5 Microwave spectral tables, NBS, 1968, IV, p. 3
6. Казаков В. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 7, с. 877.
7. Таунс Ч., Шавлов А. — Радиоспектроскопия. М.: — ИЛ, 1959.
8. Helms D. A., Gordy W. — J. Mol. Spectr., 1978, 69, p 473.
9. Wensink W. A. Thesis Utrecht University, 1979.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
3 февраля 1981 г.

УДК 538.56 : 519.25

ПРИМЕНЕНИЕ МАРКОВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ ФЛУКТУАЦИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ, РАССЕЯННОГО СИСТЕМОЙ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

А. Г. Рогачевский

До последнего времени марковские уравнения для моментов излучения исследовались, в основном, в случае плавно неоднородных сред (ПС) [1]. В работе [2] получены марковские уравнения для моментов излучения, рассеянного системой частиц, находящихся в ПС. При этом предполагается, что частицы много больше длины волны; ПС и частицы предполагаются статистически независимыми

Рассмотрим асимптотические решения уравнений работы [2] в случае узконаправленных пучков. Будем пренебрегать «широкоугольной» компонентой $U_п$ поля излучения, обусловленной преломлениями и отражениями на частицах среды. Это возможно, в частности, для оптически жестких частиц, т. е при $|n-1| \gtrsim 1$, где n — показатель преломления В важном случае, когда частицы рассеивают в свою зону Фраунгофера, достаточно условия $\theta_d \ll |n-1|$ [3, 4],где $\theta_d \sim (ka)^{-1}$ — угол дифракции, k — волновое число, a — размер частиц. В этом случае приближение $U_п = 0$ может быть названо дифракционным.

1. Сначала рассмотрим общий случай частиц в ПС, предполагая, что $a \ll l$, где l — радиус когерентности излучения в ПС без частиц. Это условие может выполняться, например, в атмосферной оптике при наличии осадков в турбулентности одновременно. Пусть $U(\rho, z) = v(\rho, z)\exp(ikz)$ — поле излучения в такой двухфазной среде. На примере второго момента $\Gamma_{1,1} = \langle v(\rho', z)\, v^*(\rho'', z)\rangle$ покажем, что решение марковских уравнений сводится к нахождению моментов в случае ПС без частиц и в случае частиц в пустом пространстве. Будем искать $\Gamma_{1,1}$ в виде $\Gamma_{1,1}(\rho', \rho'', z) = \Gamma_c\Gamma_A$, где Γ_c — второй момент в случае ПС без частиц. Тогда марковское уравнение для $\Gamma_{1,1}$ [2] примет вид

$$\Gamma_c\partial\Gamma_A/\partial z - i/2k\,[2(\nabla'\Gamma_c)(\nabla'\Gamma_A) - 2(\nabla''\Gamma_c)(\nabla''\Gamma_A) + \\ + \Gamma_c(\Delta' - \Delta'')\Gamma_A] + c\bar{s}_{1,1}(\rho' - \rho'')\Gamma_c\Gamma_A = 0, \tag{1}$$

где операторы ∇', Δ' и ∇'', Δ'' соответствуют переменным $\rho' = (x', y')$ и $\rho'' = (x'', y'')$, c — концентрация частиц, $s_{1,1}$ $(\rho' - \rho'')$ — площадь объединения геометрооптических теней за частицами, сдвинутыми на $\rho' - \rho''$ относительно друг друга, усреднение $s_{1,1}$ идет по размерам и форме частиц. Так как $\nabla'\Gamma_c, \nabla''\Gamma_c \sim l^{-1}$, то Γ_A можно искать в виде ряда по степеням l^{-1} (фактически по степеням a/l): $\Gamma_A = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots$, $\Gamma_n \sim l^{-n}$. Нетрудно записать цепочку уравнений теории возмущений для функций Γ_n. Очевидно, что Γ_0 равно второму моменту Γ_a в случае частиц в пустом пространстве (согласно (1) $\nabla\Gamma_a \gtrsim a^{-1}$). Таким образом, имеем: $\Gamma_{1,1} = \Gamma_c\Gamma_a + O(a/l)$. Аналогично, для любого момента $\Gamma_{n,m}$ (в обозначениях [1]) получаем: $\Gamma_{n,m} = \Gamma^c_{n,m}\Gamma^a_{n,m} + O(a/l)$.

2. Рассмотрим марковские уравнения [2] в случае частиц в пустом пространстве (или в однородной среде). Решение уравнения для $\Gamma_{1,1}$ известно [1]. Поэтому при широком пучке (плоская падающая волна $U_0 = \exp(ikz)$) наибольший интерес имеет уравнение для четвертого момента вида $\Gamma_4(\rho', \rho'', z) = \langle v(\rho_1', z)\, v(\rho_2', z)\, v^*(\rho_1'', z)\, v^*(\rho_2'', z)\rangle$, где $\rho' = (\rho_2' - \rho_1' + \rho_2'' - \rho_1'')/2$, $\rho'' = (\rho_2' - \rho_1' - \rho_2'' + \rho_1'')/2$ [1]. Рассмотрим асимптотические решения марковских уравнений на примере уравнения для Γ_4. В безразмерных координатах $\zeta = z/L$, $\rho_1 = \rho'/a$, $\rho_2 = \rho''/a$, где L — длина трассы, имеем уравнение

$$\partial\Gamma_4/\partial\zeta - iD\nabla_1\nabla_2\Gamma_4 + tS_4(\rho_1, \rho_2)\Gamma_4 = 0, \tag{2}$$

где $D = L/ka^2$, $t = c\overline{s}L$, $\overline{s}$ — средняя площадь тени за частицей, $S_4(\rho_1, \rho_2) = s_{2,2}(\rho_1, \rho_2)/\overline{s}$; $s_{2,2}(\rho_1, \rho_2)$ — площадь объединения областей тени за частицами, «центры» которых расположены в точках $\rho_1', \rho_2', \rho_1'', \rho_2''$. Область существенного изменения функции $S_4(\rho_1, \rho_2)$ порядка единицы, т. е. в уравнении (2) естественным образом выделены основные параметры системы частиц: волновой параметр D и оптическая толща $\tau = 2t$. При $D \to 0$, т. е. в приближении геометрической оптики получаем известный результат [5]: $\Gamma_4 = \exp(-tS_4)$ при $z = L$, т. е. $\zeta = 1$). Таким образом, операторы ∇_1, ∇_2 в (2) при $D \neq 0$ учитывают дифракцию излучения на частицах.

Так как $S_4 \leqslant 4$, то асимптотические решения (2) нетрудно получить с помощью теории возмущений Пусть $t \ll 1$ и $\Gamma_4 = \Gamma^{(0)} + \Gamma^{(1)} + \dots$ — ряд по степеням t. Тогда $\Gamma^{(0)} = \Gamma_4|_{t=0} = 1$, а $\Gamma^{(1)}$ дается формулой

$$\Gamma^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \zeta)|_{z=L} = -t \int_0^1 d\zeta' \iint d^2\rho_1' \, d^2\rho_2' \, G_4(\rho_1 - \rho_1', \rho_2 - \rho_2', 1 - \zeta') \, S_4(\rho_1', \rho_2'),$$

где функция Грина уравнения (2), взятого при $t = 0$, равна [6]

$$G_4(\rho_1 - \rho_1', \rho_2 - \rho_2', \zeta - \zeta') = [2\pi D(\zeta - \zeta')]^{-2} \exp[i(\rho_1 - \rho_1')(\rho_2 - \rho_2')/D(\zeta - \zeta')].$$

Нетрудно видеть, что $\Gamma^{(0)} + \Gamma^{(1)}$ дает Γ_4 в приближении однократного рассеяния.

Пусть $D \ll 1$; тем же способом находим поправку $\Gamma_4^{(1)}$ порядка D к геометрооптическому приближению $\Gamma_4^{(0)} = \exp(-tS_4)$:

$$\Gamma_4^{(1)} = itD\,(t/3\,\nabla_1 S_4 \nabla_2 S_4 - 1/2 \nabla_1 \nabla_2 S_4) \exp(-t S_4).$$

Аналогичным образом при $t \ll 1$ или $D \ll 1$ могут быть рассмотрены уравнения для любых моментов $\Gamma_{n,m}$ (в обозначениях [1]).

Рассмотрим асимптотическое решение (2) при $D \gg 1$. Пусть $A = \alpha a$ — максимальный размер частиц, т. е. $\alpha \sim 1$. Тогда имеем $S_4(\rho_1, \rho_2) = 2\overline{s}_{1,1}(\rho_1)/\overline{s}$ при $\rho_2 \geqslant \alpha$ и $S_4(\rho_1, \rho_2) = 2\overline{s}_{1,1}(\rho_2)/\overline{s}$ при $\rho_1 \geqslant \alpha$. Поэтому при $\rho_1 \geqslant \alpha$ и при $\rho_2 \geqslant \alpha$ уравнению (2) удовлетворяет четвертый момент гауссова поля $\Gamma_4^G(\rho_1, \rho_2, \zeta) = \exp[-2t\zeta S_2(\rho_1)] + \exp[-2t\zeta S_2(\rho_2)] - \exp(-4t\zeta)$, где $S_2(\rho) = \overline{s}_{1,1}(\rho)/\overline{s}$. Пусть $\Gamma_4 = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots$ — ряд по степеням $D^{-1} \ll 1$. Тогда, согласно (2), для Γ_0 имеем уравнение $\nabla_1 \nabla_2 \Gamma_0 = 0$ и граничное условие $\Gamma_0 = \Gamma_4^G$ при $\rho_1 \geqslant \alpha$ и при $\rho_2 \geqslant \alpha$. В результате получаем, что $\Gamma_0 = \Gamma_4^G$ при всех значениях ρ_1, ρ_2. Нетрудно записать уравнения теории возмущений для функций Γ_n, $n = 1, 2, \dots$, из которых следуют граничные условия: $\Gamma_n = 0$ при $\rho_1, \rho_2 \geqslant \alpha$. Таким образом, с точностью до величин порядка $D^{-1} = ka^2/L$ имеем $\Gamma_4 = \Gamma_4^G$. Эта оценка существенно уточняет полученную в [7], где было показано, что $\Gamma_4 = \Gamma_4^G$ с точностью до ka^2/d (d — среднее расстояние между частицами).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч II. — М.: Наука, 1978.
2. Боровой А. Г.— Изв. вузов — Радиофизика (в печати).
3. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами.— М.: ИЛ, 1961.
4. Wang Ting-i, Clifford S. F. — J. Opt. Soc. Am., 1975, **65**, № 8, p. 927.
5. Боровой А. Г., Крутиков В. А.— Опт. и спектр., 1976, **40**, вып. 4, с. 728.
6. Якушкин И. Г.— Изв. вузов — Радиофизика, 1975, **18**, № 11, с. 1660.
7. Borovoy A. G., Kabanov M. V., Saveliev B. A. — Appl. Opt., 1975, **14**, № 11, p. 2731.

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
5 января 1981 г.,
после сокращения
17 июня 1981 г.