

УДК 538.56 : 519.25

## ОТРАЖЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ ОТ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ ПЛОСКОСЛОИСТЫХ СРЕД

С. Н. Гурбатов

Рассматривается отражение сигналов, ограниченных как в пространстве, так и во времени, от случайно-неоднородной плоскослоистой среды с мелкомасштабными неоднородностями. Сигнал на выходе из плоскослоистой среды представляется в виде разложения по плоским монохроматическим волнам падающего сигнала с учетом их коэффициента отражения. Интенсивность отраженной волны выражается через корреляцию коэффициента отражения двух плоских монохроматических волн с различными частотами и волновыми векторами. Рассмотрен режим рассеяния, когда дифракция пучков не существенна. Обсуждается переходный процесс при установлении стационарного режима рассеяния.

Было показано (см., например, [1-6]), что при достаточно большой оптической толщине плоскослоистая среда со случайными мелкомасштабными неоднородностями отражает практически всю падающую волну, т. е. слой играет роль зеркала. В работах [7, 8] были рассмотрены «динамические» характеристики такого зеркала, а именно проведен анализ отражения плоских нестационарных сигналов [7] и монохроматических пучков [8]. В настоящей работе исследуется отражение от плоскослоистой среды нестационарных волновых пучков, т. е. сигналов, ограниченных как в пространстве, так и во времени. Решение этой задачи, кроме самостоятельного интереса, дает ответ и на вопросы, связанные с процессами установления стационарных режимов рассеяния.

Пусть на слой  $z \in [0, L]$  случайно-неоднородной среды справа падает двумерный нестационарный волновой пучок, поле которого в плоскости падения равно  $E_0(t, x)$ . Для плоскослоистой среды естественным представлением волнового поля является разложение его по плоским монохроматическим волнам:

$$E(t, x, z) = \iint A(\omega, \kappa, z) e^{i\omega t - i\kappa x} d\omega d\kappa. \quad (1)$$

В том случае, если вектор электрического поля параллелен плоскости падения, а также для акустических волн, для комплексных амплитуд  $A$  имеем уравнение [9]

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + (k_z^2 + k^2 \Delta \epsilon(z)) A = 0; \quad k = \omega/c, \quad k_z = \sqrt{k^2 - \kappa^2}. \quad (2)$$

Здесь  $\Delta \epsilon(z)$  — флуктуации диэлектрической проницаемости  $\epsilon(z)$  ( $\langle \epsilon \rangle = 1$ ,  $\langle \Delta \epsilon \rangle = 0$ ). Мы считаем, что вне слоя  $\epsilon = 1$ , т. е. в плоскости падения среды согласованы. Разлагая падающее поле по плоским волнам

$$E_0(t, x) = \iint c_0(\omega, \kappa) e^{i\omega t - i\kappa x} d\omega d\kappa \quad (3)$$

и вводя коэффициент отражения плоской монохроматической волны  $R(\omega, \kappa)$ , для отраженного поля имеем

$$E_{\text{отр}}(t, x) = \iint c_0(\omega, \kappa) R(\omega, \kappa) e^{i\omega t - i\kappa x} d\omega d\kappa. \quad (4)$$

Мы будем рассматривать энергетические характеристики отраженного поля, так как средние поля достаточно быстро стремятся к нулю при увеличении толщины слоя. Из (4) для средней интенсивности получим

$$I(t, x) = \langle |E_{\text{отр}}(t, x)|^2 \rangle = \iiint d\omega_1 d\kappa_1 d\omega_2 d\kappa_2 c_0(\omega_1, \kappa_1) \times \\ \times c_0^*(\omega_2, \kappa_2) \langle R(\omega_1, \kappa_1) R^*(\omega_2, \kappa_2) \rangle \exp [it(\omega_1 - \omega_2) - ix(\kappa_1 - \kappa_2)]. \quad (5)$$

Таким образом, для определения средней интенсивности отраженной волны необходимо знать функцию корреляции коэффициента отражения двух плоских волн с частотами  $\omega_1, \omega_2$  и волновыми векторами  $\kappa_1, \kappa_2$ . В дальнейшем будем считать, что на задней границе слоя расположено идеально отражающее зеркало, следовательно,  $|R| = 1$ , плоская волна испытывает только фазовые флуктуации и  $R = \exp\{i\varphi'\}$ . Уравнение для флуктуирующей части фазы  $\varphi = \varphi' + 2k_z z$  коэффициента отражения, которое можно получить из (2), имеет вид [5-8]

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{k^2 \Delta\varepsilon}{k_z} (1 + \cos(\varphi - 2k_z z)). \quad (6)$$

Считая, что флуктуации  $\Delta\varepsilon(z)$  гауссовы, с корреляционной функцией  $\langle \Delta\varepsilon(z) \Delta\varepsilon(z + \rho) \rangle = D \delta(\rho)$ ,  $D = \sigma^2 \rho_*$ , где  $\sigma^2$ ,  $\rho_*$  — дисперсия и длина корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости, нетрудно получить точное уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка (ЭФП) [6] для плотности вероятности  $W(\psi, \varphi_1, z)$ ,  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Будем считать, что на слой падает квазимонохроматическая волна  $\Delta\omega \ll \omega_0$  с достаточно узким волновым спектром  $\Delta\kappa \ll k_z$ . В этом случае достаточно ограничиться рассмотрением корреляции коэффициента отражения двух плоских волн с близкими частотами  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \Delta\omega$  и волновыми векторами  $|\kappa_1 - \kappa_2| \ll \Delta\kappa$ , и точное уравнение ЭФП можно усреднить по периоду  $2\pi/k_z$  [5-8]. Составляя на основе усредненного уравнения ЭФП уравнение для характеристической функции  $\eta(u, z) = \langle \exp\{iu(\varphi'_1 - \varphi'_2)\} \rangle$  и находя аналогично тому, как это делалось в [7, 8], решение этого уравнения при  $z = L \rightarrow \infty$ , получим для корреляции коэффициента отражения двух плоских волн  $\langle R(\omega_1, \kappa_1) \times R^*(\omega_2, \kappa_2) \rangle = \exp\{i(\varphi'_1 - \varphi'_2)\} = \eta(1, \infty) \equiv K$  выражение в виде бесконечной цепной дроби:

$$K(\theta) = \frac{1}{2(1 + i\theta) - \frac{1}{2(1 + i\theta/2) - \frac{1}{2(1 + i\theta/3) - \dots}}}; \quad (7)$$

$$\theta = \frac{2k_z^2}{Dk_0^4} \Delta k_z, \quad \Delta k_z = k_{1z} - k_{2z} = \sqrt{k_1^2 - \kappa_1^2} - \sqrt{k_2^2 - \kappa_2^2}. \quad (8)$$

Здесь  $k_0 = \omega_0/c$ ,  $\omega_0$  — центральная частота квазимонохроматической волны,  $k_{*z} = \sqrt{k_0^2 - \kappa_*^2} = k_0 \cos \theta$ ,  $\theta$  — угол падения пучка на слой, отсчитываемый от нормали к слою.

В общем случае интенсивность отраженной волны  $I(t, x)$ , определяемая четырехкратным интегралом (5), зависит как от интенсивности, так и от фазы падающей волны. Ниже мы будем рассматривать падение квазимонохроматического пучка с достаточно узким угловым спектром, так что  $c(\omega, x)$  сосредоточен вблизи несущей частоты  $\omega \approx \omega_0$

и поперечного волнового вектора  $\kappa \approx \kappa_x = k_0 \sin \theta$ , где  $\theta$  — угол падения. Переходя в (5) к интегрированию по  $\Omega_i = \omega_i - \omega_0$ ,  $\xi_i = \kappa_i - \kappa_x$ , ограничимся в аргументе  $K(\Theta)$  (7), (8) только линейными членами по  $\Omega_i$ ,  $\xi_i$ :

$$\Theta = \frac{2k_z^2}{Dk_0^4} \Delta k_z \approx L_p \left\{ 2 \cos \theta \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{c} - 2 \sin \theta \cos \theta (\xi_1 - \xi_2) \right\}. \quad (9)$$

Здесь введен параметр  $L_p = 1/Dk_0^2$ , имеющий смысл характерного расстояния, на котором происходит перекачка энергии волны в слое из прямой волны в отраженную. Переходя, с учетом (9), к интегрированию в (5) по переменным  $\Omega_1$ ,  $\xi_1$ ,  $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ ,  $\xi = \xi_1 - \xi_2$ , для интенсивности отраженной волны получим

$$I(t, x) = \iint d\Omega d\xi S_0(\Omega, \xi) K \left( \frac{2L_p}{c} \cos \theta \Omega - L_p \sin 2\theta \xi \right) e^{i\Omega t - i\xi x}. \quad (10)$$

Здесь  $S_0(\Omega, \xi)$  — фурье-образ интенсивности падающей волны:

$$\begin{aligned} S_0(\Omega, \xi) &= \iint c_0(\omega_1, \kappa_1) C_0^*(\omega_1 - \Omega, \kappa_1 - \xi) d\omega_1 d\kappa_1 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint I_0(t, x) \exp\{-i\Omega t + i\kappa x\} dt dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (10) видно, что в рассматриваемом приближении интенсивность отраженной волны зависит только от интенсивности падающей волны и не зависит от фазы и длины волны падающего поля. Следовательно, при этом дифракционные эффекты не влияют на среднюю интенсивность отраженной волны. Последнее выполняется, если характерная длина дифракции падающего пучка много больше длины рассеяния  $L_p$  и пучок успевает выйти из слоя раньше, чем он испытает сколь-нибудь заметное дифракционное расплывание. Если характерная ширина пучка равна  $a$ , то дифракционным расплыванием можно пренебречь при [8]

$$L_p/ka^2 \cos \theta \ll 1. \quad (12)$$

Неравенство (12) совпадает с условием, когда можно пренебречь квадратичными членами в разложении (9). Данное приближение может быть названо, таким образом, приближением «геометрической оптики», так как здесь дифракционное расплывание пучка в поперечном сечении не существенно, в то время как взаимодействие встречных волн с учетом многократного рассеяния играет определяющую роль в формировании поля отраженной волны.

Перейдем в (10) к интегрированию по  $\eta = (2L_p/c) \cos \theta \Omega - L_p \sin 2\theta \xi$ ,  $\Omega = \Omega$ , выражая спектр интенсивности падающей волны  $S_0(\Omega, \xi)$  через  $I_0(t, x)$  с помощью (11):

$$\begin{aligned} I(t, x) &= \frac{1}{L_p \sin 2\theta (2\pi)^2} \iiint d\eta d\Omega dt' dx' \times \\ &\times I_0(t', x') K(\eta) \exp \left\{ i\Omega \left( t - t' - \frac{(x - x')}{c \sin \theta} \right) + \frac{i\eta (x - x')}{L_p \sin 2\theta} \right\} = \\ &= \frac{1}{L_p \sin 2\theta} \iint \delta \left( t - t' - \frac{(x - x')}{c \sin \theta} \right) G \left( \frac{x - x'}{L_p \sin 2\theta} \right) I_0(t', x') dt' dx'. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя фильтрующее свойство  $\delta$ -функции, для средней интенсивности отраженной волны получим два эквивалентных выражения:

$$I(t, x) = \int dx' I_0 \left( t - \frac{(x - x')}{c \sin \theta}, x' \right) G \left( \frac{x - x'}{L_p \sin 2\theta} \right) \frac{1}{L_p \sin 2\theta}; \quad (14a)$$

$$I(t, x) = \int dt' I_0(t', x - (t - t') c \sin \theta) G \left( \frac{t - t'}{(2L_p/c) \cos \theta} \right) \frac{1}{(2L_p/c) \cos \theta}. \quad (14b)$$

В формулах (13), (14) функция  $G(y)$  равна фурье-преобразованию от цепной дроби (7):

$$G(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\eta) e^{i\eta y} d\eta. \quad (15)$$

Функция  $G(y)$  равна 0 при  $y < 0$  и монотонно спадает при  $y > 0$ . Расчет показывает, что характерная ширина  $G(y)$  порядка единицы. Из (14) следует, что форма отраженного сигнала определяется как формой падающей волны  $I_0(t, x)$ , так и функцией  $G(y)$ , форма которой совпадает со средней интенсивностью нормально падающей волны с  $I_0(t, x) = \delta(t) * [7]$ :

$$I(t, x) = \frac{1}{(2L_p/c)} G \left( \frac{t}{(2L_p/c)} \right). \quad (16)$$

Структура отраженного сигнала существенно зависит от соотношения между характерной длительностью импульса  $-\tau_0$ , шириной распределения в плоскости падения  $l_0$  и длиной рассеяния  $L_p$ . Рассмотрим ниже несколько предельных случаев.

Пусть падающий пучок достаточно узкий по координате  $x$ . Тогда в интеграле (14) наиболее узким «выкальывающим» множителем является сомножитель, описывающий поперечное распределение поля. Это выполняется, если

$$(\tau_0 c_0 \sin \theta / l_0) \gg 1, \quad (L_p \sin 2\theta / l_0) \gg 1. \quad (17)$$

Представляя формально интенсивность падающей волны как  $I_0(t, x) = F(t)\delta(x)$ , для интенсивности отраженной волны из (14a) получим

$$I(t, x) = \frac{1}{L_p \sin 2\theta} G \left( \frac{x}{L_p \sin 2\theta} \right) F \left( t - \frac{x}{c \sin \theta} \right). \quad (18)$$

Таким образом, при выполнении условий (12), (17) временная форма отраженного импульса совпадает с формой падающего, а его амплитуда монотонно убывает с увеличением расстояния от места входа пучка, что связано с эффектом ослабления падающего импульса в среде из-за многократного рассеяния. Сохранение формы импульса качественно может быть объяснено тем, что в рассматриваемом приближении, когда справедлива «геометрическая оптика», длина пути луча в плоскослоистой среде от точки входа до точки выхода не зависит от числа его отражений (см. рис. 1). Подставляя в (18)  $F(t) = E(t)$ , где  $E(t)$  — единичная функция ( $E(t) = 0, t < 0; E(t) = 1, t > 0$ ), мы получим процесс установления стационарного режима. Из (18) видно, что при  $F(t) =$

\* Отметим, что здесь, как и везде ниже, формальное представление начальной интенсивности в виде дельта-функции означает, что масштаб  $I_0(t, x)$  по данной переменной много меньше остальных масштабов  $I_0$  и  $G$ , но при этом считается, что поле остается квазимонохроматическим и квазиплоским.

$= E(t)$  интенсивность отраженной волны в точке  $x$  выходит на стационарный режим при  $t > x/c \sin \theta$  и  $I(t, x) = 0$  при  $t < x/c \sin \theta$ . Таким образом, граница установления стационарного режима двигается в плоскости отражения со скоростью  $V = c \sin \theta$ . Если рассматривать усредненные характеристики отраженного сигнала, то видно, что усредненная по времени интенсивность совпадает с формой стационарной волны:  $\bar{I}(x) = \int I(t, x) dt = EG(x/L_p \sin 2\theta)/L_p \sin 2\theta$ , где  $E$  — энергия импульса. Для интегральной формы сигнала по времени из (18) имеем

$$\bar{I}(t) = \int I(t, x) dx = \int G(\xi) F\left(t - \frac{2L_p \cos \theta}{c} \xi\right) d\xi. \quad (19)$$

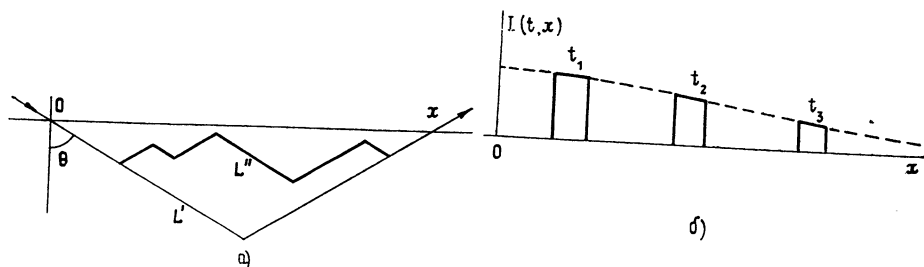


Рис 1 Отражение импульса от плоскослоистой среды.

а) «Траектории лучей» в плоскослоистой среде:  $L' = L'' = x/\sin \theta_0$ .

б) Интенсивность отраженной волны  $I(t_i, x)$  ( $t_1 < t_2 < t_3$ ). Пунктиром изображен амплитудный множитель  $G(x/L_p \sin 2\theta)/L_p \sin 2\theta$ . Падающий импульс — прямоугольный.

Из (19) следует, что при  $\tau_0 \gg 2L_p \cos \theta/c$   $\bar{I}(t)$  повторяет форму падающего импульса  $\bar{I}(t) \approx F(t)$ , а для достаточно короткого импульса  $\tau_0 \ll 2L_p \cos \theta/c$

$$\bar{I}(t) \approx G\left(\frac{t}{(2L_p/c) \cos \theta}\right) \frac{E}{(2L_p/c) \cos \theta} \quad (20)$$

и определяется переходной функцией  $G$  (см. (16)).

В том случае, если выполнены условия

$$(l_0/c \tau_0 \sin \theta) \gg 1, \quad (2L_p \cos \theta/c \tau_0) \gg 1 \quad (21)$$

и в плоскости падения интенсивность падающей волны может быть представлена как  $I_0(t, x) = \delta(t)\Phi(x)$ , из (146) для отраженной волны получим

$$I(t, x) = \frac{1}{(2L_p/c) \cos \theta} G\left(\frac{t}{(2L_p/c) \cos \theta}\right) \Phi(x - tc \sin \theta). \quad (22)$$

В данном случае при  $t = \text{const}$  интенсивность отраженной волны по координате повторяет распределение интенсивности падающей волны, ослабленной из-за многократного рассеяния и убывающей с ростом времени. Временная форма отраженного импульса при  $x = \text{const}$ , как видно из (22), определяется двумя сомножителями, один из которых обусловлен откликом среды на короткий импульс (см. (16), (20)), а второй повторяет форму распределения интенсивности по координате. В частности, из (22) для плоской волны при нормальном падении имеем выражение (16).

В заключение отметим, что сделанное в работе предположение о наличии идеально отражающего зеркала на задней границе не является существенным при  $L \rightarrow \infty$ , так как в силу принципа причинности поле отраженной волны в интервале времен  $t \in [0, 2L/c]$  не зависит от вида граничных условий на задней границе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Беспалов В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1959, 2, № 3, с. 213.
2. Papanicolaou G. C. — SIAM, J. Appl. Math., 1971, 21, p. 13.
3. Рыжов Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 8, с. 1240
4. Кляцкин В. И., Татарский В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 7, с. 1040
5. Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н., Рыжов Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 5, с. 566
6. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах — М.: Наука, 1980.
7. Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 4, с. 442.
8. Аристов С. Н., Гурбатов С. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 8, с. 960.
9. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах — М.: Наука, 1973

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
23 сентября 1980 г.

### REFLECTION OF NONSTATIONARY WAVE BEAMS FROM RANDOMLY INHOMOGENEOUS PLANE STRATIFIED MEDIA

*S. N. Gurbatov*

Reflection of space-time limited signals is considered from a randomly inhomogeneous plane stratified medium with small-scale inhomogeneities. The signal at the output from plane stratified medium is presented in the form of an expansion over plane monochromatic waves of an incident signal taking into account their reflection coefficient. The intensity of the reflected wave is expressed through correlation of the reflection coefficient of two plane monochromatic waves with different frequencies and wave vectors. A scattering regime is considered when the beam diffraction is unessential. The transition process is discussed when the stationary scattering regime is stated.

---

### Аннотации депонированных статей

УДК 538.574

### О НЕРАСЦЕПЛЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА ДАЙСОНА И БЕТЕ — СОЛПИТЕРА

*Ю. Н. Барabanенков, М. И. Калинин*

С помощью обобщенной формулы Фуруцу — Новикова из волнового уравнения Гельмгольца со случайным импульсным потенциалом выводятся точные интегродифференциальные соотношения для среднего поля и функции взаимной когерентности поля, в которые входят в нерасцепленном виде (т. е. под знаком среднего вместе с искомой величиной) случайные ядра  $M$  и  $K$ , зависящие от случайной функции Грина исходного волнового уравнения. Эти ядра — случайные и построены таким образом, что при замене в них случайной функции Грина  $G$  на функцию Грина  $G_0$  свободного пространства они превращаются в неслучайные ядра  $M$  и  $K$  одnogруппового приближения

Статья депонирована в ВИНТИ,  
рег. № 4893-81. Деп. от 26 октября 1981 г.

---