УДК 538.574 621.372

ОСОБЕННОСТИ ДВУКРАТНОГО ОТРАЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ОТ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

М. И. Файнгольд

В проблеме рассеяния электромагнитных волн на телах вращения значительный интерес имеет вопрос об отражении на параболической поверхности. Замкнутое решение внешней задачи о рассеянии плоской волны на параболоиде вращения получено в работе [1]. Что касается внутренней задачи, то здесь было детально исследовано поле от дипольного излучателя, помещенного в фокусе идеально проводящего параболоида вращения [2]. Однако в такой постановке это не есть задача о рассеянии.

Именно последняя задача является предметом данной работы, где рассматривается отражение плоской волны, падающей из бесконечности параллельно оси симметрии z на вогнутую поверхность параболоида. Понятие о плоской волне в параболоиде используется в области больших z, где оно становится асимптотически точным.

Существенной особенностью рассеяния плоской волны внутри параболоида является двукратность отражения, что приводит к качественно новому явлению. А именно, после вторичного отражения выходящая волна оказывается сфокусированной вдоль оси симметрии Этот эффект можно наглядно объяснить в рамках лучевого приближения: двукратное отражение в параболоиде сопровождается инверсией, при которой падающие лучи, далекие от оси z, становятся близкими, и обратно. Это приводит к «перебросу» энергии с «периферии» к оси параболоида. Целью данной работы является количественное рассмотрение указанного эффекта и его особенностей

Мы ограничимся случаем $\lambda \ll f$ (λ — длина волны, f — фокусное расстояние), представляющим наибольший практический интерес. Падающую волну считаем квазимонохроматической и неполяризованной. При этих условиях, как известно, распределение интенсивности волнового поля можно достаточно точно описать скалярной функцией U, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad k = 2\pi/\lambda, \tag{1}$$

с граничным условием $U = 0$ на отражающей поверхности [3, 4].

Введем параболические координаты $\xi = r + z$, $\eta = r - z$, где r и $|z|$ — расстояние рассматриваемой точки от фокуса и фокальной плоскости соответственно. С учетом того, что в аксиально-симметричной задаче U не зависит от азимутального угла φ, уравнение (1) в новых координатах приводится к виду

$$\frac{4}{\xi + \eta}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\, \xi\, \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\, \eta\, \frac{\partial}{\partial \eta}\right) U + k^2 U = 0 \tag{2}$$

с простым граничным условием

$$U(\xi_0) = 0, \quad \xi_0 \equiv 2f. \tag{3}$$

Положим

$$U = \exp\left[ik(\xi - \eta)/2\right] v_1(\xi) v_2(\eta). \tag{4}$$

Подставляя это в (2) и разделяя переменные, получим гипергеометрические уравнения

$$\xi \frac{d^2 v_1}{d\xi^2} + (1 + ik\xi)\frac{dv_1}{d\xi} - \beta v_1 = 0; \tag{5а}$$

$$\eta \frac{d^2 v_2}{d\eta^2} + (1 - ik\eta)\frac{dv_2}{d\eta} + \beta v_2 = 0, \tag{5б}$$

где β — параметр разделения

Общее решение уравнений (5) имеет вид [5]

$$v = A\xi^{-\beta} g(\beta, \beta; ik\xi) + B\xi^{\beta-1} e^{-ik\xi} g(1 - \beta, 1 - \beta; -ik\xi), \tag{6}$$

где

$$g(\beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\beta\gamma}{1!\, x} + \frac{\beta(\beta + 1)\gamma(\gamma + 1)}{2!\, x^2} + \cdots$$

Мы ищем частное решение, асимптотика которого содержала бы падающую плоскую волну, сферические волны, возникшие в результате первого отражения, и выходящую волну, возникающую после второго отражения:

$$U \approx U_1 e^{ikz} + U_2(r, \theta) e^{-ikr} + U_3(r, \theta) e^{ikr} + U_4(\rho, z) e^{-ikz}. \tag{7}$$

Здесь U_1, U_2, U_3, U_4 — соответствующие амплитуды, θ — полярный угол, $\rho = \sqrt{\xi\eta}$ — расстояние от оси симметрии.

Составляя с помощью (6) произведение $U \sim v_1 v_2$, убеждаемся, что заданное условие на бесконечности (падающая волна плоская, $U_1 =$ const) удовлетворяется только при $\beta = 0$. В этом случае v_1 и v_2 выражаются через интегральную показательную функцию $\mathrm{Ei}(\zeta)$ [6]:

$$v_1 = a_1 [1 + b_1 \mathrm{Ei}(-ik\xi)], \quad v_2 = a_2 [1 + b_2 \mathrm{Ei}(ik\eta)]. \tag{8}$$

При этом произведение $v_1 v_2$ зависит лишь от трех постоянных: $a_1 a_2$, b_1, b_2. Из сравнения с (7) имеем $a_1 a_2 = U_1$. Далее, из аксиальной симметрии и из условия отражения (3) следует

$$b_1 = b_2 = -[\mathrm{Ei}(-2ikf)]^{-1}$$

В результате, возвращаясь к координатам z, r, θ, получим точное решение в виде

$$U = U_1 e^{ikz} \left[1 - \frac{\mathrm{Ei}(-2ikr \cos^2\theta/2)}{\mathrm{Ei}(-2ikf)}\right] \left[1 - \frac{\mathrm{Ei}(2ikr \sin^2\theta/2)}{\mathrm{Ei}(-2ikf)}\right]. \tag{9}$$

При достаточно больших kf, r, θ, используя асимптотическое представление $\mathrm{Ei}(\zeta)$, получим из (9)

$$U \approx U_1 \left\{e^{ikz} + \frac{f}{r}\,\frac{e^{ik(2f-r)}}{\cos^2\theta/2} - \frac{f}{r}\,\frac{e^{ik(r-2f)}}{\sin^2\theta/2} + \frac{4f^2}{\rho^2} e^{-ikz}\right\}. \tag{10}$$

Сравнивая это с асимптотикой (7), находим амплитуды U_2, U_3, U_4. Отметим, что угловое распределение интенсивности расходящейся волны, описываемое амплитудой U_3, оказывается совпадающим с Резерфордовским распределением при кулоновском рассеянии заряженных частиц. Следовательно, параболоид преобразует плоскую волну в сферическую таким образом, что фотоны расходятся от фокуса, как если бы они были нерелятивистскими частицами с массой m и зарядом q, рассеянными на помещенном в фокусе фиктивном точечном заряде $q = \hbar k (2f/m)^{1/2}$ [7].

Амплитуда U_4 описывает вторично отраженную волну, выходящую вдоль оси z с интенсивностью, зависящей от ρ по закону

$$U_4^2 = 16\,(f^4/\rho^4)\,U_1^2. \tag{11}$$

Область применимости выражений (10), (11) определена условиями $k\xi \gg 1$, $k\eta \gg 1$, т. е. ξ, $\eta > \lambda$, или, в цилиндрических координатах, $\rho^2 > \lambda z$. При достаточно малых λ формула (11) остается справедливой для $\rho \ll 2f$ и описывает резкое усиление выходящей волны вблизи оси симметрии

В области $\rho^2 < \lambda z$ следует использовать точную формулу (9). При $\rho \to 0$, используя представление $\mathrm{Ei}(\zeta)$ для $|\zeta| \ll 1$, получаем:

$$U \to U_1 \cdot \ln(z/k\rho^2) \to \infty \tag{12}$$

Таким образом, амплитуда выходящей волны логарифмически расходится на оси симметрии.

Эти выводы получены из точного решения задачи для бесконечного параболоида. Для параболоида конечных размеров основные результаты сохранятся, если

$$\lambda/4f \ll 4f/\rho_{\text{вх}} < 1, \tag{13}$$

где $\rho_{\text{вх}}$ — радиус входного отверстия. Параболоид, удовлетворяющий второму из неравенств (13), существенно отличается от используемых: он должен быть достаточно глубоким, чтобы обеспечить двукратность отражения. Тому же требованию служит левое из неравенств (13). При этом волны, отраженные оставшейся поверхностью, искажаются слабо. В результате в глубоком параболоиде при $\lambda \ll 2f$ по-прежнему должен возникать эффект осевой фокусировки, однако вместо бесконечной интенсивности на оси z образуется «провал» с радиусом $\rho_{\text{вых}}$, оцениваемом с помощью элементарных геометрических соображений:

$$\rho_{\text{вых}} \approx 4f^2/\rho_{\text{вх}} \tag{14}$$

Возмущение отраженных волн, вызванное устранением остальной поверхности, носит характер френелевских осцилляций интенсивности и приводит к размытию радиуса «провала» на величину порядка

$$\delta\rho \approx \rho_{\text{вх}} (\lambda/f)^{1/2}. \tag{15}$$

При этом на краю «провала» интенсивность выходящей волны существенно выше, чем входящей. Однако, в отличие от случая бесконечного параболоида, эта интенсивность должна убывать с ростом $|z|$ как z^{-2} вследствие дифракционной расходимости пучка. Угол расходимости определяется отношением $\theta_d \approx \lambda/\rho_{\text{вых}} \approx \lambda\rho_{\text{вх}}/4f^2$. При $\theta_d \ll 1$, т. е. $\lambda \ll 4f^2/\rho_{\text{вх}}$, выходящая волна имеет характер «лучевой трубки» вплоть до расстояний порядка

$$z_m \approx \frac{\rho_{\text{вых}}}{\theta_d} \approx \frac{\rho^2_{\text{вых}}}{\lambda} \approx 16 \frac{f^4}{\lambda\rho^2_{\text{вх}}} = 4\left(\frac{2f}{\rho_{\text{вх}}}\right)^4 \frac{f}{\lambda} l, \tag{16}$$

т. е. существенно бо́льших длины $l = \rho^2_{\text{вх}}/4f$ самого параболоида (при $\lambda < 64 f^5/\rho^4_{\text{вх}}$). Лишь в области $z \gg z_m$ волновое поле начинает напоминать обычную картину рассеяния.

Таким образом, рассмотренное явление отличается от обычного отражения весьма специфическими особенностями, а именно:

1) в двукратно отраженной волне наблюдается радикальное перераспределенис энергии в поперечном сечении выходящего пучка, приводящее к фокусировке последнего вдоль оси симметрии;

2) если при отражении от плоской или слабо вогнутой поверхности площади сечений падающего и выходящего пучков прямо пропорциональны друг другу, то в рассмотренном случае, благодаря отмеченному выше эффекту инверсии, между ними наблюдается обратно пропорциональная зависимость Это позволяет существенно увеличивать (или уменьшать) интенсивность отраженной волны за счет сравнительно небольшого изменения ширины падающего пучка. В целом рассмотренный эффект можно использовать для эффективного преобразования потоков направленного излучения.

Автор выражает благодарность В. Л. Винецкому, Я. А Смородинскому и М. С. Соскину за обсуждение работы и ценные замечания

ЛИТЕРАТУРА

1. Craige E. Schensted. — J. Appl. Phys., 1955, **26**, № 3, p. 306.
2. Фок В. А. — В сб.. Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения.— М.: Сов. радио, 1957, с. 5.
3. Борн М., Вольф Э Основы оптики — М: Наука, 1973, с 719.
4. Вайнштейн Л А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М: Сов. радио, 1966, с 475
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М Квантовая механика — М: Физматгиз, 1963, с. 702.
6. Янке Е, Эмде Ф, Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1968, с 344.
7. Файнгольд М И. Труды Ульяновского гос. пед ин-та Сер физ мат., 1964, **18**, вып. 5, с. 46

Институт физики
АН УССР

Поступила в редакцию
9 января 1981 г.

УДК 538.132

ЯВЛЕНИЕ БРЮСТЕРА ПРИ НЕКОМПЛАНАРНОМ ОТРАЖЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛН

А. И. Кириленко

Отражение электромагнитных волн под углом Брюстера широко используется для формирования полей с заданной структурой, и этот частный случай отражения неизменно находится в центре внимания исследователей. Существующая теория этого явления разработана только для случая компланарного падения плоских волн [1–4]. В данной работе она обобщается для случая некомпланарного падения, когда вектор фазовой нормали $\boldsymbol{e}_1$, вектор амплитудной нормали $\boldsymbol{e}_2$ волны и нормаль $\boldsymbol{q} \sim \{0, 0, 1\}$ к границе раздела сред не лежат в одной плоскости Будем пользоваться декартовой системой координат с границей раздела сред $z = 0$ и исходить из следующего представления решений уравнений Максвелла для падающей неоднородной волны:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= A_s\,[\boldsymbol{qe}] - A_p\,[\boldsymbol{e}\,[\boldsymbol{qe}]], \\ \boldsymbol{H} &= NA_s\,[\boldsymbol{e}\,[\boldsymbol{qe}]] + NA_p\,[\boldsymbol{qe}], \end{aligned} \tag{1}$$

где множитель $\exp\{i[\omega t - k(\boldsymbol{mr})]\}$ опущен, $N = n - i\varkappa$ — показатель преломления, $\boldsymbol{m} = N\boldsymbol{e} = N(\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{m}_1 + i\boldsymbol{m}_2$ — вектор рефракции, $\boldsymbol{e}_1 \sim \operatorname{ch}\vartheta\{\sin\alpha, 0, \cos\alpha\}$ — вектор волновой, а $\boldsymbol{e}_2 \sim \operatorname{sh}\vartheta\{\cos\alpha\cos\eta, \sin\eta, -\sin\alpha\cos\eta\}$ — амплитудной нормали, α — угол падения, ϑ — параметр неоднородности, η — параметр некомпланарности