

УДК 534.87

РАЗМЫТЫЕ ПОЛУТЕНЕВЫЕ КАУСТИКИ*Ю. И. Орлов, С. К. Тропкин*

Получена равномерная асимптотика, определяющая волновое поле в плавно неоднородной среде в окрестности размытой границы тени при наличии неособой полутеневой каустики. Рассмотрены полутеневые каустики дифракционных и геометрооптических лучей. Решение содержит обобщенную функцию Вебера и ее две первые частные производные, а все величины в нем выражаются через амплитуды и эйконалы лучей, проходящих через точку наблюдения. В соответствующих областях пространства полученное решение переходит в полутеневую асимптотику на основе функции параболического цилиндра, каустическую асимптотику на основе функции Эйри и в приближение геометрической теории дифракции. Приводятся примеры задач, в которых применимо полученное решение.

ВВЕДЕНИЕ

Полутеневые каустики, т. е. каустики, расположенные в области полутени, рассматривались в работах [1]. Решения, полученные в [1], учитывают совместное влияние фокусировки лучевых пучков и их дифракционного расплывания на границе тени. В [1] рассматривалась френелевская (резкая) граница тени, и поэтому полученные там решения неприменимы в случаях, когда образуются области полутени более сложного типа [2], возникающие в окрестности так называемых размытых границ тени. Равномерная полутеневая асимптотика, справедливая вблизи размытых границ тени при отсутствии каустик, получена в работе [2].

В настоящей работе дается обобщение решения [2] на случай размытых полутеневых каустик, образуемых дифракционными или геометрооптическими лучами. При построении решения в качестве эталонной используется обобщенная функция Вебера. Сравнение асимптотики решения с формулами геометрической теории дифракции (ГТД) позволяет определить все неизвестные величины через характеристики лучевого поля. В частном случае полученное решение совпадает с известной равномерной асимптотикой на основе обобщенной функции Эйри [1].

Примерами задач, в которых возникают размытые границы тени и каустики, являются: а) дифракция на криволинейной поверхности с ребром в случае, когда амплитуда падающего поля обращается в нуль на луче, проходящем через кромку; б) распространение волновых пучков и определение ближних полей апертурных антенн со спадающими к краям амплитудными распределениями; в) дифракция волны на коническом острие; г) дифракция волн на границе, имеющей разрыв кривизны или ее производных, а также производных импеданса, изменяющегося вдоль границы; д) определение поля в области полутени боковой волны, распространяющейся вдоль плоской границы раздела двух диэлектрических сред. Образование каустик в этих задачах может быть обусловлено кривизной фронта дифрагирующей волны, криволинейностью кромки тела, а также влиянием неоднородной среды.

1. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Будем искать асимптотическое (при $k \rightarrow \infty$) решение волнового уравнения

$$\Delta u + k^2 n^2(\mathbf{r}) u = 0 \quad (1)$$

в плавно неоднородной среде с показателем преломления $n(\mathbf{r})$ в следующем виде:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} k^{\beta-\nu/3+1/6} \left\{ F_\nu(\xi, \eta) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\mathbf{r})}{(ik)^m} + \frac{i}{k^{1/3}} \frac{\partial}{\partial \xi} F_\nu(\xi, \eta) \times \right. \\ \left. \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(\mathbf{r})}{(ik)^m} + \frac{i}{k^{2/3}} \frac{\partial}{\partial \eta} F_\nu(\xi, \eta) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m(\mathbf{r})}{(ik)^m} \right\} e^{ik\theta(\mathbf{r})}, \quad (2)$$

где $\xi = k^{2/3} \xi_0$, $\eta = k^{1/3} \eta_0$; $A_m, B_m, C_m, \theta, \xi_0, \eta_0$ — неизвестные функции координат \mathbf{r} , имеющие по k порядок $0(1)^*$; $F_\nu(\xi, \eta)$ — обобщенная функция Вебера, определяемая интегралом (П.1), приведенным в Приложении (см. также [4]), а выбор индекса ν обсуждается ниже. Величина β в (2) введена с целью нормировки по большому параметру задачи. Если геометрооптическое поле имеет по k порядок $0(1)$, то, как будет показано ниже, в случае каустики дифракционных лучей $\beta = \nu + 1/2$, а в случае каустики геометрооптических лучей $\beta = 0$.

Для определения неизвестных функций в (2) подставим (2) в уравнение (1) и после обычной асимптотической процедуры, аналогичной [1], получим следующие уравнения для $\xi_0, \eta_0, \theta, A_0, B_0, C_0$:

$$(\nabla\theta)^2 - \xi_0(\nabla\xi_0)^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad (\nabla\theta\nabla\xi_0) = 0; \quad (3)$$

$$(\eta_0^2 + \xi_0)(\nabla\eta_0)^2 + 2\eta_0(\nabla\xi_0\nabla\eta_0) + 2(\nabla\theta\nabla\eta_0) + (\nabla\xi_0)^2 = 0; \quad (4)$$

$$L_1(A_0) - L_2(B_0) + B_0\nu[\eta_0(\nabla\eta_0)^2 + 2(\nabla\eta_0\nabla\xi_0)] - A_0\nu(\nabla\eta_0)^2 = 0; \quad (5)$$

$$L_2(A_0) + \xi_0 L_1(B_0) - A_0\nu[\eta_0(\nabla\eta_0)^2 + 2(\nabla\eta_0\nabla\xi_0)] + B_0[(\nabla\xi_0)^2 - \nu\xi_0(\nabla\eta_0)^2] = 0; \quad (6)$$

$$L_3(A_0) - L_1(B_0) - \eta_0 L_3(B_0) - \eta_0 L_1(C_0) - L_2(C_0) - (\eta_0^2 + \xi_0) L_3(C_0) + \quad (7)$$

$$+ B_0(\nu - 1)(\nabla\eta_0)^2 + 2C_0(\nu - 1)[\eta_0(\nabla\eta_0)^2 + (\nabla\eta_0\nabla\xi_0)] = 0,$$

где

$$L_1(\psi) \equiv 2\nabla\psi\nabla\xi_0 + \psi\Delta\xi_0, \quad L_2(\psi) \equiv 2\nabla\psi\nabla\theta + \psi\Delta\theta,$$

$$L_3(\psi) \equiv 2\nabla\psi\nabla\eta_0 + \psi\Delta\eta_0.$$

Для решения уравнений (3)–(7) рассмотрим асимптотику выражения (2) вдали от каустики и от области полутени. Для этого воспользуемся приведенной в Приложении асимптотикой (П.4) функции $F_\nu(\xi, \eta)$ при $-\xi \gg 1$, $\sqrt{-\xi} - |\eta| \gg 1$, с учетом которой главный член решения (2) принимает следующий вид:

$$u(\mathbf{r}) = U_+ e^{ik\varphi_+} + U_- e^{ik\varphi_-} + U_0 e^{ik\varphi_0}, \quad (8)$$

где

$$U_\pm = \frac{1}{2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4} \mp i\frac{\pi}{4}\right) (-\eta_0 \mp \sqrt{-\xi_0})^\nu \{A_0(-\xi_0)^{-1/4} \pm \pm B_0(-\xi_0)^{1/4}\} k^\beta; \quad (9)$$

* Порядок по k , как обычно, понимается как порядок по безразмерному большому параметру kL , где L — характерный масштаб изменения поля и среды [3].

$$U_0 = \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\nu + 1) \sin \pi\nu \exp\left(i \frac{\pi}{2} (\nu + 1)\right) (-\eta_0^2 - \xi_0)^{-\nu-1} \times$$

$$\times \{A_0 - B_0\eta_0 - C_0(\eta_0^2 + \xi_0)\} k^{\beta-\nu-1/2}, \quad (10)$$

$$\varphi_{\pm} = \theta \pm (2/3)(-\xi_0)^{3/2}, \quad \varphi_0 = \theta + (1/3)\eta_0^3 + \eta_0 \xi_0.$$

Если теперь, используя (9), (10), выразить искомые функции A_0 , B_0 , C_0 , θ , ξ_0 , η_0 через величины U_{\pm} , φ_{\pm} , U_0 , φ_0 и подставить их в уравнения (3)–(7), то последние после достаточно громоздких выкладок можно свести к уравнениям переноса

$$\operatorname{div}(U_{\pm}^2 \nabla \varphi_{\pm}) = U_{\pm} (2\nabla U_{\pm} \nabla \varphi_{\pm} + U_{\pm} \Delta \varphi_{\pm}) = 0, \quad (11)$$

$$\operatorname{div}(U_0^2 \nabla \varphi_0) = U_0 (2\nabla U_0 \nabla \varphi_0 + U_0 \Delta \varphi_0) = 0$$

и к уравнениям эйконала

$$(\nabla \varphi_{\pm})^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad (\nabla \varphi_0)^2 = n^2(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Поэтому величины U_{\pm} , U_0 являются лучевыми амплитудами, а φ_{\pm} , φ_0 — эйконалами, т. е. $U_{\pm} \equiv U_{1,2}$, $U_0 \equiv U_3$, $\varphi_{\pm} \equiv \varphi_{1,2}$, $\varphi_0 \equiv \varphi_3$. Через $U_{1,2,3}$, $\varphi_{1,2,3}$ здесь обозначены соответственно амплитуды и эйконалы лучей, определяемые формулами ГТД; эти величины ниже предполагаются известными. Тогда с учетом выражений (9) и (10) главный (нулевой) член решения (2) можно записать в следующем окончательном виде:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(ik\theta - i \frac{\pi}{4}\right) \left\{ AF_{\nu}(\xi, \eta) + iB \frac{\partial}{\partial \xi} F_{\nu}(\xi, \eta) + \right.$$

$$\left. + iC \frac{\partial}{\partial \eta} F_{\nu}(\xi, \eta) \right\}, \quad (13)$$

где

$$A = (-\xi)^{1/4} \{iU_1(-\eta - \sqrt{-\xi})^{-\nu} + U_2(-\eta + \sqrt{-\xi})^{-\nu}\},$$

$$B = (-\xi)^{-1/4} \{iU_1(-\eta - \sqrt{-\xi})^{-\nu} - U_2(-\eta + \sqrt{-\xi})^{-\nu}\}, \quad (14)$$

$$C = \frac{1}{\eta^2 + \xi} (A - B\eta) - \frac{\Gamma(1-\nu)}{\sqrt{\pi}^{\nu}} \exp\left(i \frac{\pi}{4} - i \frac{\pi}{2} \nu\right) (-\eta^2 - \xi)^{\nu} U_3,$$

$$\xi = -\left\{\frac{3k}{4}(\varphi_1 - \varphi_2)\right\}^{2/3}, \quad \theta = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$\frac{1}{3}\eta^3 + \eta\xi = k(\varphi_3 - \theta).$$

В формулах (14) и ниже индекс 1 относится к лучу, приходящему в точку наблюдения в области света после касания каустики, а индекс 2 — до ее касания. Ветвь корня кубического уравнения для η выбирается из условия $\eta = -\sqrt{-\xi}$ при $\varphi_3 = \varphi_1$ и $\eta = \sqrt{-\xi}$ при $\varphi_3 = \varphi_2$; эти условия выполняются на границе тени (на граничном луче).

2. РАЗМЫТЫЕ ПОЛУТЕНЕВЫЕ КАУСТИКИ ДИФРАКЦИОННЫХ ЛУЧЕЙ ($\nu < -1/2$)

Рассмотрим случай $\nu < -1/2$. Из формул (9), (10) следует оценка $U_{1,2} = O(k^{\nu+1/2} U_3)$. Поэтому $U_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$ следует отождествлять с дифракционным, а U_3 , φ_3 — с геометрооптическим полем, т. е.

$$U_{1,2} \equiv U_{д1,2}, \quad \varphi_{1,2} \equiv \varphi_{д1,2}, \quad U_3 \equiv U_{г.о.}, \quad \varphi_3 \equiv \varphi_{г.о.}, \quad (15)$$

где $U_{д1,2}$, $\varphi_{д1,2}$, $U_{г.о.}$, $\varphi_{г.о.}$ — амплитуды и эйконалы соответственно двух дифракционных и одного геометрооптического луча, при этом $\beta = \nu + 1/2$. Индекс $\nu < -1/2$ в решении (13) определяется порядком поля дифракционных лучей по большому параметру задачи в соответствии с оценкой $U_{д1,2} = O(k^{\nu+1/2} U_{г.о.})$.

Покажем, что решение (13) описывает волновое поле с лучевой структурой, изображенной на рис. 1а. Для этого найдем асимптотику (13) в различных областях.

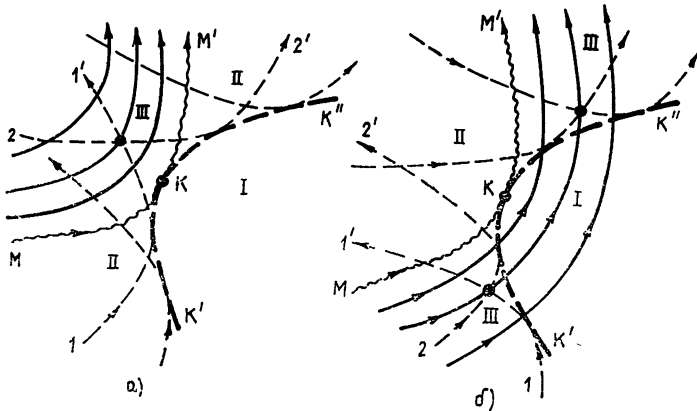


Рис. 1. Размытые полутеневые каустики дифракционных лучей: сплошные линии — геометрооптические лучи, штриховые линии — дифракционные лучи, MKM' — граничный луч (размытая граница тени для геометрооптических лучей), $K'KK''$ — каустика дифракционных лучей

Как показано выше, при $-\xi \gg 1$, $\sqrt{-\xi} - |\eta| \gg 1$ решение асимптотически переходит в выражение (8), которое с учетом (15) приобретает вид

$$u(\mathbf{r}) = U_{д1} e^{ik\varphi_{д1}} + U_{д2} e^{ik\varphi_{д2}} + U_{г.о.} e^{ik\varphi_{г.о.}}, \quad (16)$$

и соответствует формуле ГТД в области трехлучевости III на рис. 1а. Используя асимптотику (П.3) функции $F_\nu(\xi, \eta)$ при $-\xi \gg 1$, $|\eta| - \sqrt{-\xi} \gg 1$, из решения (13) получим формулу ГТД для областей II (рис. 1а):

$$u(\mathbf{r}) = U_{д1} e^{ik\varphi_{д1}} + U_{д2} e^{ik\varphi_{д2}}. \quad (17)$$

Таким образом, дифракционные лучи образуют неограниченную каустику $K'KK''$, а луч MKM' является границей тени для семейства геометрооптических лучей, причем каустика находится в области тени (рис. 1а).

Формулы ГТД (16), (17), как обычно, несправедливы на границе тени и на каустике. Вблизи каустики, но вдали от точки K (рис. 1а) имеем $|\eta| - \text{Re} \sqrt{-\xi} \gg 1$, а ξ — произвольная величина. Подставляя асимптотику (П.5) для $F_\nu(\xi, \eta)$ в решение (13), получим выражение для поля, совпадающее с обычной каустической асимптотикой [5] на основе функции Эйри, которая, как и в [1], справедлива лишь вдали от области полутени.

Вблизи участка KM границы тени, но вдали от каустики, имеем $-\xi \gg 1$, $\sqrt{-\xi} + \eta \gg 1$, а $\sqrt{-\xi} - \eta$ является произвольной величиной. Использование асимптотического выражения (П.7) для $F_\nu(\xi, \eta)$ позволяет из (13) получить полутеневую асимптотику [2] на основе функции

параболического цилиндра. Аналогичная ситуация имеет место и вблизи второго участка границы тени KM' , где $-\xi \gg 1$, $\sqrt{-\xi} - i\eta \gg 1$, а $\sqrt{-\xi} + \eta$ — произвольная величина, и где справедлива асимптотика (П.6) для $F_\nu(\xi, \eta)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае решение (13) представляет собой равномерную асимптотику волнового поля в окрестности неограниченной полутеневого каустики дифракционных лучей, которая расположена в области геометрической тени (рис. 1а).

3. РАЗМЫТЫЕ ПОЛУТЕНЕВЫЕ КАУСТИКИ ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ ($\nu > -1/2$)

В случае $\nu > -1/2$ из оценки $U_3 = O(k^{-\nu-1/2} U_{1,2})$ следует

$$U_{1,2} \equiv U_{г.о1,2}, \quad \varphi_{1,2} \equiv \varphi_{г.о1,2}, \quad U_3 \equiv U_д, \quad \varphi_3 \equiv \varphi_д, \quad (18)$$

где $U_{г.о1,2}$, $\varphi_{г.о1,2}$, $U_д$, $\varphi_д$ — амплитуды и эйконалы соответственно двух геометрических и одного дифракционного лучей; при этом в (9), (10) полагается, что $\beta = 0$. Подчеркнем, что индекс $\nu > -1/2$ в решении (13) определяется теперь из условия $U_д = O(k^{-\nu-1/2} U_{г.о1,2})$.

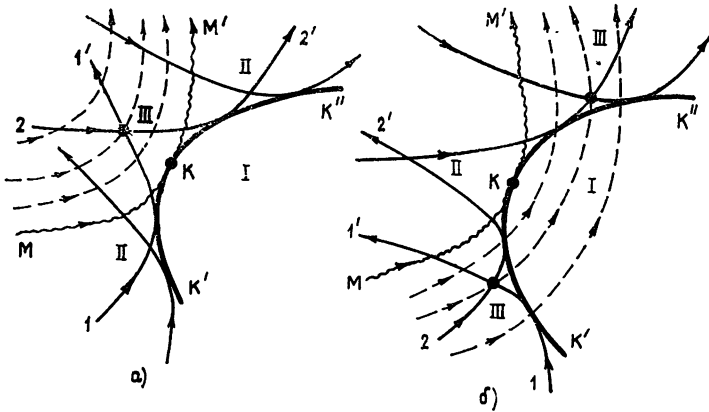


Рис 2 Размытые полутеневые каустики геометрических лучей: сплошные линии — геометрические лучи, штриховые линии — дифракционные лучи, MKM' — граничный луч (размытая граница тени для дифракционных лучей), $K'KK''$ — каустика геометрических лучей

Аналогично ранее рассмотренному случаю ($\nu < -1/2$) можно показать, что теперь полученное решение описывает волновое поле с лучевой структурой, изображенной на рис. 2а. Так, в области III (рис. 2а) справедлива следующая формула ГТД:

$$u(\mathbf{r}) = U_{г.о1} e^{ik\varphi_{г.о1}} + U_{г.о2} e^{ik\varphi_{г.о2}} + U_д e^{ik\varphi_д}. \quad (19)$$

Для областей II формулы ГТД имеют вид

$$u(\mathbf{r}) = U_{г.о1} e^{ik\varphi_{г.о1}} + U_{г.о2} e^{ik\varphi_{г.о2}}. \quad (20)$$

Таким образом, в данном случае геометрические лучи образуют неограниченную каустику $K'KK''$, а луч MKM' является границей тени для семейства дифракционных лучей, причем каустика находится в области тени дифракционной волны.

Вблизи границы тени и в окрестности каустики, но вдали от точки K (рис. 2а), решение (13) асимптотически переходит соответственно

в полутеневое [2] и каустическое [5] решения и представляет собой равномерную асимптотику волнового поля с лучевой структурой, соответствующей рис. 2а.

4. ОБОБЩЕНИЯ РЕШЕНИЯ

Равномерное асимптотическое решение (13) соответствует случаю, когда неограниченная полутеневая каустика находится в области тени лучевого поля $U_3 e^{ikh\varphi_3}$ (рис. 1а и 2а). Рассмотрим теперь ситуацию, когда та же каустика находится в области света этого поля, как это показано на рис. 1б и 2б. Как и ранее, луч $МКМ'$ является границей тени для этих лучей. Равномерная асимптотика поля в этом случае строится аналогичным образом на основе другой (см. Приложение) обобщенной функции Вебера $G_\nu(\xi, \eta)$ и имеет вид

$$u(r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(ik\theta - i\frac{\pi}{4}\right) \left\{ AG_\nu(\xi, \eta) + iB \frac{\partial}{\partial \xi} G_\nu(\xi, \eta) + iC \frac{\partial}{\partial \eta} G_\nu(\xi, \eta) \right\}, \quad (21)$$

где

$$C = \frac{1}{\eta^2 + \xi} (A - B\eta) + \frac{\Gamma(1 - \nu)}{\sqrt{\pi}^\nu} \exp\left(i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}\nu\right) (\eta^2 + \xi)^\nu U_3, \quad (22)$$

а остальные величины даются формулами (14). Как и ранее, случай $\nu < -1/2$ отвечает полутеневой каустике дифракционных лучей (рис. 1б), а случай $\nu > -1/2$ — полутеневой каустике геометрических лучей (рис. 2б). Величины $U_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$, U_3 , φ_3 конкретизируются соответственно формулами (15) или (18).

Отметим, что формулы (14), (22), строго говоря, записаны для областей трехлучевости III, где известны амплитуды и эйконалы всех трех лучей. В остальных областях в формулах (14) и (22), как обычно [5, 6], следует использовать аналитическое продолжение соответствующих лучевых полей.

Условия регулярности решений (13), (21), получаемые с помощью разложения коэффициентов A , B , C по степеням расстояния от каустики и границы тени, сводятся к условиям регулярности полутеневого поля, падающего на каустику. Эти условия требуют определенного поведения лучевых полей вблизи границы тени. Проведенные исследования показали, что полученные условия выполняются для широкого класса дифракционных задач, в том числе указанных во Введении (см. также раздел 6). Одним из условий ограниченности решения в случае, когда поле дифракционных лучей существует по обе стороны от граничного луча $МКМ'$ (случай $\nu < -1/2$, рис. 1), является условие $U_{\Gamma_0} \sim z^{-\nu-1}$, где z — расстояние по нормали от граничного луча. Если луч $МКМ'$ является границей тени для дифракционных лучей (случай $\nu > -1/2$, рис. 2), то аналогичное условие записывается в виде $U_{\Gamma_0} \sim z^\nu$.

В некоторых дифракционных задачах указанное условие, определяющее характер геометрического поля, может не выполняться. Однако, если амплитуду U_{Γ_0} удастся представить в виде

$$U_{\Gamma_0} = (U_{\Gamma_0} - U_{\Gamma_0}^0) + U_{\Gamma_0}^0 \equiv \tilde{U}_{\Gamma_0} + U_{\Gamma_0}^0, \quad (23)$$

где $U_{\Gamma_0}^0$ — аналитическая в окрестности граничного луча функция, выбранная так, чтобы амплитуда $\tilde{U}_{\Gamma_0} \equiv (U_{\Gamma_0} - U_{\Gamma_0}^0)$ удовлетворяла записанному выше условию, то в этом случае применима равномерная асимптотика (13), (21) для разностного поля. Тогда коэффициенты A ,

B, C вместо $U_{г.о}$ должны содержать величину $\tilde{U}_{г.о}^*$, что обеспечивает регулярность решения (13) или (21) вблизи границы тени. Равномерная асимптотика поля записывается в виде суммы решения (13) или (21) и дополнительного регулярного члена u^0 , обусловленного введением разностного поля. В случае полутеневого каустики дифракционных лучей (рис. 1) имеем $u^0 = U_{г.о}^0 e^{ik\varphi_{г.о}}$. В ситуации, когда образуется полутеневая каустика геометрооптических лучей (рис. 2), существуют

два геометрооптических луча с амплитудами $U_{г.о1,2} \equiv \tilde{U}_{г.о1,2} + U_{г.о1,2}^0$. В этом случае дополнительные геометрооптические поля $u_{г.о1,2}^0 \equiv U_{г.о1,2}^0 e^{ik\varphi_{г.о1,2}}$ также фокусируются на каустике, и поэтому дополнительный член u^0 записывается в виде каустической асимптотики [5] на основе функции Эйри.

Примерами задач, в которых используется способ, основанный на введении разностного поля $\tilde{U}_{г.о}$, может служить задача об отражении волны от границы, имеющей разрыв кривизны (или ее производных), а также производных импеданса и задача определения поля в области полутени боковой волны.

5. ПРИМЕРЫ

Равномерные асимптотические решения (13) и (21) применимы к задачам, в которых дифракционное поле имеет степенной порядок по k , а лучевые картины отвечают рис. 1 или рис. 2. Примеры таких задач указаны во Введении, а некоторые из них обсуждаются ниже.

а) В частном случае резкой границы тени, когда $\nu = -1$, $U_{д} = O(k^{-1/2} U_{г.о})$ и дифракционные лучи образуют неограниченную каустику, решение (13) или (21) совпадает с полученной в [1] равномерной асимптотикой на основе обобщенной функции Эйри $V(\xi, \eta)$ или $V_2(\xi, \eta)$, причем $V(\xi, \eta) \equiv F_{-1}(\xi, \eta)$, а $V_2(\xi, \eta) \equiv G_{-1}(\xi, \eta)$.

б) При дифракции на поверхности с клиновидной кромкой в случае, когда амплитуда падающего поля имеет нуль порядка α на луче, проходящем через кромку, имеем $U_{д} = O(k^{-\alpha-1/2} U_{г.о})$. Если в этом случае образуется неограниченная полутеневая каустика дифракционных лучей, то равномерная асимптотика поля записывается в виде (13) или (21) с учетом (15), при этом $\nu = -\alpha - 1$.

в) Поле в окрестности размытой полутеневого каустики дифракционных лучей, возникающей при дифракции волны на коническом острие в неоднородной среде, описывается формулами (13) или (21) при $\nu = -3/2$, так как в этом случае $U_{д} = O(k^{-1} U_{г.о})$.

г) При расчете ближних полей апертурных антенн квазилучевыми методами необходимо учитывать возможность возникновения полутеневых дифракционных каустик, поле в окрестности которых определяется формулами (13) или (21). Если амплитуда поля в апертуре (амплитудный закон возбуждения) имеет нуль порядка α на краю апертуры, то $U_{д} = O(k^{-\alpha-1/2} U_{г.о})$ и в решении (13) или (21) следует считать $\nu = -\alpha - 1$.

д) Излучение источника вблизи плоской границы раздела двух неоднородных плоскостойких сред может сопровождаться образованием каустики геометрооптических лучей, расположенной в области полутени боковой волны [2, 8]. Поле в окрестности этой каустики опре-

* Эту замену необходимо учитывать и при оценке индекса ν по порядку поля дифракционных лучей, т.е. следует рассматривать оценку $U_{д} = O(k^{\nu+1/2} \tilde{U}_{г.о})$ в случае полутеневого каустики дифракционных лучей или $U_{д} = O(k^{-\nu-1/2} \tilde{U}_{г.о})$ в случае полутеневого каустики геометрооптических лучей, причем эта оценка должна проводиться в окрестности границы тени.

деляется суммой решения (21) при $\nu = 1/2$ и дополнительного регулярного члена u^0 (см. разд. 4). Решение (21) записывается для разностного поля $\tilde{U}_{r,0} \equiv (U_{r,0} - U_{r,0}^0)$, где величина $U_{r,0}^0$ выбирается в виде $U_{r,0}^0 = U_{r,0}^{rp} (J_{rp}/J)^{1/2}$; при этом $U_{r,0}^{rp}$ — амплитуда геометрооптического луча на границе тени боковой волны, $J = nds/n^0 ds^0$ — расходимость геометрооптических лучей, а J_{rp} — расходимость, вычисленная на границе тени боковой волны. Дополнительный регулярный член u^0 дается обычной каустической асимптотикой [5] на основе функции Эйри.

В заключение отметим, что полученные асимптотические решения допускают обобщения на векторный (электромагнитный) случай, а также на случай размытых полутеневых каустик с точками заострения. Другие типы размытых полутеневых каустик — «оборванные» каустики с размытым краем — могут быть исследованы аналогичным образом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Асимптотические представления обобщенной функции Вебера

Функция $F_\nu(\xi, \eta)$ определяется интегралом

$$F_\nu(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - \eta)^\nu \exp \left[i \left(\frac{1}{3} \tau^3 + \tau \xi \right) \right] d\tau, \quad (\text{П.1})$$

в котором считается, что $(\tau - \eta) = (\eta - \tau)e^{i\pi}$ при $\tau < \eta$, т. е. контур интегрирования обходит точку $\tau = \eta$ сверху.

Функция $G_\nu(\xi, \eta)$ определяется тем же интегралом (П.1), но при этом предполагается, что $(\tau - \eta) = (\eta - \tau)e^{-i\pi}$ при $\tau < \eta$, т. е. контур интегрирования обходит точку $\tau = \eta$ снизу.

Обобщенные функции Вебера $F_\nu(\xi, \eta)$ и $G_\nu(\xi, \eta)$ удовлетворяют параболическому уравнению Леонтовича — Фока

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \xi f - i \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0. \quad (\text{П.2})$$

Приводимые ниже асимптотические формулы для вещественных ξ и η получены из интегрального представления функции с помощью метода перевала и его обобщений [7] с учетом вклада степенной особенности порядка ν в подынтегральном выражении. Ниже используются следующие обозначения: $a_1 = -\eta - \sqrt{-\xi}$, $a_2 = -\eta + \sqrt{-\xi}$, $b = -\frac{2}{3}(-\xi)^{3/2} - \frac{\pi}{4}$, $d = \frac{1}{3}\eta^3 + \eta\xi$, $g = (-\xi)^{-1/4}$, $v(\xi)$ — функция Эйри, $D_\nu(\zeta)$ — функция параболического цилиндра.

1) $-\xi \gg 1$, $|\eta| - \sqrt{-\xi} \gg 1$:

$$F_\nu \approx \sqrt{\pi} g (a_1^\nu e^{ib} + a_2^\nu e^{-ib}); \quad (\text{П.3})$$

2) $-\xi \gg 1$, $\sqrt{-\xi} - |\eta| \gg 1$:

$$F_\nu \approx \sqrt{\pi} g (a_1^\nu e^{ib} + a_2^\nu e^{-ib}) - 2\Gamma(\nu + 1) \sin \pi \nu (-a_1 a_2)^{-\nu-1} \times \\ \times \exp \left(id + i \frac{\pi}{2} \nu \right); \quad (\text{П.4})$$

3) $|\eta| - \text{Re} \sqrt{-\xi} \gg 1$, ξ — любое:

$$F_\nu \approx \sqrt{\pi} [(a_1^\nu + a_2^\nu) v(\xi) + i g^2 (a_1^\nu - a_2^\nu) v'(\xi)]; \quad (\text{П.5})$$

4) $-\xi \gg 1$, $\sqrt{-\xi} - \eta \gg 1$, $\sqrt{-\xi} + \eta$ — любое:

$$F_\nu \approx \sqrt{2\pi} \exp\left(i\frac{\psi_+}{2} + i\frac{\pi}{4}(\nu - 1)\right) \left[\frac{1}{2}(M + N)D(\mu_1) + \frac{1}{\mu_1}(M - N)D'(\mu_1) \right] + \sqrt{\pi} g a_2^\nu e^{-ib}, \quad (\text{П.6})$$

где

$$M = \left(\frac{-\mu_0}{a_1 a_2}\right)^{\nu+1}, \quad N = \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\frac{-a_1}{\mu_0}\right)^\nu, \quad \mu_1 = e^{i3\pi/4} \mu_0, \\ \mu_2 = e^{-i\pi/4} \mu_0, \quad \mu_0 = -\operatorname{sgn} a_1 \sqrt{2\psi_-}, \quad \psi_\pm = b + \frac{\pi}{4} \pm d;$$

5) $-\xi \gg 1$, $\sqrt{-\xi} + \eta \gg 1$, $\sqrt{-\xi} - \eta$ — любое:

$$F_\nu \approx \sqrt{2\pi} \exp\left(i\frac{s_-}{2} + i\frac{\pi}{4}(3\nu + 1)\right) \left[\frac{1}{2}(P + Q)D(\zeta_1) + \frac{1}{\zeta_1}(P - Q)D'(\zeta_1) \right] + \sqrt{\pi} g a_1^\nu e^{ib}, \quad (\text{П.7})$$

где

$$P = \left(\frac{\zeta_0}{a_1 a_2}\right)^{\nu+1}, \quad Q = \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\frac{-a_2}{\zeta_0}\right)^\nu, \quad \zeta_1 = e^{i\pi/4} \zeta_0, \\ \zeta_2 = e^{-i3\pi/4} \zeta_0, \quad \zeta_0 = -\operatorname{sgn} a_2 \sqrt{2s_+}, \quad s_\pm = d \pm \left(b + \frac{\pi}{4}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Орлов Ю. И. Радиотехника и электроника, 1975, 20, № 2, с. 242; 1976; 21, № 1, с. 62
- 2 Орлов Ю. И., Тропкин С. К. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 3, с. 334.
- 3 Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980
- 4 N. Bleistein, J. Math and Mech, 1967, 17, № 6, с. 533
- 5 Кравцов Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1964, 7, № 4, с. 664; Акуст. журн., 1968, 14, № 1, с. 1
- 6 Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции — М.: Связь, 1978.
- 7 N. Bleistein, Comm Pure and Appl. Math, 1966, 19, № 4, p. 353
- 8 Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах — М.: Наука, 1973

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 28 октября 1980 г.

WASHED PENUMBRA CAUSTICS

Yu. I. Orlov, S. K. Tropkin

The authors obtain a uniform asymptotic defining the wave field in a smoothly inhomogeneous medium in the vicinity of the washed boundary of the shadow in the presence of nonparticular penumbra caustics. Penumbra caustics of diffraction and geometrical optical rays are considered. The solution contains the generalized Weber function and its two first particular derivatives and all values in it are expressed through amplitudes and the ray eikonals passing through the point of observation. In the corresponding regions of the space the solution obtained transforms in the penumbra asymptotics on the basis of the parabolic cylinder function, caustic asymptotic, on the basis of Eiry function and in the approximation of the geometrical diffraction theory. Examples of problems are given where the solution obtained are applicable.