(t)$ точное уравнение (14) также легко решается и дает

$$\overline{\mathbf{H}}(\tau) = \exp[(\mathbf{A}+\mathbf{D})\tau],\tag{17}$$

где

$$\mathbf{D} = \sum_{n=2}^{\infty}\int\limits_0^\infty d\tau_n\int\limits_0^{\tau_n}d\tau_{n-1}\dots\int\limits_0^{\tau_3}d\tau_2\,\langle\mathbf{B}(\tau_n),\ \mathbf{B}(\tau_{n-1}),\dots,\ \mathbf{B}(\tau_2),\ \mathbf{B}(0)\rangle.$$

4. Конкретизируем полученные общие результаты (15)—(17) на примерах более простых негауссовых стохастических систем. В частном случае системы с одним флуктуирующим параметром $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}\xi(t)$ $(\langle\xi\rangle = 0)$ входящая в (15) матрица $\mathbf{Q}(p)$ принимает вид

$$\mathbf{Q}(p) = \sum_{n=2}^{\infty}\int\limits_0^\infty e^{-p\tau_n}\,d\tau_n\int\limits_0^{\tau_n}d\tau_{n-1}\dots\int\limits_0^{\tau_3}d\tau_2\,\varkappa_n(0,\ \tau_2,\dots,\ \tau_n)\times$$
$$\times\mathbf{B}\mathbf{H}_0(\tau_n-\tau_{n-1})\mathbf{B}\times\dots\times\mathbf{B}\mathbf{H}_0(\tau_2)\mathbf{B}.\tag{18}$$

Здесь $\varkappa_n(0,\ \tau_2,\ \dots,\ \tau_n)$ — кумулянтные функции стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Для $\delta$-коррелированного возмущения $\xi(t)$, пользуясь формулами (III.1), (III.2) и (III.9) из Приложения III, из (17) нетрудно получить известный [2] результат

$$\overline{\mathbf{H}}(\tau) = \exp\left\{\left(\mathbf{A}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{D_n}{n!}\mathbf{B}^n\right)\tau\right\},$$

где коэффициенты $D_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overset{n-1}{\dots}\int\varkappa_n(0,\ \tau_2,\ \dots,\ \tau_n)\,d\tau_2\dots\,d\tau_n$.

Рассмотрим теперь стохастическую систему, описываемую дифференциальным уравнением $N$-го порядка с $N$ флуктуирующими параметрами $\xi_0(t),\ \dots,\ \xi_{N-1}(t)$ $(\langle\xi_0\rangle = \dots = \langle\xi_{N-1}\rangle = 0)$:

$$\frac{d^N x}{dt^N}+[a_{N-1}+\xi_{N-1}(t)]\ \frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}}+\ldots+[a_0+\xi_0(t)]x=f(t). \tag{19}$$

Стохастическая функция Грина $h(t,\ t_0)$ такой системы удовлетворяет однородному уравнению (19) с начальными условиями $(d^k/dt^k)\times\times h(t,\ t_0)\,|_{t=t_0}=h^{(k)}(t_0,\ t_0)=\delta_{k(N-1)}$ $(k=\overline{0,\ N-1})$. Приводя уравнение для $h(t,\ t_0)$ к виду (3), находим

$$\begin{gathered}\{\mathrm{H}(t,\ t_0)\}_{iN}\equiv h_{iN}(t,\ t_0)=h^{(i-1)}(t,\ t_0),\\ a_{ij}=\delta_{(i+1)j}-\delta_{iN}\,a_{j-1},\quad b_{ij}(t)=-\delta_{iN}\,\xi_{j-1}(t).\end{gathered} \tag{20}$$

Подставляя (20) в (15), (16) и проводя несложные вычисления, определяем средний коэффициент передачи $\overline{k}(p)=\int\limits_0^\infty\overline{h}(\tau)e^{-p\tau}d\tau=$ $=\{\overline{\mathbf{K}}(p)\}_{1N}$ негауссовой параметрической системы (19) в одногрупповом приближении:

$$\overline{k}(p)=\{p^N+[a_{N-1}-q_{N-1}(p)]p^{N-1}+\ \ldots\ +[a_1-q_1(p)]p+a_0-q_0(p)\}^{-1}, \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered}q_m(p)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^\infty e^{-p\tau_n}d\tau_n\int\limits_0^{\tau_n}d\tau_{n-1}\ldots\int\limits_0^{\tau_3}d\tau_2\times\\ \times h_0^{(k_n)}(\tau_n-\tau_{n-1})\times\ldots\times h_0^{(k_2)}(\tau_2)\langle\xi_{k_n}(\tau_n),\ \ldots,\ \xi_{k_2}(\tau_2),\ \xi_m(0)\rangle\end{gathered} \tag{22}$$

($h_0(\tau)$ — функция Грина невозмущенной $(\xi_0(t)=\ldots=\xi_{N-1}(t)=0)$ системы; по индексам $k_2,\ldots,k_n$ производится суммирование от 0 до $N-1$).

В соответствии с (21), (22) средняя функция Грина $\overline{h}(\tau)$ системы (19) с предельно быстрыми флуктуациями параметров $\{\xi_0(t),\ \ldots,\ \xi_{N-1}(t)\}$ является решением однородного дифференциального уравнения $N$-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^N\overline{h}(\tau)}{d\tau^N}+\sum_{m=0}^{N-1}(a_m-q_m)\ \frac{d^m\overline{h}(\tau)}{d\tau^m}=0, \tag{23}$$

где

$$q_m=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^\infty d\tau_n\int\limits_0^{\tau_n}d\tau_{n-1}\ldots\int\limits_0^{\tau_3}d\tau_2\langle\xi_{N-1}(\tau_n),\ \xi_{N-1}(\tau_{n-1}),\ldots,\xi_{N-1}(\tau_2),\ \xi_m(0)\rangle.$$

Как видно из (23), определяющее влияние на среднее движение системы в этом случае оказывают флуктуации коэффициента при $(N-1)$-й производной. Если $\xi_{N-1}(t)=0$, то среднее решение совпадает с невозмущенным*: $\overline{h}(\tau)=h_0(\tau)$.

В той ситуации, когда флуктуации параметров $\xi_0(t),\ \ldots,\ \xi_{N-1}(t)$ статистически независимы, формула (22) для $q_m(p)$ существенно упрощается:

$$\begin{gathered}q_m(p)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^\infty e^{-p\tau_n}d\tau_n\int\limits_0^{\tau_n}d\tau_{n-1}\ldots\int\limits_0^{\tau_3}d\tau_2\times\\ \times h_0^{(m)}(\tau_n-\tau_{n-1})\times\ldots\times h_0^{(m)}(\tau_2)\varkappa_n^{\xi_m}(0,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_n),\end{gathered} \tag{24}$$

* Данный результат обобщает известный [6] результат для системы (19) с белошумовыми возмущениями $\{\xi_0(t),\ \ldots,\ \xi_{N-1}(t)\}$.

а уравнение (23) принимает вид

$$\frac{d^N\bar{h}(\tau)}{d\tau^N}+\left[a_{N-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}D^{\xi}_{n}{}^{N-1}\right]\frac{d^{N-1}\bar{h}(\tau)}{d\tau^{N-1}}+\sum_{m=0}^{N-2}a_m\frac{d^m\bar{h}(\tau)}{d\tau^m}=0$$

$$\left(D^{\xi}_{n}{}^{N-1}\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{n-1}{\cdots}\int\varkappa^{\xi}_{n}{}^{N-1}(0,\tau_2,\ldots,\tau_n)\,d\tau_2\ldots d\tau_n\right).$$

Наконец, если в системе (19) флуктуирует лишь один параметр при $k$-й производной, то, согласно (24), из всех функций $q_m(p)$ отлична от нуля лишь $q_k(p)$: $q_m(p)=q_k(p)\delta_{mk}$.

5. Заметим, что в случае одного флуктуирующего параметра $\xi_k(t)$ для конкретных расчетов иногда удобнее пользоваться другой формой записи соотношения для $q_k(p)$, а именно:

$$q_k(p)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\infty}h_0^{(k)}(\tau_2)e^{-p\tau_2}d\tau_2\int_0^{\infty}h_0^{(k)}(\tau_3)e^{-p\tau_3}d\tau_3\times$$
$$\times\ldots\times\int_0^{\infty}h_0^{(k)}(\tau_n)e^{-p\tau_n}\varkappa^{\xi}_{n}{}^{k}(0,\tau_2,\tau_2+\tau_3,\ldots,\tau_2+\tau_3+\ldots+\tau_n)\,d\tau_n. \tag{25}$$

При этом особо следует выделить класс негауссовых возмущений с экспоненциальной зависимостью кумулянтных функций $\varkappa^{\xi}_{n}{}^{k}(0,\tau_2,\ldots,\tau_n)$ от аргументов $\tau_2,\ldots,\tau_n$*, когда входящие в (25) интегралы легко вычисляются. Так, например, если флуктуирующий параметр является пуассоновским случайным процессом $(\xi_k(t)=\sum_i a_i F(t-t_i))$ с экспоненциальной формой порождающего импульса $F(t)=e^{-\nu t}1(t)$ $(1(t)$ — единичная функция), то подставляя в (25) известные [18] выражения для кумулянтных функций $\xi_k(t)$:

$$\varkappa^{\xi}_{n}{}^{k}(0,\tau_2,\ldots,\tau_n)=n_0\frac{\langle a^n\rangle}{n\nu}\exp\{-\nu(\tau_2+\ldots+\tau_n)\}$$

$$(\tau_2,\ldots,\tau_n\geqslant 0,\ n=\overline{2,\infty})$$

($n_0$ — средняя частота возникновения импульсов), находим

$$q_k(p)=n_0\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\langle a^n\rangle}{n\nu}\prod_{m=1}^{n-1}(p+m\nu)^k k_0(p+m\nu), \tag{26}$$

где $k_0(p)=(p^N+a_{N-1}p^{N-1}+\ldots+a_1p+a_0)^{-1}$ — коэффициент передачи невозмущенной системы (19).

В то же время для негауссова случайного процесса $\xi_k(t)$ с кумулянтными функциями

$$\varkappa^{\xi}_{n}{}^{k}(0,\tau_2,\ldots,\tau_n)=\varkappa_n\exp\{-\Pi(\max_i\{0,\tau_i\}-\min_i\{0,\tau_i\})\} \tag{27}$$

($\varkappa_n$ — кумулянты одномоментного распределения $W_{\xi_k}(\xi)$) соотношение (25) переходит в

$$q_k(p)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\varkappa_n[(p+\Pi)^k k_0(p+\Pi)]^{n-1}. \tag{28}$$

---

* Такой зависимостью обычно обладают кумулянтные функции марковских случайных процессов.

С помощью производящей функции кумулянтов $\Phi_{\xi_k}(u)=\ln\Theta_{\xi_k}(u)$ ($\Theta_{\xi_k}(u)=\langle e^{iu\xi_k}\rangle$ — характеристическая функция процесса $\xi_k(t)$) формулу (28) можно записать также в интегральной форме:

$$q_k(p)=\frac{1}{\gamma_k}\int\limits_0^\infty e^{-u}\,\Phi_{\xi_k}(iu\gamma_k)\,du,$$

где $\gamma_k=(p+\Pi)^k k_0(p+\Pi)$.

Отметим, что аналогичным образом могут быть определены и среднеквадратичные характеристики негауссовой параметрической системы (1). Подобная задача эквивалентна отысканию среднего значения стохастической матрицы Грина расширенной системы $\{x_i(t)\,x_j^*(t)\}$ ($i,\ j=\overline{1,\ N}$).

6. *Пример. Поведение моментов стохастической системы с негауссовыми флуктуациями параметра диссипации.*

С целью наглядной иллюстрации полученных результатов проанализируем особенности поведения моментов простейшей диссипативной негауссовой стохастической системы

$$dx/dt+[a_0+\xi(t)]x=0,\quad x(0)=x_0 \tag{29}$$

в сравнении с подробно исследованным в литературе (см., например, [30, 31]) случаем гауссовых флуктуаций $\xi(t)$. Учет негауссовости воздействия $\xi(t)$ в уравнении (29) необходим, в частности, при решении ряда задач статистической радиотехники и радиолокации [31, 32].

Уравнение для случайного процесса $x^n(t)$ получается из (29) заменой $[a_0+\xi(t)]$ на $n[a_0+\xi(t)]$, и поэтому ему соответствует невозмущенная функция Грина вида $h_0(\tau)=\exp(-na_0\tau)$ $(\tau\geqslant 0)$. Исходя из этого, легко на основании общих результатов (21), (22) и соотношения (2) записать выражение для изображения по Лапласу $\tilde{\alpha}_n(p)$ $n$-го момента $\alpha_n(t)\equiv\langle x^n(t)\rangle$ стохастической системы (29) в одногрупповом приближении:

$$\tilde{\alpha}_n(p)=\frac{x_0^n}{p+na_0-q_0(p)},$$

где $q_0(p)=\sum\limits_{m=2}^{\infty}(-n)^m\int\limits_0^\infty e^{-(p+na_0)\tau_m}d\tau_m\int\limits_0^{\tau_m}d\tau_{m-1}\ldots\int\limits_0^{\tau_3}d\tau_2\varkappa_m(0,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_m)$.

В рассматриваемом приближении (см. условия (II.4), (II.8) Приложения II) при отыскании полюса функции $\tilde{\alpha}_n(p)$ можно ограничиться лишь первой «поправкой» к невозмущенному значению $p_0=-na_0$, заменив $q_0(p)$ на $q_0(-na_0)$. Тогда, переходя от $\tilde{\alpha}_n(p)$ к $\alpha_n(t)$ и выражая величину $q_0(-na_0)$ с помощью формулы (III.9) Приложения III через полиспектры [18] $S_m(\omega_2,\ \ldots,\ \omega_m)=\frac{1}{(2\pi)^{m-1}}\int\overset{m-1}{\cdots}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varkappa_m(0,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_m)\times$ $\times\exp\{-i\sum\limits_{k=2}^{m}\omega_k\tau_k\}d\tau_2\ \ldots\ d\tau_m$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$, окончательно найдем

$$\alpha_n(t)=x_0^n\exp\left\{-na_0t+\frac{t}{2\pi}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-2\pi n)^m}{m!}S_m(0,\ \ldots,\ 0)\right\}. \tag{30}$$

Из (30) вытекает следующее условие устойчивости системы (29) по $n$-му моменту*:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m (2\pi n)^{m-1}}{m!} S_m(0, \dots, 0) \leqslant a_0. \tag{31}$$

Причиной неустойчивости в рассматриваемой системе следует считать западания флуктуирующего параметра $a_0 + \xi(t)$ в отрицательную область $\xi(t) < -a_0$, поскольку только в этом случае может нарастать решение уравнения (29). В то же время, как видно из (30), (31), эффективное влияние на поведение моментов $\alpha_n(t)$ оказывают лишь предельно медленные случайные блуждания параметра $\xi(t)$ в области $\xi(t) < -a_0$ (накопление возмущений).

При гауссовой аппроксимации флуктуаций $\xi(t)$ возможность «опасных» западаний всегда существует, и условие (31) с учетом того, что все $S_m(0, \dots, 0) = 0$ для $m \geqslant 3$, принимает известный [30, 31] вид:

$$\pi n S(0) \leqslant a_0. \tag{32}$$

В общем же случае в критерий устойчивости входит не только значение спектральной плотности возмущения на нулевой частоте, но и значения спектров высших порядков $S_m(0, \dots, 0)$, содержащие информацию о многомоментном вероятностном распределении $\xi(t)$ и описывающие предельно медленные изменения $\xi(t)$ на уровне высших корреляций**. В результате этого характер поведения негауссовой параметрической системы (29) может быть весьма разнообразным — от абсолютной устойчивости до взрывной стохастической неустойчивости [29].

Сказанное иллюстрирует табл. 1, в которой приведены условия моментной устойчивости системы (29) для четырех распространенных моделей [33–35] негауссовых процессов. Как следует из примера 1, в том случае, когда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 0$, в спектре пуассоновского возмущения $\xi(t)$ отсутствуют «нулевые» составляющие, и система (29) асимптотически устойчива. В четвертом примере (см. также примеры в [31]) флуктуирующий параметр $\xi(t)$ не может западать в область отрицательного затухания***, и поэтому, несмотря на наличие предельно медленных компонент в спектре $\xi(t)$, неравенство (31) выполняется автоматически.

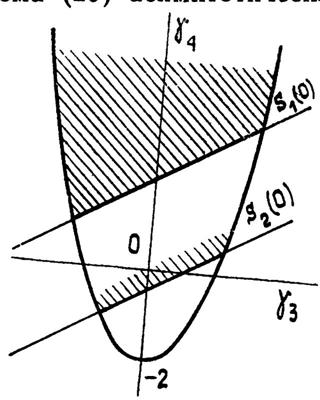

Рис. 1.

Для примера 2 на рис. 1 проведено разбиение области допустимых значений коэффициентов асимметрии $\gamma_3$ и эксцесса $\gamma_4$ [36] одномоментного распределения $W(\xi)$ процесса $\xi(t)$ на области стохастической устойчивости и неустойчивости (заштрихована). Как видно из рис. 1, систему (29), неустойчивую по «гауссову критерию» (32) ($S_2(0) > a_0/\pi n$; начало координат (0, 0) на плоскости ($\gamma_3$, $\gamma_4$) соответствует гауссовой аппроксимации

* Заметим, что условие моментной устойчивости (31) является асимптотически точным (ср. с [29]).

** Как показывает анализ, из условия $S(0) = 0$ автоматически следует, что и все высшие $S_m(0, \dots, 0) = 0$ $(m = \overline{3, \infty})$.

*** Заметим, что на практике с подобной ситуацией приходится сталкиваться, например, при рассмотрении одноканального автокомпенсатора помех [32].

Таблица 1

| № | Модель негауссова процесса | Формулы для полиспектров $S_m(\omega_2, \ldots, \omega_m)$ | Условие устойчивости по $n$-му моменту | Примечания |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Пуассоновский $\xi(t) = \sum\limits_i a_i\, g(t - t_i)$ | $S_m(\omega_2, \ldots, \omega_m) = 2\pi n_0 \langle a^m \rangle \hat{g}^* \left( i \sum\limits_{k=2}^{m} \omega_k \right) \prod\limits_{l=2}^{m} \hat{g}(i\omega_l)$, где $\hat{g}(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ [33] | $\frac{n_0}{n} \left[ \left\langle \exp\left\{ -na \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \right\} \right\rangle - 1 \right] \leqslant a_0$ | Возможна стохастическая взрывная неустойчивость [29] |
| 2 | $\xi(t)$ — «шаговый» процесс с шагом $T$ и одномоментным распределением $W(\xi)$ | $S_m(\omega_2, \ldots, \omega_m) = \varkappa_m \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{m-1} \operatorname{sinc} \left( \sum\limits_{k=2}^{m} \frac{\omega_k T}{2} \right) \prod\limits_{l=2}^{m} \operatorname{sinc} \frac{\omega_l T}{2}$, где $\operatorname{sinc} x \equiv \sin x / x$; $\varkappa_m$ — кумулянты распределения $W(\xi)$ [34] | $\langle e^{-nT\xi} \rangle \leqslant e^{n a_0 T}$ или $\sum\limits_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m (nT)^{m-1}}{m!} \varkappa_m \leqslant a_0$ | » |
| 3 | $\xi(t) = \alpha(t)\beta(t)$, где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — статистически независимые гауссовы процессы с $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle = 0$ | $S_{2n}(\omega_2, \ldots, \omega_{2n}) = (2n-1)! \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\alpha(\Omega) S_\beta(\Omega + \omega_2) \times \ldots \times S_\alpha \left( \Omega + \sum\limits_{k=2}^{2n-1} \omega_k \right) S_\beta \left( \Omega + \sum\limits_{k=2}^{2n} \omega_k \right) d\Omega \right\}_s$, $S_{2n-1}(\omega_2, \ldots, \omega_{2n-1}) = 0$, где $S_\alpha(\omega)$ и $S_\beta(\omega)$ — соответственно спектры $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ | $-\frac{1}{4\pi n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln [1 - 4\pi n \times S_\alpha(\Omega) S_\beta(\Omega)]\, d\Omega \leqslant a_0$ | » |
| 4 | Квадрат гауссова процесса $\xi(t) = \eta^2(t)$ $(\langle \eta \rangle = 0)$ | $S_m(\omega_2, \ldots, \omega_m) = 2^{m-1} \times (m-1)! \times \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\eta(\Omega) S_\eta(\Omega + \omega_2) \times \ldots \times S_\eta \left( \Omega + \sum\limits_{k=2}^{m} \omega_k \right) d\Omega \right\}_s$, где $S_\eta(\omega)$ — спектр $\eta(t)$, $(m-1)! \{\ldots\}_s$ — скобка симметризации по всем аргументам [35] | $-\frac{1}{4\pi n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln [1 + 4\pi n S_\eta(\Omega)] \times d\Omega \leqslant a_0$ | Система всегда устойчива |

$W(\xi)$), можно сделать устойчивой путем соответствующего выбора формы вероятностного распределения $W(\xi)$ (значений $\gamma_3$ и $\gamma_4$) флуктуирующего параметра и наоборот ($S_1(0) < a_0/\pi n$).

На рис. 2 на плоскости ($a_0$, $S(0)$) показаны границы областей устойчивости системы (29) при аппроксимации флуктуирующего параметра «шаговой моделью» (пример 2 табл. 1) с одномоментными распределениями типа «бинарной альтернативы» (рис. 2а, б)

$$W(\xi) = (1/2)[\delta(\xi - \sigma) + \delta(\xi + \sigma)] \tag{33}$$

и Лапласа (рис. 2в, г)

$$W(\xi) = (1/\sqrt{2}\sigma)\exp(-\sqrt{2}|\xi|/\sigma) \tag{34}$$

для разных значений времени корреляции $\tau_к = T/2$ и стандарта флуктуаций $\sigma$. Как видно из рис. 2а, в, при увеличении времени корреляции $\tau_{к2} > \tau_{к1}$ область устойчивости для процесса $\xi(t)$ с вероятностным рас-

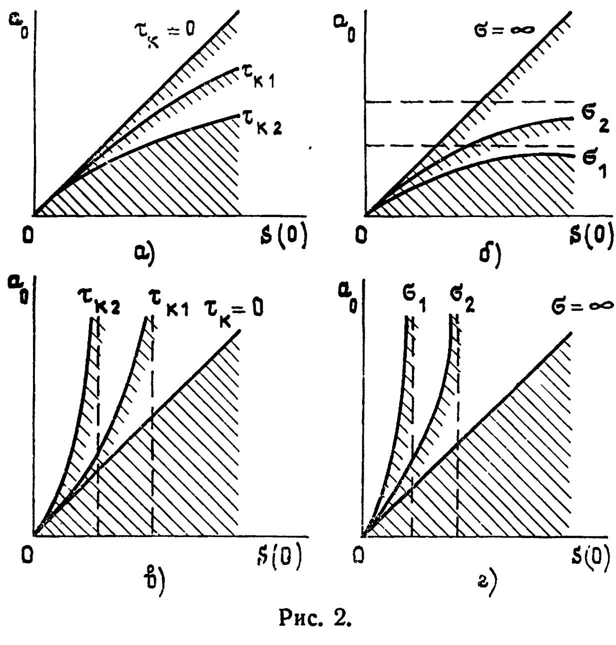


Рис. 2.

пределением (33) расширяется по сравнению со случаем $\delta$-коррелированных флуктуаций, а для процесса с распределением (34), наоборот, сужается. Аналогичная картина наблюдается и при уменьшении стандарта флуктуаций $\sigma_1 < \sigma_2$ (рис. 2б, г).

Авторы выражают благодарность Ю. Н. Барабаненкову и М. И. Калинину за конструктивные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

## ПРИЛОЖЕНИЕ I

Раскроем функциональное среднее $\langle b_{kl}(t) \mathrm{H}(t, t_0) \rangle$ по обобщенной формуле Фуруцу—Новикова (см. формулу (11) в [14]) и учтем, что в силу принципа причинности и уравнения (3)

$$\delta \mathrm{H}(t, t_0)/\delta b_{ij}(\tau) = 0 \quad \text{для } \tau < t_0 \text{ и } \tau > t,$$

$$\langle b_{kl}(t)\,\mathrm{H}(t,\,t_0)\rangle = \sum_{p_{11},\ldots,p_{NN}=0}^{\infty} \frac{1}{p_{11}!\ldots p_{NN}!} \underbrace{\int_{t_0}^{t} \cdots \int}_{(p_{11}+\ldots+p_{NN})} d\tau_1^{(11)} \ldots d\tau_{p_{NN}}^{(NN)} \times$$

$$\times\, \varkappa^{b_{11},\ldots,b_{kl},\ldots,b_{NN}}_{p_{11},\ldots,\,p_{kl}+1,\ldots,p_{NN}} \left(\tau_1^{(11)},\ldots,\tau_{p_{11}}^{(11)};\,\ldots;\,t,\,\tau_1^{(kl)},\ldots,\tau_{p_{kl}}^{(kl)};\ldots;\tau_1^{(NN)},\ldots,\tau_{p_{NN}}^{(NN)}\right)\times \tag{П.I.1}$$

$$\times \left\langle \frac{\delta^{p_{11}+\ldots+p_{NN}}\mathrm{H}(t,\,t_0)}{\delta b_{11}(\tau_1^{(11)})\ldots\delta b_{NN}(\tau_{p_{NN}}^{(NN)})} \right\rangle.$$

Пользуясь свойством инвариантности совместных кумулянтных функций $\varkappa^{b_{11},\ldots,b_{NN}}_{p_{11},\ldots,p_{NN}}$ совокупности случайных процессов $\{b_{mn}(t)\}$ относительно перестановок внутри групп аргументов $\tau_1^{(ij)},\ldots,\tau_{p_{ij}}^{(ij)}$ $(i,\,j=\overline{1,\,N})$ [18] и переходя в (П.I.1) к упорядоченному интегрированию, найдем

$$\langle b_{kl}(t)\,\mathrm{H}(t,\,t_0)\rangle = \sum_{p_{11},\ldots,p_{NN}=0}^{\infty} \frac{(p_{11}+\ldots+p_{NN})!}{p_{11}!\ldots p_{NN}!}\times$$

$$\times \left\{ \int_{t_0}^{t} d\tau_1^{(11)} \int_{t_0}^{\tau_1^{(11)}} d\tau_2^{(11)} \ldots \int_{t_0}^{\tau^{(NN)}_{p_{NN}-1}} \ldots d\tau_{p_{NN}}^{(NN)} \times \right. \tag{П.I.2}$$

$$\times\, \varkappa^{b_{11},\ldots,b_{kl},\ldots,b_{NN}}_{p_{11},\ldots,p_{kl}+1,\ldots,p_{NN}} \left(\tau_1^{(11)},\ldots,\tau_{p_{11}}^{(11)};\,\ldots;\,t,\,\tau_1^{(kl)},\ldots,\tau_{p_{kl}}^{(kl)};\ldots;\tau_1^{(NN)},\ldots,\tau_{p_{NN}}^{(NN)}\right)\times$$

$$\left.\times \left\langle \frac{\delta^{p_{11}+\ldots+p_{NN}}\mathrm{H}(t,\,t_0)}{\delta b_{11}(\tau_1^{(11)})\ldots\delta b_{NN}(\tau_{p_{NN}}^{(NN)})} \right\rangle \right\}_s.$$

Здесь $\dfrac{(p_{11}+\ldots+p_{NN})!}{p_{11}!\ldots p_{NN}!}$ $\{\ldots\}_s$ — скобка симметризации по аргументам с различающимися верхними индексами.

Соотношение (П.I.2) можно записать в компактной форме, если перейти от суммирования по $p_{11},\ldots,p_{NN}$ к суммированию по порядку $n=p_{11}+\ldots+p_{NN}$ совместной кумулянтной функции $\varkappa^{b_{11},\ldots,b_{NN}}_{p_{11},\ldots,p_{NN}}$ и представить $\varkappa^{b_{11},\ldots,b_{NN}}_{p_{11},\ldots,p_{NN}}$ в соответствии с [18] через кумулянтные скобки:

$$\langle b_{kl}(t)\,\mathrm{H}(t,\,t_0)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \times$$

$$\times \langle b_{kl}(t),\,b_{k_1l_1}(\tau_1),\,\ldots,\,b_{k_nl_n}(\tau_n)\rangle \left\langle \frac{\delta^n \mathrm{H}(t,\,t_0)}{\delta b_{k_1l_1}(\tau_1)\ldots\delta b_{k_nl_n}(\tau_n)} \right\rangle. \tag{П.I.3}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

Для вывода условий применимости «одногруппового приближения» (10), (11) необходимо оценить (по норме) разность между точным решением уравнения Дайсона $\langle \mathrm{H}(t,\,t_0)\rangle$ и решением уравнения (10) $\langle \mathrm{H}(t,\,t_0)\rangle_0$. Заменяя в уравнении (12) $\mathrm{Q}_0(t,\,t')$ на $\mathrm{Q}(t,\,t')$, $\langle \mathrm{H}(t,\,t_0)\rangle$ на $\langle \mathrm{H}(t,\,t_0)\rangle_0$ и проводя усреднение, определяем искомую разность

$$\langle \mathrm{H}(t,\,t_0)\rangle - \langle \mathrm{H}(t,\,t_0)\rangle_0 = \int_{t_0}^{t} \langle \mathrm{H}(t,\,u)\rangle_0\,[\langle \mathrm{B}(u)\,\mathrm{H}(u,t_0)\rangle - \langle \mathrm{B}(u)\,\mathrm{H}(u,t_0)\rangle_0]\,du, \tag{П.II.1}$$

где $\langle \mathbf{B}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{Q}(t, t')\langle \mathbf{H}(t', t_0)\rangle dt'$. Учитывая представление (5) и пользуясь тем обстоятельством, что $\|\mathbf{E}(k, l)\| = 1$, из (П.II.1) находим

$$\|\langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle - \langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle_0\| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k,l=1}^{N} \int\limits_{t_0}^{t} \|\langle \mathbf{H}(t, u)\rangle_0\| \, \|\langle b_{kl}(u)\mathbf{H}(u, t_0)\rangle - \langle b_{kl}(u)\mathbf{H}(u, t_0)\rangle_0\| \, du. \tag{П.II.2}$$

Как видно из (П.II.2), дальнейший анализ связан с оценкой абсолютной погрешности вычисления среднего $\langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle$ по формуле (9).

Подставляя (8) в (6) и пользуясь оценками норм матриц $\mathbf{E}(k, l)$ и $\mathbf{H}_0(\tau)$: $\|\mathbf{E}(k, l)\| = 1$, $\|\mathbf{H}_0(\tau)\| = \|e^{A\tau}\| \leqslant 1$ (в случае устойчивости невозмущенной $(\mathbf{B}(t) = 0)$ системы [1,6]), имеем

$$\sum_{k,l=1}^{N} \|\langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle - \langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle_0\| \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{t_0}^{t} d\tau_1 \int\limits_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int\limits_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{k_1,l_1=1}^{N} \ldots \sum_{k_n,l_n=1}^{N} \times \\ \times |\langle b_{kl}(t), b_{k_1l_1}(\tau_1), \ldots, b_{k_nl_n}(\tau_n)\rangle| \times \\ \times \sum_{m=0}^{n-1} \int\limits_{\tau_{m+1}}^{\tau_m} \left\| \left\langle \mathbf{B}(u) \frac{\delta^{n-m}\mathbf{H}(u, t_0)}{\delta b_{k_{m+1}l_{m+1}}(\tau_{m+1}) \ldots \delta b_{k_nl_n}(\tau_n)} \right\rangle \right\| du. \tag{П.II.3}$$

Для вывода условий применимости одногруппового приближения величину отброшенных членов в правой части неравенства (П.II.3) достаточно оценить в том же самом приближении, т. е. при условии быстроты возмущений $\{b_{ij}(t)\}$:

$$\tau^0 \ll \tau_{\text{рел}}, \ (t - t_0). \tag{П.II.4}$$

Здесь $\tau^0$ — максимальный из масштабов статистической зависимости негауссовой совокупности $\{b_{ij}(t)\}$, $\tau_{\text{рел}}$ — минимальное из времен релаксации динамической (невозмущенной) системы (1). Мы же для простоты рассчитаем входящее в (П.II.3) функциональное среднее в предположении $\delta$-коррелированности флуктуирующих параметров $b_{ij}(t)$ (марковское приближение [27]), несколько огрубив при этом оценку. В силу подобной приближенной процедуры во всех последующих оценках вместо знака $\leqslant$ правильнее писать знак $\lessapprox$.

Выносят функциональное среднее в правой части (П.II.3) из-под знака интеграла в точке $u = \tau_m$, полагая затем в нем $\tau_{m+1} = \ldots = \tau_n = \tau_m$ и учитывая (5), (8), придем к

$$\sum_{k,l=1}^{N} \|\langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle - \langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle_0\| \lessapprox \\ \lessapprox \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{t_0}^{t} d\tau_1 \int\limits_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int\limits_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{k_1,l_1=1}^{N} \ldots \sum_{k_n,l_n=1}^{N} \times$$

$$\times|\langle b_{kl}(t),\, b_{k_1l_1}(\tau_1),\dots,b_{k_nl_n}(\tau_n)\rangle|\sum_{m=0}^{n-1}{}'(\tau_m-\tau_{m+1})\sum_{i,j=1}^{N}\|\langle b_{ij}(\tau_m)\mathbf{H}(\tau_m,\ t_0)\rangle_0\|.$$

В том же самом приближении можно положить теперь в среднем $\langle b_{ij}(\tau_m)\mathbf{H}(\tau_m,\ t_0)\rangle_0$ $\tau_m=t$, устремить $t_0$ к $-\infty$ и, мажорируя кумулянтные функции совокупности

$$\sum_{k_1,l_1=1}^{N}\dots\sum_{k_n,l_n=1}^{N}|\langle b_{k_1l_1}(t_1),\ \dots,\ b_{k_nl_n}(t_n)\rangle|\leqslant K_n(t_1,\ \dots,\ t_n) \qquad (\text{П.II.5})$$

(для любых $t_1,\ \dots,\ t_n$), окончательно получить

$$\sum_{k,l=1}^{N}\|\langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t,t_0)\rangle-\langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t,\ t_0)\rangle_0\|\leqslant\varepsilon(t)\sum_{k,l=1}^{N}\|\langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t,\ t_0)\rangle_0\|, \qquad (\text{П.II.6})$$

где

$$\varepsilon(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}(t-t')\,dt'\int_{t'}^{t}d\tau_1\int_{t'}^{\tau_1}d\tau_2\dots\int_{t'}^{\tau_{n-2}}d\tau_{n-1}K_{n+1}(t,\ \tau_1,\dots,\ \tau_{n-1},\ t'). \qquad (\text{П.II.7})$$

Совершенно ясно, что уравнение одногруппового приближения (10) может иметь решение, близкое к точному, лишь в том случае, когда относительная погрешность вычисления среднего $\langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t,\ t_0)\rangle$ по формуле (9) достаточно мала, т. е. когда (см. (П.II.6))

$$\varepsilon(t)\ll 1. \qquad (\text{П.II.8})$$

В то же время, для обеспечения близости решения уравнения (10) $\langle\mathbf{H}(t,\ t_0)\rangle_0$ к точному решению $\langle\mathbf{H}(t,\ t_0)\rangle$ при любых $t$ одних условий (П.II.4) и (П.II.8) в общем случае недостаточно. В самом деле, как видно из (4), условие (П.II.8) обеспечивает малое отличие лишь в скоростях изменения указанных решений, а это отнюдь не гарантирует, что на больших интервалах наблюдения различие между $\langle\mathbf{H}(t,\ t_0)\rangle$ и $\langle\mathbf{H}(t,\ t_0)\rangle_0$ останется незаметным. Таким образом, существует еще и ограничение сверху на время наблюдения $(t-t_0)$.

Учитывая неравенство (П.II.6) в (П.II.2) и оценивая среднее $\langle b_{kl}(t)\mathbf{H}(t,\ t_0)\rangle_0$, как и ранее, в приближении $\delta$-коррелированности $b_{ij}(t)$, т. е. на основании (14), найдем

$$\|\langle\mathbf{H}(t,\ t_0)\rangle-\langle\mathbf{H}(t,\ t_0)\rangle_0\|\leqslant\int_{t_0}^{t}\varepsilon(u)q(u)\|\langle\mathbf{H}(t,\ u)\rangle_0\|\,\|\langle\mathbf{H}(u,\ t_0)\rangle_0\|\,du, \qquad (\text{П.II.9})$$

где

$$q(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{t'}^{t}d\tau_1\int_{t'}^{\tau_1}d\tau_2\dots\int_{t'}^{\tau_{n-2}}d\tau_{n-1}K_{n+1}(t,\ \tau_1,\ \dots,\ \tau_{n-1},\ t'). \qquad (\text{П.II.10})$$

С помощью неравенства (П.II.9) можно получить ограничение на интервал наблюдения.

Рассмотрим для простоты случай стационарной совокупности флуктуирующих параметров $\{b_{ij}(t)\}$, когда $K_{n+1}(t,\ \tau_1,\ \dots,\ \tau_{n-1},\ t')=K_{n+1}(t-t',\ \tau_1-t',\ \dots,\ \tau_{n-1}-t',\ 0)$ и, следовательно, $\varepsilon(t)=\varepsilon$, $q(t)=q$ (см. (П.II.7) и (П.II.10)). Оценка (П.II.9) в этой ситуации принимает вид

$$\| \langle \mathbf{H}(\tau) \rangle - \langle \mathbf{H}(\tau) \rangle_0 \| \leqslant \varepsilon q \int\limits_0^{\tau} \| \langle \mathbf{H}(\tau - u) \rangle_0 \| \| \langle \mathbf{H}(u) \rangle_0 \| \, du, \qquad (\text{П.II.11})$$

где $\langle \mathbf{H}(\tau) \rangle = \langle \mathbf{H}(t_0 + \tau, t_0) \rangle$.

Допустим, что среднее решение уравнения (3) устойчиво: $\| \langle \mathbf{H}(\tau) \rangle \| \leqslant 1$. Учитывая, что входящие в правую часть (П.II.11) величины оцениваются в приближении δ-коррелированных флуктуаций параметров $\{b_{ij}(t)\}$, когда, как уже отмечалось выше, $\langle \mathbf{H}(\tau) \rangle_0 = \langle \mathbf{H}(\tau) \rangle$, приходим к линейной по $\tau$ оценке

$$\| \langle \mathbf{H}(\tau) \rangle - \langle \mathbf{H}(\tau) \rangle_0 \| \leqslant \varepsilon q \tau, \qquad (\text{П.II.12})$$

дающей следующее условие близости $\langle \mathbf{H}(\tau) \rangle$ и $\langle \mathbf{H}(\tau) \rangle_0$:

$$\tau \ll (\varepsilon q)^{-1}. \qquad (\text{П.II.13})$$

Ограничение сверху на интервал наблюдения $\tau$ здесь практически не сказывается, так как на временах релаксации среднего решения $\sim q^{-1}$ условие (П.II.13) заведомо выполняется*.

Если же в среднем движении системы имеет место асимптотическая (или взрывная [29]) неустойчивость, то ограничение сверху на время $\tau$ становится более жестким. Так, например, для асимптотически неустойчивого решения $\langle \mathbf{H}(\tau) \rangle_0$, пользуясь оценкой $\| \langle \mathbf{H}(\tau) \rangle_0 \| \leqslant e^{q\tau}$ [27], из (П.II.11) находим

$$\| \langle \mathbf{H}(\tau) \rangle - \langle \mathbf{H}(\tau) \rangle_0 \| \leqslant \varepsilon q \tau e^{q\tau}. \qquad (\text{П.II.14})$$

Вытекающее из (П.II.14) ограничение на время наблюдения имеет вид

$$\tau e^{q\tau} \ll (\varepsilon q)^{-1}. \qquad (\text{П.II.15})$$

Для рассмотренных в настоящей работе частных случаев системы (1) справедливы те же самые условия (П.II.4), (П.II.8), (П.II.13) и (П.II.15) с той лишь разницей, что входящие в них мажорирующие функции $K_n(t_1, \dots, t_n)$ (см. (П.II.5)) определяются соответственно как

а) для системы с одним флуктуирующим параметром $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}\xi(t)$:

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \|\mathbf{B}\|^n k_n(t_1, \dots, t_n),$$

где

$$|\varkappa_n^{\xi}(t_1, \dots, t_n)| \leqslant k_n(t_1, \dots, t_n);$$

б) для системы (19):

$$\sum_{k_1=0}^{N-1} \dots \sum_{k_n=0}^{N-1} |\langle \xi_{k_1}(t_1), \dots, \xi_{k_n}(t_n) \rangle| \leqslant K_n(t_1, \dots, t_n).$$

Следует отметить, что в [17, 24, 27] методом мажорирования рядов теории возмущений была получена строгая оценка погрешности одногруппового приближения, имеющая тот же, что и (П.II.14), вид. В отличие от нее оценка (П.II.11), полученная в результате приближенной процедуры, является более гибкой, поскольку учитывает характер поведения среднего решения. При этом не требуется, чтобы входящие в (П.II.11) мажорирующие функции $K_n(t_1, \dots, t_n)$ были кумулянтными функциями некоторого случайного процесса.

---

* В соответствии с (П.II.7), (П.II.10) $\varepsilon \approx \tau^0 q$, и поэтому условие (П.II.8) $\tau^0 \ll q^{-1}$ означает, что в одногрупповом приближении средние характеристики решения не должны меняться на длине корреляционных связей совокупности флуктуирующих параметров $\{b_{ij}(t)\}$ (см. [28]). Заметим, что указанное предположение лежит в основе двухвременного метода Папаниколау и Келлера [3].

## ПРИЛОЖЕНИЕ III

Как известно [18], кумулянтная функция $\varkappa_n(0, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ стационарного случайного процесса полностью определена, если задано ее поведение в области $0 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$. Отсюда следует, что полиспектры [18] $S_n(\omega_2, \ldots, \omega_n)$ процесса

$$S_n(\omega_2,\ldots,\omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\overset{n-1}{\ldots}}}\int \varkappa_n(0,\tau_2,\ldots,\tau_n)\exp\{-i\sum_{k=2}^{n}\omega_k\tau_k\}d\tau_2 \ldots d\tau_n \tag{П.III.1}$$

можно выразить через функции

$$\Psi_n(\omega_2, \ldots, \omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_0^{\infty} d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1}\ldots\int_0^{\tau_3} d\tau_2 \times$$

$$\times \varkappa_n(0, \tau_2, \ldots, \tau_n)\exp\{-i\sum_{k=2}^{n}\omega_k\tau_k\}. \tag{П.III.2}$$

Для вывода формулы связи $S_n(\omega_2, \ldots, \omega_n)$ и $\Psi_n(\omega_2, \ldots, \omega_n)$ введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$G_n(\omega_2,\ldots,\omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\overset{\infty}{\underset{0}{\overset{n-1}{\ldots}}}\int \varkappa_n(0, \tau_2,\ldots,\tau_n)\exp\{-i\sum_{k=2}^{n}\omega_k\tau_k\}d\tau_2 \ldots d\tau_n, \tag{П.III.3}$$

которые в силу свойства симметрии $\varkappa_n(0, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ по всем аргументам получаются из $\Psi_n(\omega_2, \ldots, \omega_n)$ путем симметризации по $\omega_2, \ldots, \omega_n$:

$$G_n(\omega_2, \ldots, \omega_n) = (n-1)!\{\Psi_n(\omega_2, \ldots, \omega_n)\}_s. \tag{П.III.4}$$

С учетом (П.III.3) представим (П.III.1) в виде

$$S_n(\omega_2,\ldots,\omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\sum_{l=2}^{n}\left(\int_0^{\infty} d\tau_l + \int_{-\infty}^{0} d\tau_l\right)\int\overset{\infty}{\underset{\tau_l}{\overset{n-2}{\ldots}}}\int d\tau_2 \ldots d\tau_n \times \tag{П.III.5}$$

$$\times \varkappa_n(0, \tau_2, \ldots, \tau_l, \ldots, \tau_n)\exp\{-i\sum_{k=2}^{n}\omega_k\tau_k\} = G_n(\omega_2, \ldots, \omega_n) + \sum_{l=2}^{n} I_l$$

и рассмотрим подробнее отдельное слагаемое суммы

$$I_l = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{-\infty}^{0} d\tau_l \int\overset{\infty}{\underset{\tau_l}{\overset{n-2}{\ldots}}}\int d\tau_2 \ldots d\tau_n\, \varkappa_n(0, \tau_2, \ldots, \tau_l, \ldots, \tau_n)\exp\{-i\sum_{k=2}^{n}\omega_k\tau_k\}. \tag{П.III.6}$$

Пользуясь возможностью произвольного выбора начала отсчета в кумулянтной функции стационарного случайного процесса [18], сдвинем в (П.III.6) все аргументы у $\varkappa_n(0, \tau_2, \ldots, \tau_l, \ldots, \tau_n)$ на величину $(-\tau_l)$

$$I_l = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{-\infty}^{0} d\tau_l \int\overset{\infty}{\underset{\tau_l}{\overset{n-2}{\ldots}}}\int d\tau_2 \ldots d\tau_n \times$$

$$\times \varkappa_n(-\tau_l, \tau_2-\tau_l, \ldots, 0, \ldots, \tau_n-\tau_l)\exp\{-i\sum_{k=2}^{n}\omega_k\tau_k\}$$

и произведем последовательно замены подынтегральных переменных $\tau_m - \tau_l = \tau'_m$ $(m = \overline{2, n},\ m \neq l)$, $\tau_l = -\tau'_l$. В результате имеем

$$I_l = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^\infty d\tau_l \int_{\substack{0\\ \cdots}}^{\infty} \overset{n-2}{\cdots} \int d\tau_2 \ldots d\tau_n \varkappa_n(0, \tau_2, \ldots, \tau_l, \ldots, \tau_n) \times$$

$$\times \exp\{-i \sum_{\substack{k=2\\(k\neq l)}}^{n} \omega_k \tau_k + i\tau_l \sum_{k=2}^{n} \omega_k\} = G_n(\omega_2, \ldots, \omega_l, \ldots, \omega_n)\Big|_{\omega_l = -\sum_{k=2}^{n}\omega_k}. \quad (\Pi.III.7)$$

Подставляя (П.III.7) в (П.III.5) и учитывая (П.III.4), приходим окончательно к

$$S_n(\omega_2, \ldots, \omega_n) = (n-1)!\{\Psi_n(\omega_2, \ldots, \omega_n)\}_s + \sum_{l=2}^{n} (n-1)! \times$$

$$\times \{\Psi_n(\omega_2, \ldots, \omega_l, \ldots, \omega_n)\}_s\Big|_{\omega_l = -\sum_{k=2}^{n}\omega_k}. \quad (\Pi.III.8)$$

Из (П.III.8) следует (см. также [18]), что спектральная плотность мощности стационарного случайного процесса является действительной симметрической функцией частоты

$$S_2(\omega_2) \equiv S(\omega_2) = 2\mathrm{Re}\,\Psi_2(\omega_2),$$

а его полиспектры $S_n(\omega_2, \ldots, \omega_n)$ симметричны по всем аргументам и инвариантны относительно замены любого из аргументов на значение их суммы, взятой с противоположным знаком.

Как видно из (П.III.8), выразить функции $\Psi_n(\omega_2, \ldots, \omega_n)$ обратно через полиспектры не удается. Лишь в единственном частном случае, когда $\omega_2 = \ldots = \omega_n = 0$, из (П.III.8) находим

$$\Psi_n(0, \ldots, 0) = \frac{1}{n!} S_n(0, \ldots, 0). \quad (\Pi.III.9)$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М : Наука, 1969.
2. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М : Наука, 1980.
3. Papanicolaou G. C., Keller J. B. — SIAM J. Appl. Math., 1971, **21**, № 2, p. 287.
4. Татарский В. И. — Изв вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 4, с. 570.
5. Дубков А. А., Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 6, с. 901.
6. Бочков Г. Н., Кузовлев Ю Е — Изв вузов — Радиофизика, 1975, **18**, № 2, с. 222.
7. Музычук О. В. — ТМФ, 1976, 28, № 3, с. 371.
8. Кузовлев Ю. Е., Бочков Г. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 10, с 1505.
9. Bourret R., Frisch U., Pouquet A. — Physica, 1973, **65**, № 2, p. 303.
10. Brissaud A., Frisch U. — J. Math. Phys., 1974, **15**, № 5, p. 524.
11. Дубков А. А., Мальцев А. А — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 3, с. 353.
12. Калинин М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 10, с. 1516.
13. Бочков Г. Н., Дубков А. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 3, с. 376.
14. Дубков А. А., Малахов А. Н. — ДАН СССР, 1975, **222**, № 4, с. 793.
15. Бочков Г. Н., Дубков А. А, Малахов А. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 3, с. 406
16. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
17. Калинин М. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 4, с. 608.
18. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М : Сов радио, 1978.

19. Kubo R. — J. Phys. Soc. Japan, 1962, 17, № 7, p. 1100.
20. Van Kampen N. G. — Physica, 1974, 74, № 2, p. 239.
21. Fox R. F. — J. Math. Phys., 1975, 16, № 2, p. 289.
22. Апресян Л. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 5, с. 698.
23. Финкельберг В. М. — ЖЭТФ, 1967, 53, вып. 1(7), с. 401.
24. Барабаненков Ю. Н. — Изв вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 7, с. 981.
25. Kraichnan R. H. — J. Math. Phys., 1961, 2, № 1, p. 124.
26. Барабаненков Ю. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 1, с. 113.
27. Барабаненков Ю Н., Калинин М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20; № 3, с. 373.
28 Барабаненков Ю Н. — ТМФ, 1980, 42, № 1, с. 101.
29. Бочков Г. Н, Дубков А А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 10, с. 1240.
30. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966.
31. Хеллгрен Дж. — Зарубежная радиоэлектроника, 1963, № 1, с 3.
32 Мальцев А. А, Музычук О. В., Позументов И. Е. — Радиотехника
33. Sasaki Kimio, Sato Takuso, Adachi Tohru. — Bull. Tokyo Inst. Technol., и электроника, 1978, 23, № 7, с. 1401
1972, № 113, p. 55.
34 Дубков А. А., Малахов А. Н — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 1, с. 81.
35. Ширяев А. Н. — Теория вероятностей и ее применения, 1960, 5, № 3, с. 293
36. Дубков А. А, Малахов А. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, 19, № 8, с. 1179.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 26 сентября 1980 г.

## FUNCTIONAL STATISTICAL ANALYSIS OF NONGAUSSIAN PARAMETRIC SYSTEMS. I

*G. N. Bochkov, A. A. Dubkov*

Based on the functional approach [13–15] to the analysis of nonlinear transformations of nongaussian random processes a problem is solved for determination the mean characteristics of the stochastic parametric system of the general form. The suggested variation method of the analysis permits to obtain an equation of one group approximation [23, 24] and evaluate its error. A method is indicated for building approximations of Dyson equation more high and qualitatively better in comparison with group ones. A solution has been found for derived approximate equation for δ-correlated and stationary parameter fluctuations. To illustrate obtained results an investigation has been carried out of the moment stochastic stability of the first order system with nongaussian fluctuations of the dissipation parameter.

## Аннотации депонированных статей

УДК 621.396

### О ПОГЛОЩЕНИИ И ФОКУСИРОВКЕ ЛУЧЕЙ ПРИ СВЕРХДАЛЬНЕМ РАСПРОСТРАНЕНИИ КОРОТКИХ РАДИОВОЛН

*К. В. Свистунов, Ю. А. Семеней, В. Е. Унучков*

В работе путем численного моделирования на ЭВМ условий распространения радиоволн на трассах, приближающихся к кругосветным, исследуется относительная интенсивность волноводных и скачковых мод с учетом их поглощения в ионосфере и фокусировки Показано, что на низких частотах амплитуда лучей, распространяющихся в ионосферном волноводе, значительно превышает амплитуду скачковых мод. С повышением частоты это превышение уменьшается, и в некоторых условиях на частотах, близких к МПЧ скачкового механизма распространения, скачковые моды могут превышать по амплитуде волноводные

*Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 5394-81. Деп. от 26 ноября 1981 г.*