ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 621.371.25

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН ВНУТРИ ЭРГОДИЧЕСКОГО СЛОЯ

А. П. Сливинский

Для модели сферически-слоистой ионосферы, в пренебрежении поглощением и рассеянием, проводится исследование распространения радиоволн с угловыми модами, попадающими в окрестность максимума электронной концентрации. При наличии достаточно слабой горизонтальной квазирегулярной неоднородности в качестве возмущения в приближении геометрической оптики показано, что указанные моды будут распространяться внутри эргодического слоя. Траектории радиоволн внутри этого слоя являются стохастическими вследствие перемешивания угловых мод с волновыми векторами, лежащими внутри слоя, ширина которого пропорциональна амплитуде возмущения.

Как было показано в работах [1, 2], при сверхдальнем и кругосветном распространении радиоволн существенную роль может играть захват радиоволн в ионосферные волновые каналы (ИВК), обладающие минимальным затуханием энергии для захваченных мод. Исходные траектории таких пространственных мод должны, очевидно, располагаться вблизи сепаратрисы, там, где концентрация электронов ионосферного слоя достигает максимального значения. Достаточно подробный анализ этого вопроса изложен, например, в книге [3].

С другой стороны, хорошо известно явление [4], когда при описании поведения динамических систем вблизи сепаратрисы возникает эргодический слой, внутри которого происходит стохастизация траекторий движения частиц, полей и т. д. при наличии как случайных, так и регулярных возмущений.

Поскольку в приближении геометрической оптики появляется возможность описания распространения радиоволн с помощью гамильтонова формализма, то указанными свойствами динамических систем будет обладать и рассматриваемая задача.

Для траекторий лучей КВ радиоволн, лежащих вблизи сепаратрисы. на основании вышеуказанного, сколь угодно малое возмущение должно размазать лучевые траектории по угловой координате в эргодический слой. Переход лучевой траектории в эргодический слой соответствует переходу от волнового описания к статистическому, когда разрушаются исходные интегралы «движения», что приводит к эффективному перемешиванию лучевых траекторий. Распространение радиоволн в этой области является стохастическим и должно уже описываться статистическими методами.

Для выявления основных свойств рассматриваемой системы ограничимся случаем однослойной сферически-слоистой ионосферы без учета рассеяния и омических потерь энергии КВ поля.

В случае вертикального диполя на поверхности Земли для единственной отличной от нуля радиальной компоненты вектора-потенциала в обозначениях [3] можно записать следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \left[\varepsilon(z) - \frac{\nu(\nu+1)}{k^2 a^2} \right] \psi = 0. \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon(z) = 1 - 4\pi e^2 N_e(z)/m f^2$ — диэлектрическая проницаемость, $k = f/c$, f — частота КВ радиоволн, c — скорость света в вакууме, ν — целое положительное число, $N_e(z)$ — концентрация электронов, a — радиус Земли и высота над поверхностью Земли, $z \ll a$, e, m — заряд и масса электрона.

Для простоты анализа и без ограничения общности $N_e(z)$ удобно выбрать в виде

$$N_e(z) = N_m \sin[(\pi/2z_m)z], \tag{2}$$

где N_m — максимальное значение электронной концентрации; z_m — высота, соответствующая N_m.

Перейдем к уравнению для эйконала S и ограничимся первым членом в разложении Дебая $\psi = \sum_{m=0}^{\infty} [1/(ik)^m] A_m e^{ikS}$, что всегда справедливо для достаточно плавного изменения S на длине радиоволны. С учетом этого (1) примет искомую гамильтонову форму:

$$H = p^2/2 + U(z)/2, \tag{3}$$

где $H = -\nu(\nu+1)/2k^2 a^2 \equiv -E/2$, $U(z) = -\varepsilon(z) = -1 + (f^2_{\text{кр}}/f^2) \times \sin(\pi z/2z_m)$, $\partial S/\partial z = p$, $f_{\text{кр}} = (4\pi e^2 N_m/m)^{1/2}$ — критическая частота.

Если в качестве «времени» выбрать проекцию траектории луча на поверхность Земли $D = a\tau$, τ — геоцентрический угол, тогда с использованием (3) имеем следующие уравнения «движения»:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial z}{\partial D}, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial D}$$

или

$$p = \frac{\partial z}{\partial D}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 z}{\partial D^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{4}$$

Далее удобно перейти к новым переменным — действие —, фаза — φ с помощью следующих стандартных преобразований:

$$I(H) = (1/2)\pi \oint p\,dz = (2z_m/\pi^2)\int_0^{\pi/2} p\,dx,$$

$$\varphi(x, H) = \partial S(x, I)/\partial I, \quad S(x, I) = (z_m/\pi^2)\int_0^x p\,dx,$$

где $x = (\pi/2z_m)z$. В соответствии с выражением (3) $p = (1 - E - \beta\sin x)$, где $\beta = f^2_{\text{кр}}/f^2$. Используя это определение, для I, например, получим

$$I(H) = (2z_m/\pi^2)\int_0^{\pi/2}(1 - E - \beta\sin x)^{1/2}dx = \left(4z_m\sqrt{2\beta}/q\pi^2\right) \times$$

$$\times F\{\arcsin[(1 - E + \beta)/2(1 - E)]^{1/2};\ q\} - 4z_m\beta/\pi(1 - E)^{1/2},$$

где $F(\alpha, q)$ — эллиптический интеграл 1-го рода, $q = [2\beta/(1 - E + \beta)]^{1/2}$. Для дальнейшего анализа нам потребуется знание производной $\partial I/\partial E$, которая легко вычисляется:

$$\frac{\partial I}{\partial E} = -\frac{z_m}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\partial x}{p} = -\frac{2z_m q}{\pi^2\sqrt{2\beta}}\left[F\left(\frac{\pi}{2};\ q\right) - F\left(\frac{\pi}{4};\ q\right)\right]. \tag{5}$$

В новых переменных невозмущенные уравнения для лучевых траекторий принимают вид

$$\partial I/\partial D = 0, \quad \partial \varphi/\partial D = \omega(I), \tag{6}$$

где

$$\omega(I) = \frac{\partial H(I)}{\partial I} = \frac{\pi^2 \sqrt{2\beta}}{4qz_m}\left[F\left(\frac{\pi}{2};\, q\right) - F\left(\frac{\pi}{4};\, q\right)\right]^{-1}. \tag{7}$$

Необходимая также для последующего анализа зависимость $x = x(\tau)$ легко определяется согласно (4):

$$\tau = \frac{2z_m}{\pi a}\int \frac{dx}{p} = \frac{4qz_m}{\pi a\sqrt{2\beta}}\left\{F(\arcsin[(\sin x + 1)/2]^{1/2};\, q) - F\left(\frac{\pi}{4};\, q\right)\right\},$$

откуда

$$\sin x = 2\mathrm{sn}^2[\sqrt{2\beta}\pi a(\tau + \tau_0)/4qz_m;\, q] - 1, \tag{8}$$

где $\tau_0 = 4z_m qF(\pi/4;\, q)/\pi a\sqrt{2\beta}$, $\mathrm{sn}\, v$ — эллиптический синус. Тогда для $p(\tau)$ с использованием (8) получим

$$p = (\sqrt{2\beta}/q)(1 - q^2 \mathrm{sn}^2 v)^{1/2} = (\sqrt{2\beta}/q)\, dnv$$

или в фурье-разложении

$$p = \frac{\pi\sqrt{2\beta}}{2qK} + \frac{2\pi\sqrt{2\beta}}{qK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{1 + b^{2n}}\cos\left[\frac{\pi n}{K}\frac{\sqrt{2\beta}}{2q}\frac{\pi a}{2z_m}(\tau + \tau_0)\right]. \tag{9}$$

Выражение (9) принимает более простой вид при выборе $\tau_0 = 0$ и введении обозначений $\omega(I) = \pi\sqrt{2\beta}/4qK$, $K = F(\pi/2;\, q)$, $\bar{\omega} = 2z_m\omega/\pi$:

$$p = \bar{\omega} + 4\bar{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{1 + b^{2n}}\cos\left(n\bar{\omega}\frac{\pi a}{2z_m}\tau\right). \tag{10}$$

Здесь $b = \exp(-\pi K'/K)$. Полученное выражение (10) представляет спектр невозмущенной лучевой траектории.

В рассматриваемой области вблизи сепаратрисы интерес представляют моды с углами излучения, для которых $E \to 1 - \beta$. В этом случае $q \to 1$ и

$$K \approx \frac{1}{2}\ln 2\frac{1 - E - \beta}{\beta}, \quad K' \approx \frac{\pi}{2}, \tag{11}$$

$$\omega(I) \approx \frac{\pi\sqrt{2\beta}}{2\ln[2(1 - E - \beta)/\beta]}, \quad b \approx \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{2\beta}}\bar{\omega}\right).$$

При этом, очевидно, $\bar{\omega} \to 0$ и $b \to 1$, тогда ширина спектра $p(\tau)$ определяется числом фурье-гармоник n_0, которое легко оценивается:

$$n_0 \approx \frac{1}{|\ln b|} = \frac{\sqrt{2\beta}}{2\pi\bar{\omega}} \gg 1,$$

в то время как вдали от сепаратрисы $n_0 \approx 1$.

Перейдем теперь к учету возмущения системы (3). Так как в реальной ионосфере всегда имеются горизонтальные неоднородности электронной концентрации, то, принимая средний размер этих неоднородностей порядка l, для их квазирегулярного расположения вдоль трассы излучения КВ поля N_e можно представить в виде

$$N_e(z,\, D) = N_e^0(z) + \delta N_e \sin(\pi D/2l), \tag{12}$$

где N_e^0 — невозмущенная концентрация электронов.

На основании (12) возмущенное выражение для ε принимает вид

$$\varepsilon(x, \tau) = 1 - \beta\left\{1 + \frac{\delta N_m}{N_m} \sin\left[\left(\frac{\pi a}{2l}\right)\tau\right]\right\} \sin x. \qquad (13)$$

С использованием (13) возмущенное уравнение «движения» (4) перепишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial D} = -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\pi}{2z_m}\Delta \sin \gamma\tau \cos x, \qquad (14)$$

где

$$\Delta = \frac{\beta}{2}\frac{\delta N_m}{N_m}, \qquad \gamma = \frac{2\pi a}{l}.$$

При наличии возмущения теперь уже не будет сохраняться интеграл (6). Действительно, используя невозмущенные уравнения (4), а также (7) и (14), находим

$$\frac{dI}{dD} = \frac{dI}{dH}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial D} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial D}\right) = \frac{\Delta}{\overline{\omega}} p \sin \gamma\tau \cos x. \qquad (15)$$

Выражение (15) представляет собой спектр возмущенной лучевой траектории, обусловленный наличием горизонтальных неоднородностей ионосферы.

С учетом (10) выделим в возмущенном спектре (15) резонансные члены, для которых будет выполняться следующее условие:

$$n\overline{\omega}\pi a/2z_m = 2\pi a/l,$$

откуда

$$\omega(I_n) = 4z_m/\ln \equiv \eta/n. \qquad (16)$$

Согласно (16) расстояние между соседними резонансами определяется величиной

$$\Omega_n = \overline{\omega}(I_{n-1}) - \overline{\omega}(I_n) \approx \eta/n^2 = \overline{\omega}^2(I_n)4\eta. \qquad (17)$$

Условие образования стохастических лучевых траекторий на основании исследования, проведенного в работе [5], имеет вид

$$\left|\frac{d\overline{\omega}(I_n)}{dI}\right| \delta I_n \gg \Omega_n. \qquad (18)$$

Физический смысл условия (18) очевиден. Стохастизация по угловым модам наступает в том случае, когда изменение резонанса моды при наличии возмущения превышает расстояние между соседними резонансами.

Множитель δI_n, входящий в (18), вычисляется путем интегрирования (15) по конечному интервалу τ, совпадающему со средним периодом осцилляции. Следовательно, при ионосферном околоземном распространении радиоволн полная стохастизация по углу лучевых траекторий внутри эргодического слоя происходит на средней длине одного скачка. С использованием (10) при условии малости сдвига резонансной моды $|d\overline{\omega}/dI|\delta I \ll \overline{\omega}$ и в окрестности n-го резонанса с учетом (17)

$$\delta I_n \approx \left(2\Delta/n\left|\frac{d\overline{\omega}}{dI}\right|\delta I_n\right)(b^n/(1 + b^{2n})).$$

Вблизи сепаратрисы можно воспользоваться выражениями (11), тогда для δI_n имеем с использованием (16)

$$\delta I_n \approx \left(\Delta\bar{\omega}/n \left|\frac{d\bar{\omega}}{dI}\right|\right)^{1/2}. \tag{19}$$

На основании (19), (17) критерий стохастичности K_c приобретает вид

$$K_c = \frac{|d\bar{\omega}/dI|\,\delta I_n}{\Omega_n} = \left(\frac{16\,\Delta\eta}{\bar{\omega}^3}\,\frac{d\bar{\omega}}{dI}\right)^{1/2} \gg 1. \tag{20}$$

Вблизи сепаратрисы с использованием (5) и (11) для критерия стохастичности (20) окончательно имеем

$$K_c^2 = \frac{128\,\Delta\eta}{\pi\beta\sqrt{2\beta}} \exp\left(-\pi\frac{\sqrt{2\beta}}{2\bar{\omega}}\right).$$

Отсюда для граничного значения $\Delta\eta$ с помощью (11) получим

$$1 - E_c - \beta = 64\,\Delta\eta/\pi\sqrt{2\beta}\,. \tag{21}$$

Следовательно, угловые моды в интервале

$$1 - \beta \geqslant E \geqslant 1 - \beta - 64\,\Delta\eta/\pi\sqrt{2\beta} \tag{22}$$

испытывают эффективное перемешивание, т. е. в этой области происходит стохастизация лучевых траекторий. Ширина этой области в соответствии с (21) пропорциональна величине возмущения Δ.

Таким образом, начиная с некоторых значений угла наклона исходного луча с горизонталью, для которого E попадает в интервал (22), понятие отдельной лучевой траектории теряет смысл. Траектория луча в этом случае «обобществляется» между большим числом угловых мод n_0 и спектр становится близким к сплошному. Нетрудно показать по аналогии с исследованием, проведенным в работе [4], что и для траекторий, лежащих вблизи и над сепаратрисой, образуется точно такая же по ширине область стохастизации. В соответствии с этим сепаратриса симметрично окружена областью с перемешиванием траекторий лучей. Эта область как раз и представляет эргодический слой. Распространение радиоволн внутри эргодического слоя носит неразличимый по угловым модам характер. Иными словами, происходит турбулизация «движения» по лучевым траекториям, проявляющаяся в интенсивном рассеянии радиоволн внутри эргодического слоя. Процесс распространения радиоволн в этой области, таким образом, носит диффузионный по угловым модам характер, и, стало быть, для описания распространения в этом случае можно использовать, например, уравнение типа Фоккера — Планка.

В заключение полезно оценить влияние присутствия случайных неоднородностей ионосферы на возможность образования эргодического слоя. С этой целью оценим расстояние L, на котором происходит полная стохастизация КВ поля за счет рассеяния на случайных неоднородностях. В приближении Бурре [6] $L = \lambda^2/l_\varepsilon\sigma_\varepsilon^2$, где λ — длина волны КВ поля, l_ε — масштаб неоднородности, σ_ε^2 — дисперсия диэлектрической проницаемости $\left(\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_N^2\,(f_{кр}/f)^4\right)$. Для наиболее характерных неоднородностей ионосферы [7] $l_\varepsilon \sim 1$ *км* и для радиотрасс наклонного зондирования $\sigma_\varepsilon^2 = 10^{-8}$, тогда $L \sim 10^4$ *км*, что значительно превышает средний период осцилляции луча КВ поля.

Заметим, что в реальной ионосфере для радиотрасс с достаточно большими горизонтальными градиентами электронной концентрации с ростом длины трассы траектория луча может покинуть окрестность сепаратрисы. В этом случае, согласно (16), $\Omega = \bar{\omega}\eta$ и критерий стохастичности (20) может нарушиться, что приведет к разрушению эргодического слоя.

Отметим, что после отправления данной статьи в редакцию вышла работа [8], в которой также указывается на важность учета образования эргодического слоя для ионосферного распространения радиоволн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич А. В — Геомагнетизм и аэрономия, 1971, **11**, с. 961.
2. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. — Геомагнетизм и аэрономия, 1973, **13**, с 283.
3. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. — М.: Наука, 1979.
4. Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. — М.: Наука, 1970.
5. Чириков Б. В. Диссертация. Новосибирск, 1959
6. Рытов С. М., Кравцов Ю. А, Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М: Наука, 1978.
7. Альперт Я. Л. Распространение электромагнитных волн и ионосфера. — М.: Наука, 1972.
8. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. — ЖЭТФ, 1981, **80**, с. 524.

Поступила в редакцию
30 сентября 1980 г.

PROPAGATION OF RADIO WAVES INSIDE THE ERGODIC LAYER

A. P. Slivinskij

For the model of spherically stratified ionosphere neglecting the absorption and scattering the investigation is carried out of radio wave propagation with angular modes being in the vicinity of the electron concentration maximum. In the presence of a sufficiently weak horizontal quasi-regular inhomogeneity as a disturbance it is shown in the geometrical optics approximation that the given modes will propagate inside the ergodic layer. Trajectories of radio waves inside of this layer are stochastic due to mixing of angular modes with wave vectors being inside the layer the width of which is propagational to the disturbance amplitude.