УДК 538.56 : 519.25

О ВЛИЯНИИ СНОСА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПО ТРАССЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПУЧКА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАБОТЫ СИСТЕМ, ОБРАЩАЮЩИХ ВОЛНОВОЙ ФРОНТ

А. Н. Малахов, А. И. Саичев

Обсуждается влияние ветрового сноса турбулентных неоднородностей среды на статистические свойства волны, отраженной от зеркала, обращающего волновой фронт. Вычислены среднее поле и функция когерентности отраженной волны. Показано, что функция когерентности отраженной волны анизотропна за счет выделенного направления сноса неоднородностей среды. Предложен один из возможных способов статистического анализа влияния сноса турбулентных неоднородностей в случае, когда наибольшее относительное смещение неоднородностей меньше внутреннего масштаба неоднородностей.

1. В последнее время повышается интерес к системам фазового сопряжения, обращающим волновой фронт падающих на них волн (см., например, [1, 2]). Этот интерес обусловлен тем, что системы фазового сопряжения эффективно подавляют амплитудно-фазовые искажения пучка, возникающие, например, при распространении пучка в турбулентной среде. Однако идеальная компенсация турбулентных искажений пучка системами фазового сопряжения практически недостижима по многим причинам. Это и ограниченность размеров систем фазового сопряжения, и особенности их конструкции — многие из проектируемых систем фазового сопряжения обращают лишь волновой фронт падающей волны, но не учитывают информации о профиле ее интенсивности. Сюда относится также несовершенство обращения волнового фронта реальными системами и, наконец, изменение неоднородностей среды во времени, в результате чего падающий и отраженный пучки распространяются, вообще говоря, по разным неоднородностям. Некоторые вопросы эффективности работы систем фазового сопряжения, связанные с особенностями их конструкции и ограниченностью размеров, обсуждались, например, в работах [3, 4]. Данная статья посвящена анализу влияния на работу систем фазового сопряжения ветрового сноса турбулентных неоднородностей среды. Учет этого эффекта тем более важен, чем протяженней трасса распространения пучка. Во всем остальном будем считать систему фазового сопряжения идеальной.

2. Пусть в плоскости $x = 0$ помещено безграничное зеркало, идеально обращающее волновой фронт падающей волны (зеркало ОВФ), а в плоскости $x = L$ излучается волна с начальным профилем $u(\rho)$. Будем интересоваться отраженной от зеркала ОВФ волной $v(\rho)$ в плоскости излучателя $x = L$:

$$v(\rho) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^*(\rho - s)\,\gamma\left(L,\ s,\ \rho - \frac{s}{2}\right) ds,$$
$$\gamma(x,\ s,\ \rho) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1\left(0,\ p;\ x,\ \rho + \frac{s}{2}\right) G_2\left(0,\ p;\ x,\ \rho - \frac{s}{2}\right) dp. \quad (1)$$

Здесь G_1, G_2 — соответственно функции Грина отраженной и падающей волн. В квазиоптическом приближении и предположении замороженной турбулентности $\gamma(x, s, \rho)$ удовлетворяет, с учетом теоремы взаимности [5, 6], уравнению

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{i}{k}(\nabla_s\nabla_\rho)\gamma = \frac{ik}{2}\left[\varepsilon\left(x, \rho + \frac{s+\alpha x}{2}\right) - \varepsilon\left(x, \rho - \frac{s+\alpha x}{2}\right)\right]\gamma, \tag{2}$$

$$\gamma(0, s, \rho) = \delta(s),$$

где $\varepsilon(x, \rho)$ — турбулентные неоднородности диэлектрической проницаемости среды, $\alpha = 2V_\perp/c$, c — скорость света, $V_\perp$ — поперечная компонента скорости сноса неоднородностей среды. Так как по продольной координате x пучок обычно меняется гораздо медленнее, чем по поперечным координатам, влиянием сноса неоднородностей вдоль распространения пучка можно пренебречь, если выполняется неравенство $V_\parallel/V_\perp \ll L_0/a_{\text{эфф}}$, где $a_{\text{эфф}}$ — эффективные размеры пучка, а L_0 — внешний масштаб турбулентных неоднородностей среды, который мы приняли за масштаб изменения пучка по продольной координате. Обычно продольный масштаб пучка больше L_0, так что приведенное неравенство является достаточным. В дальнейшем будем считать его выполненным.

3. Найдем вначале среднее отраженное поле. Из (1) видно, что

$$\langle v(\rho)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(\rho - s)\left\langle\gamma\left(L, s, \rho - \frac{s}{2}\right)\right\rangle ds. \tag{3}$$

Уравнение для $\langle\gamma\rangle$ в диффузионном приближении, как следует из (2), таково:

$$\frac{\partial\langle\gamma\rangle}{\partial x} - \frac{i}{k}(\nabla_s\nabla_\rho)\langle\gamma\rangle + \frac{k^2}{4}D(s+\alpha x)\langle\gamma\rangle = 0,$$

$$\langle\gamma(0, s, \rho)\rangle = \delta(s).$$

Здесь обозначено:

$$D(s) = A(0) - A(s), \quad A(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle\varepsilon(0, 0)\varepsilon(x, s)\rangle dx.$$

Решение уравнения для $\langle\gamma\rangle$:

$$\langle\gamma(x, s, \rho)\rangle = \delta(s)\exp\left\{-(k^2/4)\int_0^x D(\alpha z)\,dz\right\}.$$

Подставляя его в (3), придем к следующему выражению для среднего отраженного поля:

$$\langle v(\rho)\rangle = u^*(\rho)\exp\left\{-(k^2/4)\int_0^L D(\alpha x)\,dx\right\}. \tag{4}$$

Наибольшее значение аргумента входящей сюда структурной функции — αL. Для оценки примем $\alpha \sim 10^{-8}$, а внутренний масштаб турбулентности $l_0 \sim 1$ *см*. Тогда для трасс $L < 10^8$ *см* выражение (4) можно переписать:

$$\langle v(\rho)\rangle = u^*(\rho)\exp\left\{-k^2D\int_0^L \alpha^2x^2\,dx\right\}, \tag{5}$$

где $D = 0{,}41\, C_\varepsilon^2\, l_0^{-1/3}$ [7]. Если скорость сноса постоянна вдоль всей трассы распространения, то выражение (5) дает

$$\langle v(\rho) \rangle = u^*(\rho) \exp\{-(k^2/3) D L^3 \alpha^2\} \tag{6}$$

и среднее отраженное поле практически совпадает с комплексно-сопряженным начальным полем на расстояниях $k^2 D L^3 \alpha^2 \ll 1$ или $\alpha L \ll \ll \rho_к(L)$, где $\rho_к(L) = (k^2 D L)^{-1/2}$ — радиус когерентности первоначально плоской волны, прошедшей турбулентную трассу длины L. Чтобы оценить влияние флуктуаций скорости сноса на степень восстановления отраженной волной начального поля $u(\rho)$, будем считать α случайной гауссовой функцией x с функцией ковариации $\beta(z)$, средним $\langle \alpha \rangle$ и длиной корреляции l_α. Рассмотрим два предельных случая $l_\alpha \gg L$ и $l_\alpha \ll L$. В первом случае, усреднив (6) по ансамблю гауссовой случайной величины α, получим

$$\langle v(\rho) \rangle = u^*(\rho) \times \exp\left\{-\frac{(\langle \alpha \rangle L)^2}{3\rho_k^2(L) + 2\sigma^2 L^2}\right\} \sqrt{\frac{3\rho_k^2(L)}{3\rho_k^2(L) + 2\sigma^2 L^2}}, \tag{7}$$

где $\sigma^2 = \beta(0)$ — дисперсия флуктуаций безразмерной скорости сноса α. При $\sigma^2 \to 0$ формула (7), с точностью до замены α^2 на $\langle \alpha \rangle^2$, переходит в формулу (6). При $\langle \alpha \rangle = 0$ среднее отраженное поле спадает с ростом L медленнее, чем в случае $\langle \alpha \rangle \neq 0$, однако условие эффективности применения зеркала ОВФ для восстановления начального поля качественно остается прежним: $\sigma L \ll \rho_k(L)$.

В другом предельном случае $l_\alpha \ll L$ интеграл в (6), в силу центральной предельной теоремы, можно считать гауссовой случайной величиной, что дает

$$\langle v(\rho) \rangle = u^*(\rho) \exp\left\{-\frac{\langle \alpha^2 \rangle L^2}{3\rho_k^2(L)} + \frac{\sigma^4 l_\alpha L^3}{5\rho_k^4(L)}\right\},$$

где

$$\sigma^4 l_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2(z)\, dz.$$

Последним слагаемым здесь практически всегда можно пренебречь поэтому окончательно

$$\langle v(\rho) \rangle = u^*(\rho) \exp\left\{-\frac{\langle \alpha^2 \rangle L^2}{3\rho_k^2(L)}\right\}. \tag{8}$$

Эта формула совпадает с (6) с точностью до замены α^2 на $\langle \alpha^2 \rangle$.

4. Среднее поле описывает степень восстановления при отражении от зеркала ОВФ абсолютных фазовых характеристик начального поля. Не менее важен вопрос об относительных фазовых характеристиках — когерентных свойствах — и вопрос о статистике интенсивности отраженной волны. Для ответа на эти вопросы необходимо вычислить более высокие моменты отраженной от зеркала ОВФ волны $v(\rho)$. Наметим один из возможных путей вычисления высших моментных функций отраженной волны с учетом ветрового сноса неоднородностей среды.

Заметим, во-первых, что при $\alpha = 0$ уравнение (2) имеет решение $\gamma(x, s, \rho) = \delta(s)$. Это дает основание считать, что при малых α $\gamma(x, s, \rho)$ — достаточно узкая функция s, сосредоточенная в окрестности $s = 0$. По-видимому, масштабом функции $\gamma(x, s, \rho)$ по s является наибольший снос неоднородностей на трассе длины x — αx. Если это так, то при $\alpha L < l_0$ можно разложить коэффициент при γ в правой части уравнения (2) по $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ в ряд Тейлора и ограничиться первыми неисчезающими членами разложения:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{i}{k}(\nabla_s \nabla_\rho)\gamma = \frac{ik}{2}(s\nabla_\perp \varepsilon)\gamma + \frac{ik}{2}x(\alpha\nabla_\perp \varepsilon)\gamma,$$

$$\varepsilon = \varepsilon(x, \rho), \quad \gamma(0, s, \rho) = \delta(s). \tag{9}$$

Перейдем от этого уравнения к уравнению для функции $J(x, \boldsymbol{n}, \rho) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma(x, s, \rho) e^{-ik(\boldsymbol{n}s)} ds$:

$$\frac{\partial J}{\partial x} + (\boldsymbol{n}\nabla_\rho) J + \frac{1}{2}(\nabla_\perp \varepsilon \nabla_{\boldsymbol{n}}) J = \frac{ik}{2} x(\boldsymbol{\alpha}\nabla_\perp \varepsilon) J, \tag{10}$$

$$J(0, \boldsymbol{n}, \rho) = 1.$$

В дальнейшем для простоты будем считать $\alpha = \mathrm{const}$. Решая уравнение (10) методом характеристик, получим

$$J(x, \boldsymbol{n}, \rho) = \exp\{ikx(\boldsymbol{\alpha n}) - ik(\boldsymbol{\alpha}\rho) + ik(\boldsymbol{\alpha}\rho_0(x, \boldsymbol{n}, \rho))\}, \tag{11}$$

где $\rho_0(x, \boldsymbol{n}, \rho)$ — поперечные координаты в плоскости $x = 0$ геометрооптического луча, имевшего в плоскости x координаты ρ и векторный угол наклона к оси x — $\boldsymbol{n}$. Так как в дальнейшем мы будем интересоваться лишь статистическими свойствами J и γ, для удобства заменим истинные ρ_0 на статистически эквивалентные им функции $\rho_0(x, \boldsymbol{n}, \rho)$, удовлетворяющие граничным условиям при $x = 0$:

$$d\rho_0/dx = \boldsymbol{n}_0, \quad d\boldsymbol{n}_0/dx = (1/2)\nabla_\perp \varepsilon(x, \rho_0),$$
$$\rho_0(0) = \rho, \quad \boldsymbol{n}_0(0) = -\boldsymbol{n}. \tag{12}$$

Нетрудно показать, что решение (11) приводит для среднего отраженного поля к формуле (6), что подтверждает справедливость сделанных при выводе (11) допущений. Заметим еще, что зависимость J (11) только от координат геометрооптических лучей не означает вовсе, что использование J (11) при расчете статистических свойств отраженной волны эквивалентно приближению геометрической оптики.

5. Решение (11) позволяет выразить моментную функцию отраженного поля $v(\rho)$ порядка M через взаимную характеристическую функцию поперечных координат M геометрооптических лучей. Для примера приведем здесь только следующее из (1), (11) выражение для функции когерентности плоской отраженной волны:

$$\Gamma(\boldsymbol{s}) = \langle v(\rho) v^*(\rho + \boldsymbol{s}) \rangle =$$
$$= |u|^2 \langle \exp\{ik(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\varkappa}(L)) - ik(\boldsymbol{\alpha s})\} \rangle, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\varkappa}(L) = \rho_0(L, 0, \boldsymbol{s}) - \rho_0(L, 0, 0)$. Таким образом, задача определения функции когерентности отраженной волны сводится к нахождению характеристической функции относительной диффузии двух лучей. Статистические свойства относительной диффузии двух лучей уже обсуждались ранее (см., например, [8]). Так, если $s > L_0$ — внешнего масштаба турбулентности, то лучи распространяются статистически независимо и формула (13) переходит в

$$\Gamma = |\langle v \rangle|^2,$$

где

$$\langle v \rangle = u^* \langle \exp \{ ik(\boldsymbol{\alpha} \rho_0 (L,\ 0,\ 0)) \} \rangle$$

равно выражению (6) при $u^*(\boldsymbol{\rho}) = u^*$.

Если $s < L_0$, то при расчете функции когерентности необходимо учитывать статистическую зависимость между лучами. В случае, когда вычисленный в приближении геометрической оптики средний квадрат амплитуды первоначально плоской волны, прошедшей турбулентную трассу длины L, — $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$, при расчете совместной диффузии лучей можно воспользоваться первым приближением геометрической оптики [9], что дает

$$\Gamma(\mathbf{s}) = |\langle v \rangle|^2 \exp \{(k^2/12) L^3 (\boldsymbol{\alpha} \nabla_s)^2 D(\mathbf{s})\}.$$

При $s < l_0$ — внутреннего масштаба турбулентности, положив $D(s) = 4Ds^2 - Bs^4$, получаем

$$\Gamma(\mathbf{s}) = |u|^2 \exp \{-(k^2/3) BL^3 [\alpha^2 s^2 + 2(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{s})^2]\}. \tag{14}$$

Как и следовало ожидать, функция когерентности отраженной волны анизотропна, поскольку имеется выделенное направление $\boldsymbol{\alpha}$, вдоль которого когерентные свойства отраженной волны хуже. Так как вычисленный в первом приближении геометрической оптики средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды падающей волны равен $\langle \chi^2 \rangle = 4BL^3/3$ [9], то последнее равенство можно переписать так:

$$\Gamma(\mathbf{s}) = |u|^2 \exp \{-(k^2/4) \langle \chi^2 \rangle [\alpha^2 s^2 + 2(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{s})^2]\}.$$

В области сильных флуктуаций интенсивности ($\langle \chi^2 \rangle \gg 1$) первым приближением геометрической оптики пользоваться нельзя и относительное расстояние между лучами $\boldsymbol{\varkappa}(L)$ уже не обладает гауссовой статистикой. Тем не менее известно, что кумулянтные и, в частности, гауссово приближения при вычислении тех или иных статистических характеристик случайных процессов и волн приводят к качественно и даже количественно верным результатам [10]. Поэтому в гауссовом приближении [10] перепишем (13) так:

$$\Gamma(\mathbf{s}) = |u|^2 \exp \{-(k^2/2) [\langle (\boldsymbol{\alpha\varkappa}(L))^2 \rangle - (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{s})^2]\}. \tag{15}$$

Здесь использовано заранее очевидное равенство $\langle \boldsymbol{\varkappa}(L) \rangle = \mathbf{s}$. Как и раньше, исследуем поведение $\Gamma(\mathbf{s})$ при $s < l_0$. Считая также, что $\varkappa < l_0$, получим из (12) систему уравнений для компонент вектора $\boldsymbol{\varkappa}$:

$$d\boldsymbol{\varkappa}/dx = \boldsymbol{\mu}, \quad d\boldsymbol{\mu}/dx = (1/2)(\boldsymbol{\varkappa}\nabla_\perp)\varepsilon(x,\ \boldsymbol{\rho}_0),$$

$$\boldsymbol{\varkappa}(0) = \mathbf{s}, \quad \boldsymbol{\mu}(0) = 0.$$

Отсюда в диффузионном приближении следует уравнение Эйнштейна—Фоккера — Планка для плотности вероятности $W(x,\ \boldsymbol{\varkappa},\ \boldsymbol{\mu})$ [8]:

$$\partial W/\partial x + (\boldsymbol{\varkappa}\nabla_\mu) W = B\varkappa^2 \Delta_\mu W + 2B(\boldsymbol{\varkappa}\nabla_\mu)^2 W,$$

$$W(0,\ \boldsymbol{\varkappa},\ \boldsymbol{\mu}) = \delta(\boldsymbol{\varkappa} - \mathbf{s})\delta(\boldsymbol{\mu}).$$

Согласно (16) входящее в (15) среднее $\langle (\boldsymbol{\alpha\varkappa}(x))^2 \rangle$ удовлетворяет замкнутой системе уравнений

$$\frac{d^3 \langle (\boldsymbol{\alpha\varkappa})^2 \rangle}{dx^3} = 8B \langle (\boldsymbol{\alpha\varkappa})^2 \rangle + 4B\alpha^2 \langle \varkappa^2 \rangle,$$

$$\frac{d^3 \langle \varkappa^2 \rangle}{dx^3} = 16B \langle \varkappa^2 \rangle, \quad \langle (\boldsymbol{\alpha\varkappa}(0))^2 \rangle = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{s})^2,$$

$$\langle \varkappa^2(0) \rangle = s^2, \quad \frac{d^k}{dx^k} \langle (\alpha\varkappa)^2 \rangle = \frac{d^k}{dx^k} \langle \varkappa^2 \rangle \Big|_{x=0} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Она легко решается. При малых BL^3 отсюда и из (15) следует формула (14). В области сильных флуктуаций интенсивности $BL^3 \gg 1$ ($\langle \chi^2 \rangle \gg 1$) $\langle (\alpha\varkappa(L))^2 \rangle$ экспоненциально растет с показателем экспоненты $\sim \sqrt[3]{B} L$. Соответственно, если $k\alpha l_0 > 1$, радиус когерентности отраженной волны экспоненциально убывает с ростом L.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Дж. У — ТИИЭР, 1978, **66**, № 6, с 31
2. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах — Сборник ИПФАН, Горький, 1979
3. Fante R. L. — J. Opt. Soc. Am., 1976, **66**, p. 730.
4 Половинкин А. В., Саичев А. И. — Изв вузов — Радиофизика (в печати).
5. Гельфгат В И. — Акуст. журн, 1976, **22**, № 1, с. 123.
6. Саичев А И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 9, с. 1290
7. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И Введение в статистическую радиофизику Ч II. — Случайные поля — М.· Наука, 1978.
8 Кляцкин В И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах — М.: Наука, 1980.
9 Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
10 Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
23 сентября 1980 г.

AN EFFECT OF IRREGULARITY DRIFT OVER THE BEAM PROPAGATION TRACE ON THE OPERATING EFFICIENTY OF SYSTEMS INVERTED THE WAVE FRONT

A. N. Malakhov, A. I Saichev

An effect is discussed of the turbulent irregularities wind drift of a medium on statistical properties of a wave reflected from the mirror inverted the wave front. The mean field and the coherence function of the reflected wave have been calculated. It is shown that the coherence function of the reflected wave is anisotropic due to the isolated drift direction of the medium irregularities. One of the possible methods is suggested for the statistical analysis of the effect of turbulent irregularities drift in the case when the largest relative shift of irregularities is smaller then the internal scale of irregularities.