ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 12 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 538.56 : 519.25

ДВУХСТОРОННИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СРЕДНЕГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Н. П. Жук, О. А. Третьяков

В приближении Бурре получены двухсторонние эквивалентные граничные условия для среднего электромагнитного поля на невозмущенной границе раздела, которые определяются гауссовыми случайными отклонениями реальной границы раздела от этой средней поверхности и электромагнитными характеристиками сред по обе стороны от нее. Шероховатости реальной поверхности считаются малыми и пологими. Для случая статистически однородных шероховатостей выписаны упрощенные граничные условия. Рассмотрены частные случаи.

Наличие на поверхности раздела сред с различными электромагнитными характеристиками случайных шероховатостей приводит к необходимости уточнения граничных условий для волнового поля по сравнению с гладкой поверхностью. Известные к настоящему времени нелокальные граничные условия [1–3] связывают между собой компоненты электромагнитного поля по одну сторону средней поверхности. Иначе говоря, эти граничные условия относятся к типу импедансных и могут быть названы односторонними. С их помощью решен широкий класс научных и прикладных задач, относящихся к теории рассеяния волн на статистически неровной отражающей поверхности.

Вместе с тем представляет интерес получение двухсторонних граничных условий, которые могли бы связать предельные значения среднего электромагнитного поля по разные стороны невозмущенной поверхности с учетом возможных случайных шероховатостей. Они могут найти практическое применение при решении задачи волоконной оптики, дефектоскопии и других. Целью данной работы и является получение двухсторонних граничных условий; основой для решения этой задачи является метод получения односторонних условий, развитый в работе [3].

1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В этом разделе содержится подготовка к рассмотрению поставленной задачи. Будем исходить из дифференциальных уравнений Максвелла для монохроматических полей ($\sim \exp(-i\omega t)$) и граничных условий на плоскости $\sum(z=0)$, разделяющей среды *1* ($z<0$) и *2* ($z>0$), записанных для шестимерных векторов электромагнитного поля $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{R}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) \end{bmatrix}$. Пусть

$$d = \frac{c}{4\pi}\begin{bmatrix} ik\varepsilon(\boldsymbol{R}) & \nabla\times\hat{I} \\ -\nabla\times\hat{I} & ik\mu(\boldsymbol{R}) \end{bmatrix}, \quad b = \frac{c}{4\pi}\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{z}_0\times\hat{I} \\ -\boldsymbol{z}_0\times\hat{I} & 0 \end{bmatrix};$$

$$f(\boldsymbol{R}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}) \\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}) \end{bmatrix}, \quad \varphi(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{R}) \\ \boldsymbol{M}_s(\boldsymbol{R}) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ — электрический и магнитный сторонние токи, расположенные вне поверхности Σ, $\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{M}_s(\boldsymbol{R})$ — на поверхности, $\boldsymbol{z}_0$ — нормаль, направленная из первой среды во вторую, $\hat{I}$ — единичный тензор. Исходная система уравнений, состоящая из дифференциального уравнения вне Σ и граничных условий на Σ, имеет вид

$$dx(\boldsymbol{R}) = f(\boldsymbol{R}); \tag{2а}$$

$$bx_2(\boldsymbol{r}) - bx_1(\boldsymbol{r}) = \varphi(\boldsymbol{r}). \tag{2б}$$

Решение этой задачи записывается известным образом:

$$x(\boldsymbol{R}) = \int h(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') f(\boldsymbol{R}') d\boldsymbol{R}' + \int h(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') \varphi(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}', \tag{3}$$

где $h(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ — матрица 2×2, компонентами которой являются тензоры Грина электромагнитного поля:

$$h(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') = \begin{bmatrix} \hat{G}_{ee}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') & \hat{G}_{em}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') \\ \hat{G}_{me}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') & \hat{G}_{mm}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Тензоры Грина являются решением системы уравнений, которая получается после подстановки выражения (3) в уравнения (2). В частности, для компонент матрицы $h(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}')$ получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\nabla \times \hat{G}_{ee}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') - ik\mu(\boldsymbol{R}) \hat{G}_{me}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') = 0, \\ &\nabla \times \hat{G}_{em}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') - ik\mu(\boldsymbol{R}) \hat{G}_{mm}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') = 0, \\ &\nabla \times \hat{G}_{me}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') + ik\varepsilon(\boldsymbol{R}) \hat{G}_{ee}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') = 0, \\ &\nabla \times \hat{G}_{mm}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') + ik\varepsilon(\boldsymbol{R}) \hat{G}_{em}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{z}_0 \times [\hat{G}^2_{ee}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \hat{G}^1_{ee}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')] \hat{I}_t = 0, \\ &\boldsymbol{z}_0 \times [\hat{G}^2_{em}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \hat{G}^1_{em}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')] \hat{I}_t = -(4\pi/c) \hat{I}_t \delta_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'), \\ &\boldsymbol{z}_0 \times [\hat{G}^2_{me}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \hat{G}^1_{me}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')] \hat{I}_t = (4\pi/c) \hat{I}_t \delta_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'), \\ &\boldsymbol{z}_0 \times [\hat{G}^2_{mm}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \hat{G}^1_{mm}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')] \hat{I}_t = 0 \qquad (\boldsymbol{r} \in \Sigma), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\hat{I}_t$ — тензор, выделяющий касательную к Σ составляющую вектора (поверхностные источники имеют только тангенциальные к границе раздела Σ компоненты), $\delta_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')$ — «поверхностная» дельта-функция. Верхние индексы 1 и 2, сопровождающие тензоры Грина, указывают, что точка наблюдения принадлежит соответственно либо области *1*, либо *2*; применительно к граничным условиям (6) это означает, что предельный переход $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{r}$ совершается со стороны первой либо второй области.

2. ПОЛУЧЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ

Пусть $\zeta(\boldsymbol{r})$ описывает гауссовы случайные отклонения границы раздела сред *1* и *2*, занимающих области $z \lessgtr \zeta(\boldsymbol{r})$, от средней границы раздела, совпадающей с плоскостью Σ.

На поверхности $z = \zeta(\boldsymbol{r})$ ставятся условия непрерывности тангенциальных к ней компонент электрического и магнитного полей. Источники на поверхностях $z = \zeta(\boldsymbol{r})$, Σ и в их окрестности отсутствуют. Полагая, что большие отклонения границы практически нереализуемы и что неровности пологие, перенесем исходные точные граничные условия на шероховатой поверхности для тангенциальных компонент случайного поля на «подстилающую» поверхность Σ с помощью разложения по малому параметру ζ аналогично [1]. Удерживая первые неисчезающие члены, получим приближенные граничные условия для случайного поля на невозмущенной границе раздела Σ, которые в принятой здесь форме записи имеют вид

$$\boldsymbol{b}x_2(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{b}x_1(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{w}x_2(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{w}x_1(\boldsymbol{r}),$$

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{v} \\ \hat{v} & 0 \end{bmatrix}; \tag{7}$$

$$\hat{v} = (c/4\pi)\,[\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{r}) \times \hat{I}_z - \boldsymbol{z}_0 \times \hat{I}(\partial/\partial z)], \tag{8}$$

$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{r}) = \nabla_t \zeta(\boldsymbol{r})$, ∇_t — проекция градиента на плоскость Σ, $\hat{I}_z$ — тензор, выделяющий нормальную компоненту вектора.

Рассматривая правую часть в граничных условиях (7) как некоторые поверхностные источники $\varphi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{w}x_2(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{w}x_1(\boldsymbol{r})$, перейдем с помощью представления (3) к интегральному уравнению, которое запишем по отдельности для первой и второй сред:

$$x_i(\boldsymbol{R}) = \overset{0}{x}_i(\boldsymbol{R}) + \int_\Sigma h_i(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{w}\,[x_2(\boldsymbol{r}') - x_1(\boldsymbol{r}')]\,d\boldsymbol{r}',$$

$$x_i(\boldsymbol{R}) \equiv x(\boldsymbol{R}), \qquad h_i(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') \equiv h(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') \qquad (\boldsymbol{R} \in i,\ i = 1{,}2). \tag{9}$$

Здесь $\overset{0}{x}(\boldsymbol{R}) = \int h(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')\, f(\boldsymbol{R}')\, d\boldsymbol{R}'$ — поле в отсутствие шероховатостей, которое согласно разд. 1 данной статьи считается известным.

Запишем для уравнения из (9) в матричной форме

$$X = \overset{0}{X} + \hat{H}\hat{V}X, \quad \hat{B}X = \hat{V}X, \tag{10}$$

где обозначено

$$X = \begin{bmatrix} x_2(\boldsymbol{R}) \\ x_1(\boldsymbol{R}) \end{bmatrix}, \quad \overset{0}{X} = \begin{bmatrix} \overset{0}{x}_2(\boldsymbol{R}) \\ \overset{0}{x}_1(\boldsymbol{R}) \end{bmatrix},$$

$$\hat{H} = \int_\Sigma \begin{bmatrix} h_2(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') & 0 \\ h_1(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}') & 0 \end{bmatrix} d\boldsymbol{r}', \tag{11}$$

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} & -\boldsymbol{w} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & -\boldsymbol{b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Это уравнение можно усреднить по ансамблю реализаций случайной величины ζ с помощью диаграммной техники [1] и получить в результате этой процедуры уравнение для среднего поля $\langle X\rangle$. Ограничиваясь приближением Бурре, которое получается, если совершить в (10) одну итерацию и усреднить полученное таким путем уравнение, размыкая корреляцию $\langle \hat{V}\hat{H}\hat{V}X\rangle$ как $\langle \hat{V}\hat{H}\hat{V}\rangle\langle X\rangle$, приходим к уравнению для средней величины $\langle X\rangle$:

$$\langle X\rangle = \overset{0}{X} + \hat{H}\hat{Q}\langle X\rangle, \quad \hat{Q} = \langle \hat{V}\hat{H}\hat{V}\rangle. \tag{12}$$

Действуя на это уравнение граничным оператором $\hat{B}$, получаем эквивалентные граничные условия для среднего поля $\langle X\rangle$ на невозмущенной поверхности Σ:

$$\hat{B}\langle X\rangle = \hat{Q}\langle X\rangle. \tag{13}$$

Учитывая определения величин в (11) и (1), которые входят в соотношение (13), можно записать эти граничные условия для векторов $\langle \boldsymbol{E}\rangle$ $\langle \boldsymbol{H}\rangle$ (скобки статистического усреднения при векторах поля для простоты записи опускаем):

$$\{\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r})\} = (4\pi/c)\,\boldsymbol{z}_0 \times \langle \hat{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \int [\hat{G}^2_{em}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \hat{G}^1_{em}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')] \cdot$$
$$\cdot \hat{v}(\boldsymbol{r}')\rangle \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\}\, d\boldsymbol{r}' - (4\pi/c)\,\boldsymbol{z}_0 \times \Big\langle \hat{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \int [\hat{G}^2_{ee}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \hat{G}^1_{ee}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')] \cdot \tag{14}$$
$$\cdot \hat{v}(\boldsymbol{r}')\Big\rangle \{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\}\, d\boldsymbol{r}', \quad \hat{\boldsymbol{E}}_t = \hat{I}_t \boldsymbol{E}.$$

Второе граничное условие получается, если в (14) заменить $\boldsymbol{z}_0 \leftrightarrow -\boldsymbol{z}_0$, $\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{H}$ и поменять индексы тензоров Грина «e» $\leftrightarrow$ «m».

Здесь и далее фигурные скобки означают разность между предельными значениями на соответствующей поверхности заключенных в них величин со стороны второй и первой сред — $\{\boldsymbol{E}\} \equiv \boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1$, $\{\boldsymbol{H}\} \equiv \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1$.

С помощью граничных условий (6) и уравнений (5) выразим фигурирующие в (14) предельные значения тензоров Грина со стороны первой среды через предельные значения тензоров Грина со стороны второй среды (можно и наоборот). Для скалярных величин $\varepsilon(\boldsymbol{R})$, $\mu(\boldsymbol{R})$ в результате несложных, но громоздких вычислений получаем эквивалентные граничные условия для векторов электромагнитного поля в окончательном виде:

$$\{\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r})\} = (\sigma^2/ik)\,[k^2\mu_1(\boldsymbol{r}) + \nabla_t(1/\varepsilon_1(\boldsymbol{r}))\nabla_t] \cdot \boldsymbol{z}_0 \times$$
$$\times (\partial/\partial z)\{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\} + \sigma^2(ikc/4\pi)\{\mu(\boldsymbol{r})\}\,\boldsymbol{z}_0 \times$$
$$\times \int_\Sigma [\hat{G}^2_{me}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \hat{R}(\boldsymbol{H}) - \hat{G}^2_{mm}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \hat{R}(\boldsymbol{E})] \times \tag{15a}$$
$$\times \boldsymbol{z}_0\, d\boldsymbol{r}' - \sigma^2(c/4\pi)\,\nabla_t\,[1 - (\varepsilon_2(\boldsymbol{r})/\varepsilon_1(\boldsymbol{r}))]\,\boldsymbol{z}_0 \cdot$$
$$\cdot \int_\Sigma [\hat{G}^2_{ee}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \hat{R}(\boldsymbol{H}) - \hat{G}^2_{em}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \hat{R}(\boldsymbol{E})] \times \boldsymbol{z}_0\, d\boldsymbol{r}';$$

$$\{H_t(r)\} = (i\sigma^2/k)\,[k^2\varepsilon_1(r) + \nabla_t(1/\mu_1(r))\nabla_t]\cdot z_0 \times$$
$$\times (\partial/\partial z)\{E(r)\} + \sigma^2(ikc/4\pi)\{\varepsilon(r)\}\, z_0 \times$$
$$\times \int\limits_\Sigma [\hat{G}^2_{em}(r, r')\cdot\hat{R}(E) - \hat{G}^2_{ee}(r, r')\cdot\hat{R}(H)] \times z_0 dr' +$$
$$+ \sigma^2(c/4\pi)\nabla_t[1-(\mu_2(r)/\mu_1(r))]\, z_0\cdot \int\limits_\Sigma [\hat{G}^2_{mm}(r, r') \times \tag{15б}$$
$$\times \hat{R}(E) - \hat{G}^2_{me}(r,r')\cdot\hat{R}(H)] \times z_0 dr',$$
$$\hat{R}(E) \equiv W(r, r')(\partial/\partial z')\{E_t(r')\} + \{E_z(r')\}\nabla'_t W(r, r'),$$
$$\hat{R}(E) \leftrightarrow \hat{R}(H), \quad \text{если} \quad E \leftrightarrow H.$$

Здесь σ — дисперсия неровностей, $W(r, r') = \sigma^{-2}\langle\zeta(r)\zeta(r')\rangle$ — коэффициент корреляции.

Как видим, подобно импедансным условиям [1] эти двухсторонние граничные условия для среднего поля также являются нелокальными вследствие статистической связи между случайными неровностями на расстояниях порядка интервала корреляции от точки наблюдения r (в этих пределах ведется интегрирование справа в (15)). Первые слагаемые в правых частях эквивалентных граничных условий описывают локальные связи полей через среднюю границу раздела.

3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Граничные соотношения (15) получены для произвольной зависимости параметров обеих сред от пространственных координат. В некоторых практически важных случаях этой зависимости векторные задачи электродинамики удается свести к скалярным. Результаты решения этих задач можно использовать при построении тензоров Грина, которые входят в подынтегральные функции соотношений (15).

Компоненты тензоров Грина с помощью соотношений двойственности можно выразить через проекции полей, создаваемых точечными источниками (электрическим и магнитным), которые ориентированы вдоль координатных осей. Для слоистой среды с $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $\mu = 1$ эти поля сравнительно просто выражаются через скалярные потенциалы, что позволяет преобразовать граничные условия (15) к более удобному виду.

Запишем граничные условия, выраженные через скалярные потенциалы, в случае статистически однородных шероховатостей, когда $W(r, r') \equiv W(r - r')$, для пространственных гармоник $E(z, \varkappa) \times \times \exp(i\varkappa r)$, $H(z, \varkappa)\exp(i\varkappa r)$ среднего поля, $\varkappa = (\varkappa_x, \varkappa_y)$ — волновой вектор. В результате приходим к эквивалентным граничным условиям в $\varkappa$-представлении:

$$\{E_t\} = (\sigma^2/ik\varepsilon_2)(k^2\varepsilon_2 - \varkappa\varkappa)\cdot z_0 \times (\partial/\partial z)\{H\} +$$
$$+ \sigma^2\{1/\varepsilon\}\,\varkappa \int \varkappa'\cdot[\mathrm{V}\tilde{R}(E) + z_0 \times \tilde{R}(H)(1/ik\varepsilon_2)(\partial \mathrm{V}/\partial z)]\, d\varkappa',$$
$$\{H_t\} = -(\sigma^2/ik)(k^2\varepsilon_1 - \varkappa\varkappa)\cdot z_0 \times (\partial/\partial z)\{E\} + \tag{16}$$
$$+ i\sigma^2 k\{\varepsilon\}\, z_0 \times \int [(\varkappa'\varkappa'/\varepsilon_2)(\partial \mathrm{V}/\partial z) - \varkappa' \times \varkappa' \times \hat{I}(\partial \mathrm{U}/\partial \xi)]\cdot$$
$$\cdot\tilde{R}(E)\,\varkappa'^{-2}\, d\varkappa' + \sigma^2 k^2\{\varepsilon\}\int [\varkappa' \times \varkappa' \times \hat{I}/k^2\varepsilon_2)(\partial^2 \mathrm{U}/\partial z\,\partial\xi) -$$

$$- \varkappa'\varkappa' \mathrm{U}] \cdot \tilde{R}(\boldsymbol{H}) \varkappa'^{-2} d\varkappa';$$

$$z = +0,\ \xi = +0,\ \boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{E}(z, \varkappa),\ \boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{H}(z, \varkappa),$$

$$\tilde{R}(\boldsymbol{E}) \equiv W(\varkappa - \varkappa')(\partial/\partial z)\{\boldsymbol{E}_t(z, \varkappa)\} - i(\varkappa - \varkappa') W(\varkappa - \varkappa') \times$$

$$\times \{E_z(z, \varkappa)\},\quad \tilde{R}(\boldsymbol{E}) \leftrightarrow \tilde{R}(\boldsymbol{H}),\quad \boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{H},$$

$$\mathrm{V} \equiv \mathrm{V}(z, \xi, \varkappa'),\quad \mathrm{U} \equiv \mathrm{U}(z, \xi, \varkappa'),$$

$$W(\varkappa) = (2\pi)^{-2} \int W(\boldsymbol{r}) \exp(-i\varkappa \boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}.$$

Скалярные потенциалы $\mathrm{V}(z, \xi, \varkappa)$, $\mathrm{U}(z, \xi, \varkappa)$ являются решением следующих краевых задач:

$$\begin{gathered} [\varepsilon(z)(\partial/\partial z)(1/\varepsilon(z))(\partial/\partial z) + k^2\varepsilon(z) - \varkappa^2]\mathrm{V} = \varepsilon(z)\delta(z - \xi), \\ [(\partial^2/\partial z^2) + k^2\varepsilon(z) - \varkappa^2]\mathrm{U} = \delta(z - \xi), \end{gathered} \tag{17}$$

а также удовлетворяют условиям излучения при $z \to \pm\infty$. Если при $z = z_0$ расположена проводящая плоскость, которая ограничивает рассматриваемое пространство, на ней $\mathrm{U} = \partial\mathrm{V}/\partial z = 0$.

Интегрирование в (16) по переменной $\varkappa'$ производится в бесконечных пределах. Поскольку величины $\boldsymbol{E}(z, \varkappa)$, $\boldsymbol{H}(z, \varkappa)$, которые встречаются под интегралами в выражениях $\tilde{R}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$, не зависят от переменной интегрирования $\varkappa'$, граничные условия для пространственных гармоник в $\varkappa$-представлении являются локальными.

Граничные условия (15), (16) для статистически изотропных шероховатостей, когда коэффициент корреляции зависит только от r, распадаются на два независимых набора граничных условий — для горизонтально поляризованного поля и вертикально поляризованного поля. Как и в случае односторонних граничных условий, «такое распадение характерно лишь для среднего поля и обусловлено исключительно изотропией неровностей» ([1], стр. 83).

4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Граничные условия (15), (16) для среднего поля относятся к случаю, когда поле существует в обеих средах. Если первая среда является идеально проводящей, электромагнитное поле в ней равно нулю, а на шероховатой границе $z = \zeta(\boldsymbol{r})$ случайное электрическое поле во второй среде имеет равные нулю тангенциальные компоненты. Эквивалентные граничные условия для среднего электрического поля на невозмущенной границе $z = 0$ в приближении Бурре для этого случая можно формально получить из граничного условия (14) для электрического поля, если в нем опустить все величины, относящиеся к первой среде (т. е. несущие индекс 1) или содержащие магнитное поле (в граничных условиях на случайной проводящей поверхности $z = \zeta(\boldsymbol{r})$ магнитное поле не участвует). Таким образом, мы приходим к одностороннему граничному условию для среднего электрического поля:

$$\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r}) = (4\pi/c)\, z_0 \times \left\langle \hat{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \int \hat{G}_{em}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \hat{v}(\boldsymbol{r}') \right\rangle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}'. \tag{18}$$

Для статистически однородных шероховатостей, слоистой среды с $\mu = 1$, $\varepsilon = \varepsilon(z)$ пространственная гармоника $\boldsymbol{E}(z, \varkappa) \exp(i\varkappa \boldsymbol{r})$ среднего поля подчиняется эквивалентному граничному условию, которое получается из (18) с помощью потенциалов $V(z, \xi, \varkappa)$, $U(z, \xi, \varkappa)$, определяемых соотношениями (17). В результате получаем

$$\boldsymbol{E}_t = \sigma^2 \int [\mathrm{V}(z, \xi, \boldsymbol{\varkappa}') (\boldsymbol{\varkappa} - k^2 \varepsilon (\boldsymbol{\varkappa}/\varkappa'^2)) (\boldsymbol{\varkappa}'/\varepsilon) + \tag{19}$$

$$+ (\partial^2 \mathrm{U}(z, \xi, \varkappa')/\partial z \partial \xi) (\boldsymbol{\varkappa}' \times \boldsymbol{\varkappa}' \times \hat{I}/\varkappa'^2)] \cdot \widetilde{R}(\boldsymbol{E})\, d\boldsymbol{\varkappa}',$$

$$z = +0, \quad \xi = +0.$$

Здесь $\widetilde{R}(\boldsymbol{E})$ дается соответствующим выражением в (16) с учетом того, что поле в нижней среде равно нулю и, следовательно, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}|_{z=+0}$; потенциалы $U(z, \xi, \varkappa)$, $V(z, \xi, \varkappa)$ при $z = +0$ подчиняются граничному условию $U = \partial V/\partial z = 0$.

Граничные условия (19) обладают теми же свойствами, что и граничные условия (16) (распадаются на две системы для изотропных шероховатостей, носят нелокальный характер).

Для свободного пространства ($\varepsilon = \mu \equiv 1$) над проводящей шероховатой поверхностью граничные условия (18) переходят в известные соотношения [3] (см. также [1], стр. 82, формула (10)). В этом нетрудно убедиться и с помощью соотношения (19), если учесть, что для этого случая скалярные потенциалы имеют вид

$$\mathrm{U}(z, \xi, \varkappa) = (1/2i\gamma) [\exp (i\gamma |z - \xi|) - \exp (i\gamma (z + \xi))], \tag{20}$$

$$\mathrm{V}(z, \xi, \varkappa) = (1/2i\gamma) [\exp (i\gamma |z - \xi|) + \exp (i\gamma (z + \xi))],$$

$$\gamma \equiv \sqrt{k^2 - \varkappa^2}, \ \operatorname{Im} \gamma \geqslant 0.$$

Подставляя эти выражения в правую часть формулы (19), умножая полученное выражение на $\exp(i\boldsymbol{\varkappa r})$ и интегрируя по $\boldsymbol{\varkappa}$ в бесконечных пределах, получим следующие граничные условия для $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = \int \boldsymbol{E}(z, \boldsymbol{\varkappa}) \exp (i\boldsymbol{\varkappa r})\, d\boldsymbol{\varkappa}$:

$$\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r}) = -(\sigma^2/2\pi) \lim_{z \to +0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{\Sigma} \{\exp [ik (\rho^2 + z^2)^{1/2}]/(\rho^2 + z^2)^{1/2}\} \times \tag{21}$$

$$\times \hat{R}(\boldsymbol{E})\, d\boldsymbol{r}' + (\sigma^2/2\pi) \int_{\Sigma} [\exp(ik\rho)/\rho] \nabla_t \nabla_t' \cdot \hat{R}(\boldsymbol{E})\, d\boldsymbol{r}', \quad \rho = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|,$$

которые совпадают с граничными условиями из упомянутых выше работ (оператор $\hat{R}(\boldsymbol{E})$ определен в (16)).

Полученные нами двухсторонние граничные условия (15), (16) являются решением поставленной задачи. Поскольку они получены в приближении Бурре теории многократного рассеяния, то тем самым область их применимости ограничивается учетом бесконечной подпоследовательности многократных рассеяний на случайных возмущениях границы [1, 5]. В ряде случаев этого оказывается достаточно, что делает их особенно удобными, когда исследуются поля, формирующиеся в результате многократного рассеяния на случайных возмущениях, например, при распространении волн в открытых волноводах со статистически неровными границами. В частности, они могут оказаться полезными для исследования волн и сигналов в оптических волокнах со ступенчатым изменением показателя преломления по сечению, в которых, как известно, омические потери уже сейчас близки к нижнему теоретическому пределу, а неизбежные шероховатости границ могут оказаться существенным фактором потерь и изменения дисперсии из-за накапливающихся эффектов, обусловленных рассеянием на шероховатостях при больших длинах линий передачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972.
2. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.
3. Басс Ф. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1960, 3, № 1, с 72.
4. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978. — Т. 1.
5. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию 25 ноября 1980 г.

BILATERAL BOUNDARY CONDITIONS FOR THE MEAN ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE CASE OF ROUGH SURFACE

N. P. Zhuk, O. A. Tret'yakov

In Bourret approximation bilateral equivalent boundary conditions have been obtained for the mean electromagnetic field at an undisturbed boundary. These conditions are defined by Gaussian random deviations of the real boundary from this mean surface as well as electromagnetic characteristics of media on both side from it. Roughnesses of the real surface are considered to be small and sloping. For the case of statistically homogeneous roughnesses simplified boundary conditions are found. Particular cases have been considered.

Аннотации депонированных статей

УДК 621.396.677.494

АНТЕННАЯ РЕШЕТКА С МАКСИМАЛЬНЫМ ОТНОШЕНИЕМ МОЩНОСТЕЙ СИГНАЛА И ШУМА

В. Т. Ермолаев, А. Г. Флаксман

Исследуется N-элементная антенная решетка (АР), реализующая максимальное отношение мощности сигнала к мощности шума на выходе. В случае некогерентных источников шума найдена структура оператора, определяющего оптимальные весовые множители в каналах элементов АР. Он выражается в виде линейной комбинации корреляционных матриц шумов в элементах АР, обусловленных излучением отдельных источников. Полученные результаты справедливы не только в случае падения на АР плоской волны, но и тогда, когда поле каждого источника шума можно представить в виде суперпозиции плоских или сферических волн Дано обобщение результатов для распределенных источников шума.

В случае, когда исходные данные об элементах корреляционной матрицы шумов содержат случайные ошибки, решение является случайной величиной, его дисперсия растет при увеличении отношения мощности излучения источников шума к мощности собственного шума АР. В ряде случаев путем введения дополнительного некоррелированного шума в каналы элементов АР можно добиться уменьшения дисперсии в решении. Однако при этом среднее решение будет уже отличаться от точного, причем величина систематического отклонения становится тем больше, чем больше мощность дополнительного шума. В случае одного источника шума получено оптимальное значение мощности дополнительного шума, обеспечивающее минимум суммарной ошибки (случайной и систематической) в решении.

Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 5003-81. Деп. от 2 ноября 1981 г.